

**Manual**

*Manual  
de la teoría  
de  
probabilidades  
y estadística  
matemática*

**Manual**

*Editorial «Mir»  
Moscú*





Справочник  
по теории  
вероятностей  
и математической  
статистике

Под редакцией  
академика АН УССР  
В. С. Королюка

Киев  
«Наукова Думка»

# **Manual**

de la teoría  
de probabilidades  
y estadística  
matemática

Redactado por el Académico  
de la Academia de Ciencias de  
la RSS de Ucrania  
V. S. Koroluk

Editorial Mir · Moscú

Traducido del ruso por el ingeniero K. Medkov  
y S. Kalóshnik

Impreso en la URSS. 1981

*На испанском языке*

© Издательство «Наукова Думка», 1978

© Traducción al español. Editorial Mir, 1981

## INDICE

Prefacio	11
<b>Parte primera</b>	
<b>Teoría de probabilidades</b>	
Capítulo 1. Espacio probabilístico	13
1.1. Experimento aleatorio	13
1.2. Axiomas y propiedades fundamentales de la probabilidad	15
1.3. Definición del espacio probabilístico	18
1.4. Magnitudes aleatorias	21
1.5. Grupos de magnitudes aleatorias	24
1.6. Esperanza matemática	29
1.7. Probabilidades condicionales y esperanzas matemáticas	35
Capítulo 2. Sucesiones de sucesos y magnitudes independientes	43
2.1. Ley de cero y de unidad	43
2.2. Esquema de Bernoulli	44
2.3. Teoremas de límites para el esquema de Bernoulli	46
2.4. Sucesiones de magnitudes aleatorias independientes. Ley de los grandes números	48
2.5. Desigualdad de Kolmogórov. Ley reforzada de los grandes números	52
2.6. Series de magnitudes aleatorias independientes	55
Capítulo 3. Aparato analítico	57
3.1. Funciones generadoras	57
3.2. Transformación de Laplace	61
3.3. Funciones características	65
Capítulo 4. Teorema del límite central	73
4.1. Teorema del límite central para las sucesiones de magnitudes aleatorias independientes	73
4.2. Teorema del límite central para los vectores aleatorios independientes	80
	5

4.3. Teoremas del límite locales	83
4.4. Precisión del teorema del límite central y los desarrollos asintóticos	85
4.5. Grandes desviaciones	91
<b>Capítulo 5. Distribuciones divisibles infinitamente</b>	<b>94</b>
5.1. Sumas de magnitudes aleatorias independientes y sus distribuciones	94
5.2. Definición y propiedades principales de las distribuciones divisibles infinitamente	92
5.3. Teoremas del límite para el esquema de series	101
5.4. Teoremas del límite para las sumas crecientes en $\mathbb{R}^1$	104
<b>Capítulo 6. Distribuciones probabilísticas principales</b>	<b>110</b>
6.1. Distribuciones discretas	110
6.2. Distribuciones continuas	117
6.3. Distribuciones de Pearson	134
6.4. Distribuciones multidimensionales	136
6.5. Distribuciones estables	142
<b>Capítulo 7. Fluctuaciones aleatorias</b>	<b>146</b>
7.1. Procesos de regeneración	146
7.2. Clasificación de las fluctuaciones aleatorias en una recta	151
7.3. Funcionales en la fluctuación aleatoria	153
7.4. Problema de arruinamiento para fluctuaciones aleatorias semicontinuas	156
7.5. Identidades de factorización	157
<b>Capítulo 8. Cadenas de Márkov</b>	<b>164</b>
8.1. Definiciones. Propiedades generales	164
8.2. Cadenas homogéneas de Márkov	173
8.3. Cadenas de Márkov con el conjunto discreto de estados	189
<b>Parte segunda</b>	
<b>Teoría de los procesos aleatorios</b>	
<b>Capítulo 9. Nociones fundamentales de la teoría de los procesos aleatorios</b>	<b>203</b>
9.1. Definición del proceso aleatorio	203
9.2. Mensurabilidad e integrabilidad de los procesos aleatorios	210
9.3. Separabilidad. Propiedades de las funciones muestrales	213
9.4. Continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios	218
<b>Capítulo 10. Teoría <math>\mathcal{L}_2</math></b>	<b>223</b>
10.1. Espacio de las magnitudes aleatorias de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{S}, P)$	223



10.2. Medidas e integrales estocásticas	227
10.3. Extrapolación lineal y filtración de las funciones aleatorias de Hilbert	232
<b>Capítulo 11. Procesos estacionarios</b>	<b>235</b>
11.1. Procesos aleatorios estacionarios en amplio sentido	235
11.2. Representación espectral de las funciones de correlación	239
11.3. Representación espectral de los procesos estacionarios	242
11.4. Propiedades analíticas de los procesos estacionarios y de sus trayectorias	245
11.5. Teorema ergódico y teorema del límite central	247
11.6. Transformaciones lineales (filtros)	248
11.7. Procesos con densidades espectrales racionales fraccionales	254
11.8. Pronosticación, interpolación y filtración de los procesos estacionarios	257
11.9. Descomposición del proceso estacionario	263
11.10. Resolución de los problemas de pronosticación lineal, interpolación y filtración	265
11.11. Procesos aleatorios estacionarios en estrecho sentido	272
<b>Capítulo 12. Campos aleatorios</b>	<b>280</b>
12.1. Definiciones fundamentales	280
12.2. Propiedades de las funciones muestrales	284
12.3. Campos aleatorios homogéneos	287
12.4. Campos aleatorios isótropos	296
<b>Capítulo 13. Martingalas</b>	<b>300</b>
13.1. Definiciones y ejemplos	300
13.2. Propiedades de las martingalas y semimartingalas	301
13.3. Clausura, integrabilidad y existencia del límite	302
13.4. Momentos de Márkov y sustitución aleatoria del tiempo	304
13.5. Algunas aplicaciones	305
13.6. Descomposición de las semimartingalas	307
13.7. Martingalas integrables de modo cuadrático	310
<b>Capítulo 14. Procesos de Márkov</b>	<b>312</b>
14.1. Funciones aleatorias de Márkov	312
14.2. Procesos de Márkov. Definición y propiedades fundamentales	317
14.3. Funcionales multiplicativas de los procesos de Márkov	326
<b>Capítulo 15. Procesos de Márkov homogéneos</b>	<b>331</b>
15.1. Definiciones y propiedades fundamentales	331
15.2. Semigrupos de los operadores relacionados con los procesos homogéneos de Márkov	334
15.3. Operadores característicos de los procesos rigurosos de Márkov	339

15.4. Procesos con un conjunto numerable de estados	343
15.5. Funcionales de los procesos de Márkov	352
15.6. Transformaciones de los procesos de Márkov	357
15.7. Procesos homogéneos de difusión en los espacios euclídeos	361
15.8. Procesos continuos en una recta	365
Capítulo 16. Procesos con incrementos independientes	370
16.1. Definición y propiedades fundamentales	370
16.2. Procesos estocásticos continuos con incrementos independientes	373
16.3. Procesos homogéneos. Propiedades asintóticas	375
16.4. Funcionales de los procesos con incrementos independientes	380
16.5. Proceso de Poisson	386
16.6. Proceso de Wiener	388
Capítulo 17. Procesos ramificados	394
17.1. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas (tiempo discreto)	394
17.2. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas (tiempo continuo)	399
17.3. Procesos ramificados con un número finito de tipos de partículas (tiempo discreto)	404
17.4. Procesos ramificados con un número finito de tipos de partículas (tiempo continuo)	410
17.5. Procesos ramificados generales de Márkov	414
Capítulo 18. Teoremas del límite para los procesos aleatorios	419
18.1. Convergencia débil de las medidas en los espacios métricos	419
18.2. Convergencia débil de las medidas en un espacio de Hilbert	421
18.3. Teoremas del límite para los procesos aleatorios continuos	424
18.4. Teoremas del límite para los procesos sin discontinuidades de segunda especie	427
Capítulo 19. Ecuaciones diferenciales estocásticas	430
19.1. Procesos de difusión	430
19.2. Integrales estocásticas extendidas al proceso de Wiener	433
19.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos continuos	444
19.4. Integrales estocásticas extendidas por las medidas de Poisson	456
19.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos con discontinuidades	462

## Parte tercera

### Estadística matemática

Capítulo 20. Verificación de las hipótesis estadísticas	465
20.1. Nociones fundamentales y problemas de la estadística matemática	465
20.2. Procedimientos de verificación de las hipótesis	469
20.3. Criterios de verificación de las hipótesis estadísticas	471
20.4. Distribución de la muestra	478
20.5. Distribución de las características muestrales	483
Capítulo 21. Teoría de estimación de los parámetros	487
21.1. Problemas de estimación y propiedades de las estimaciones	487
21.2. Métodos de construcción de las estimaciones	493
21.3. Dominios confidenciales	495
Capítulo 22. Estimaciones de los parámetros de algunas distribuciones	499
22.1. Estimaciones de los parámetros de distribución normal	499
22.2. Estimaciones de los parámetros de las distribuciones binomial y de Poisson	502
22.3. Estimaciones de los parámetros de la distribución uniforme y de la distribución $\Gamma$	504
Capítulo 23. Método de los cuadrados mínimos	508
23.1. Estimaciones del método de los cuadrados mínimos	508
23.2. Modelos lineales de regresión	513
Capítulo 24. Estadística de los procesos aleatorios	519
24.1. Distinción de las hipótesis	519
24.2. Distinción de las hipótesis para los procesos con incrementos independientes	522
24.3. Distinción de las hipótesis para los procesos difusivos	529
24.4. Distinción de las hipótesis del valor medio del proceso gaussiano	532
24.5. Distinción de las hipótesis sobre la función de correlación del proceso gaussiano	536
24.6. Estimaciones de los parámetros de las distribuciones para procesos aleatorios	543
Capítulo 25. Estadística de los procesos aleatorios estacionarios en amplio sentido	548
25.1. Propiedades de las estimaciones estadísticas para las características de procesos estacionarios	548
25.2. Estimaciones de la media desconocida	549

25.3. Estimaciones de los parámetros de la regresión	555
25.4. Estimaciones de la densidad espectral y de la función espectral de las sucesiones estacionarias	559
25.5. Estimaciones de los parámetros de la densidad espectral	564
Alfabeto griego	566
Alfabeto gótico	566
Bibliografía	567
Índice alfabético de materias	572

## PREFACIO

El presente manual abarca las concepciones fundamentales de la teoría de probabilidades, de la teoría de procesos aleatorios y de la estadística matemática (entre dichas concepciones figuran las definiciones de conceptos, los axiomas, las formulaciones de ciertas afirmaciones, las fórmulas), como también la descripción de métodos e ideas que se utilizan en los razonamientos teórico-probabilísticos (las funciones características y transformaciones de Laplace, las representaciones espectrales para procesos estacionarios y campos homogéneos, el método de ecuaciones diferenciales en la teoría de los procesos de Márkov, la continuidad absoluta de medidas en la estadística de los procesos aleatorios, etc.). Los métodos teórico-probabilísticos están ilustrados con ejemplos sencillos que ayudan al lector a resolver de modo independiente los problemas de carácter práctico reduciéndolos a un esquema conocido teórico-probabilístico y sirviéndose de los métodos descritos en el manual. El libro contiene en gran volumen una información de hechos reales y puede ser útil tanto para aquellos lectores que sólo desean familiarizarse con los hechos para poder aplicarlos, pero a los que no interesan las demostraciones matemáticas, como para los especialistas en el dominio de la teoría de probabilidades en su trabajo científico, sirviéndoles de material informativo. Ha de ser notado que hasta la fecha no había ningún libro de tal índole.

El material del manual se presenta en tres partes dedicadas, respectivamente, a la teoría de probabilidades, la teoría de procesos aleatorios y la estadística matemática. En la primera parte se dan las definiciones principales: del espacio probabilístico, de la magnitud aleatoria, de la esperanza matemática, de las probabilidades condicionales y esperanzas matemáticas. Se consideran las sucesiones de magnitudes y sucesos independientes, las cadenas de Márkov, los teoremas límites y están descritos, además, los métodos analíticos empleados en los teoremas límites para las sumas de magnitudes aleatorias independientes.

En la segunda parte se dan a conocer las nociones principales de la teoría de procesos aleatorios y campos, como también las cuestiones generales de dicha teoría, esto es, la  $\mathcal{L}_2$ -teoría, la investigación de la continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios, los teoremas límites para ciertos procesos aleatorios. Asimismo, en esta parte se han considerado todas las clases más importantes de procesos aleatorios, es decir, las martingalas, los procesos estacionarios en los sentidos estrecho y amplio, los campos isotropos

y homogéneos, los procesos de Márkov, los procesos de incrementos independientes, los procesos de ramificación, las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En la tercera parte se exponen los conceptos fundamentales de la estadística matemática y los métodos por cuyo intermedio se comprueban las hipótesis estadísticas y se construyen las estimaciones de los parámetros para distribuciones probabilísticas. Aquí mismo se indican los hechos más importantes de la estadística de los procesos aleatorios que constituye una nueva rama de la ciencia.

El volumen del manual no ha permitido incluir todo el extenso material referente a las cuestiones aplicadas de la estadística matemática (en particular, las tablas estadísticas), de lo contrario tendríamos que por lo menos duplicar el volumen del manual. Por esta razón, una parte dedicada a la estadística sólo contiene la información más indispensable que lleva, en lo principal, un carácter teórico.

Las cuestiones de aplicación pura, tales como la teoría de fiabilidad, los juegos estocásticos y autómatas, la teoría del servicio de masas u otras se citan en el manual sólo con el fin de ilustrar los conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades y de la de procesos aleatorios.

Al hacer uso del manual se debe tener en cuenta que sus capítulos pueden leerse prácticamente de modo independiente uno del otro. Los capítulos están divididos en puntos, cuya numeración viene dada según los capítulos; los puntos comprenden subpuntos cada uno de los cuales lleva su denominación. Esto presta al lector la posibilidad de familiarizarse directamente con aquella cuestión que le interesa. El manual está dotado de índice alfabético lo que contribuye a la comodidad de su uso. Los lectores que muestran interés por la exposición más detallada de tal o cual cuestión o la demostración de las afirmaciones dadas en el libro pueden recurrir a la literatura indicada al final del manual.

Los autores admiten que la exposición del material, tanto por la forma como por el contenido, no está privada de ciertas deficiencias. Todas las observaciones críticas y sugerencias serán aceptadas con gratitud.

En la preparación del manuscrito los autores gozaron de gran ayuda por parte de N. F. Riábov y L. V. Lobánov a quienes expresan un agradecimiento especial.

*Los autores.*



parte

# Teoría de probabilidades

## Capítulo 1

### ESPACIO PROBABILÍSTICO

#### 1.1. Experimento aleatorio

**1.1.1. Definición del experimento aleatorio.** El concepto de experimento en la teoría de probabilidades tiene una significación muy amplia. Todo experimento se determina por cierto complejo de condiciones, las cuales o bien se crean artificialmente o bien se realizan independientemente de la voluntad del experimentado, y por los resultados del experimento, es decir, por unos sucesos determinados que se observan como resultado de haberse efectuado dicho complejo de condiciones. Un experimento se considera dado, si están determinadas sus condiciones e indicados los sucesos cuya aparición o no aparición debe observarse.

Los experimentos se pueden dividir a grandes rasgos en dos clases. En una de ellas las condiciones del experimento determinan de modo unívoco la aparición (o no aparición) de los sucesos que se esperan. Los resultados de tales experimentos pueden pronosticarse de antemano a base de las leyes de las ciencias naturales. Los experimentos de esta índole se denominan **deterministas**. En la otra clase de experimentos, con iguales condiciones, es posible la aparición de los sucesos que entre sí se excluyen. El estudio teórico de tales experimentos constituye precisamente el objeto de la teoría de probabilidades; estos últimos llevan el nombre de experimentos **aleatorios** o **probabilísticos**.

Demos a conocer algunos ejemplos de experimentos aleatorios, dejando aparte aquellos que están relacionados con los juegos de azar.

**EJEMPLO 1.** Cada lote de artículos fabricados consta de  $n$  piezas. La comprobación de la calidad de los artículos conduce a la destrucción de éstos, por lo cual para verificar la calidad de todo el lote se escogen  $m$  artículos ( $m < n$ ). El experimento consiste en la elección y comprobación de  $m$  artículos del lote. El resultado del experimento es el número de artículos defectuosos revelados.

**EJEMPLO 2.** El sorteo de una lotería puede considerarse como un experimento aleatorio cuyo resultado es la caída de los premios correspondientes a ciertos billetes de la lotería.

**EJEMPLO 3.** Supongamos que en una prueba biológica se realiza la autofecundación de una planta obtenida después de la polinización cruzada de dos especies. Según cada uno de sus rasgos, dicha planta hereda los genes de ambos padres. No puede decirse con anticipación de qué modo estos genes están combinados en una u otra semilla obtenida después de la autofecundación: para cada gen (si era diferente en las especies materna y paterna) son posibles 3 combinaciones, a saber, materna—materna, materna—paterna, paterna—paterna. Por consiguiente, tal prueba se puede considerar como un experimento aleatorio.

**EJEMPLO 4.** Una partícula suspendida en un líquido se desplaza accionada por los choques con las moléculas del líquido que experimentan un movimiento térmico caótico. El experimento en que se observa el movimiento de tal partícula puede considerarse aleatorio cuyo resultado es la trayectoria que sigue una partícula browniana.

**1.1.2. Álgebra de sucesos.** Consideremos un conjunto  $\mathfrak{N}$  de los sucesos que pueden observarse en cierto experimento estocástico. Podemos determinar algunas operaciones que se realizan con dichos sucesos. Destaquemos, en primer lugar, dos sucesos especiales. El suceso cierto  $U$  es aquel que aparece en cada realización del experimento. El suceso imposible  $V$  es aquel que no puede ocurrir nunca, cualquiera que sea la realización del experimento.

Con todo suceso  $A$  de  $\mathfrak{N}$  ligamos el suceso opuesto  $\bar{A}$ , consistente en que  $A$  no ha ocurrido. Un suceso consistente en que de dos sucesos  $A$  y  $B$  se produce por lo menos uno, se denomina suma (o unión) de los sucesos  $A$  y  $B$ , y se denota  $A + B$  ( $A \cup B$ ). Un suceso consistente en que  $A$  y  $B$  tienen lugar simultáneamente se denomina producto (o intersección) de los sucesos  $A$  y  $B$ , y se denota  $AB$  ( $A \cap B$ ).

Dos sucesos  $A$  y  $B$  son incompatibles, si  $A \cap B$  es un suceso imposible. El suceso  $\bar{A}B$  se llama diferencia de los sucesos  $A$  y  $B$  y se designa  $A - B$ .

Los sucesos  $E_1, E_2, \dots, E_n$  forman un grupo completo de sucesos, si son incompatibles dos a dos y  $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = U = U$ , es decir, de estos sucesos ocurre por lo menos uno.

Un conjunto no vacío de sucesos  $\mathfrak{A}$  que satisface las condiciones:

- 1) Si  $\bar{A} \in \mathfrak{A}$ , entonces  $A \in \mathfrak{A}$ ;
- 2) Si  $A, B \in \mathfrak{A}$ , entonces  $A \cup B \in \mathfrak{A}$ ,

se denomina álgebra de sucesos.

**1.1.3. Sucesos elementales.** Suele decirse que el suceso  $A$  origina la aparición del suceso  $B$  (se escribe  $A \supset B$ ), si el suceso  $B$  ocurre siempre cuando aparece  $A$ . El suceso  $E$  se llama elemental, si para todo suceso  $A$  del experimento aleatorio  $E$  provoca o bien  $A$  o bien no  $A$ . Un experimento aleatorio se denomina finito, si se tiene un grupo completo de sucesos elementales. En la teoría de probabilidades sólo se consideran aquellos experimentos aleatorios en los cuales cualquier suceso representa una suma de todos los sucesos elementales que conducen a la aparición del suceso mencionado. Tal experimento aleatorio se describe por el conjunto de sucesos elementales  $\Omega$  (sus elementos se designan mediante la letra  $\omega$  con diferentes signos:  $\omega', \omega'', \omega^1, \omega_1$ , etc.) y por cierta clase de sus subconjuntos  $\mathfrak{A}$ , llamados sucesos que pueden ocurrir en el experimento. Esta clase de subconjuntos debe satisfacer las siguientes condiciones:



1)  $\Omega \in \mathfrak{A}$  ( $\Omega$  es un suceso cierto que ocurre al transcurrir cualquier suceso elemental);

2)  $\mathfrak{A}$  contiene el subconjunto vacío  $\phi$  que se interpreta como un suceso imposible;

3) si  $A \in \mathfrak{A}$ , entonces  $\Omega - A \in \mathfrak{A}$ ;  $\Omega - A$  es un suceso opuesto a  $A$ ;

4) si  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B \in \mathfrak{A}$ , entonces  $A \cup B$  y  $A \cap B$  pertenecen a  $\mathfrak{A}$ ; el primer suceso se realiza cuando ocurre al menos uno de los sucesos  $A$  o  $B$ , es decir, es la suma de  $A$  y  $B$ ; el segundo suceso se realiza, si transcurren tanto el suceso  $A$  como  $B$ .

La clase de subconjuntos  $\mathfrak{A}$  que satisfacen las condiciones 1—4 se denomina también álgebra de conjuntos.

En caso de que  $\Omega$  sea finito  $\mathfrak{A}$  coincide con la clase de todos los subconjuntos  $\Omega$ .

A título de importante ejemplo de experimento, aleatorio sirve una prueba en la cual se mide cierta magnitud  $\xi$ . Como sucesos elementales pueden considerarse aquí los del tipo  $\{\xi = x\}$ , donde  $x$  es cierto valor fijado. Resulta natural por eso identificar el conjunto de sucesos elementales con un conjunto de puntos en una recta. Si se sabe a priori que  $\xi$  sólo puede tomar los valores de cierto conjunto  $M$ , este último debe considerarse como conjunto de sucesos elementales. Es natural que al medir supongamos la posibilidad de observar los sucesos  $\{a \leq \xi < b\}$ , donde  $a < b$  son unos números arbitrarios. Cualesquiera sumas finitas de tales semiintervalos ( $a$  y  $b$  pueden tomar también valores infinitos) pueden considerarse como álgebra de sucesos ligados con el experimento.

## 1.2. Axiomas y propiedades fundamentales de la probabilidad

1.2.1. Frecuencias de los sucesos. Una de las particularidades esenciales de los experimentos aleatorios consiste en la posibilidad de reproducirlos un gran número de veces (en principio, ilimitadamente). Si  $\Omega$  es un conjunto de sucesos elementales del experimento, la realización de éste implica la elección de cierto punto  $\omega \in \Omega$ , mientras que la reiteración del mismo experimento  $n$  veces significa la elección de una sucesión de puntos  $\omega_1, \dots, \omega_n$  en  $\Omega$ . Sea  $\mathfrak{A}$  el álgebra de sucesos observados en el experimento,  $A \in \mathfrak{A}$ . Designemos con  $k_n(A)$  el número de apariciones del suceso  $A$  en  $n$  experimentos (si  $\omega_i \in A$ , entonces  $A$  se ha realizado en el  $i$ -ésimo experimento). La magnitud  $v_n(A) = \frac{1}{n}k_n(A)$  lleva el nombre de frecuencia de aparición del suceso  $A$  en  $n$  experimentos. En cierto grado, esta magnitud caracteriza la objetiva relación existente entre las condiciones del experimento y el suceso  $A$ , señalando con qué frecuencia estas condiciones conducen a la aparición del suceso  $A$ . Hemos de notar que  $v_n(A)$  varía tanto con  $n$  como con el cambio de la serie de experimentos.

He aquí las propiedades fundamentales de las frecuencias.

1. Si  $U$  es un suceso cierto, entonces  $v_n(U) = 1$ .
2. Si  $V$  es un suceso imposible, entonces  $v_n(V) = 0$ .
3. Para todo  $A \in \mathfrak{A}$  se tiene  $0 \leq v_n(A) \leq 1$ .
4. Si  $A \subset B$ , entonces  $v_n(A) \leq v_n(B)$ .
5. Si  $A$  y  $B$  son incompatibles, entonces  $v_n(A + B) = v_n(A) + v_n(B)$ .

6. Si  $A_1, \dots, A_k$  son incompatibles dos a dos, entonces

$$v_n \left( \sum A_i \right) = \sum v_n (A_i).$$

7. Para todos los  $\bar{A} \in \mathfrak{A}$  se tiene  $v_n(\bar{A}) = 1 - v_n(A)$ .

1.2.2. **Axiomas de probabilidad.** Un hecho importante obtenido de modo experimental es la propiedad de la estabilidad de frecuencias. Con el aumento del número de experimentos las frecuencias de los sucesos oscilan alrededor de ciertos números que no dependen del número ni tampoco de la serie de los experimentos, con la particularidad de que las frecuencias van aproximándose indefinidamente hacia dichos números cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es natural ligar estos números con todo suceso que se realiza en un experimento aleatorio. Ellos se denominan **probabilidades** y se determinan de manera completamente axiomática. La existencia de las probabilidades, en la teoría de probabilidades, está postulada, sus propiedades están definidas por los **axiomas de probabilidad** que se dan a conocer más abajo.

I. A todo suceso  $A \in \mathfrak{A}$  le corresponde el número  $P(A)$  que toma los valores de  $[0, 1]$  y se denomina **probabilidad de  $A$** .

II. Si  $A$  y  $B$  son sucesos incompatibles, entonces  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

III.  $P(U) = 1$ , donde  $U$  es un suceso cierto.

Los axiomas mencionados son naturales, si la probabilidad se entiende como el límite de la frecuencia, puesto que para las frecuencias ellos resultan cumplidos (véanse las propiedades 1, 3, 5).

De los axiomas se desprenden las siguientes propiedades:

IV. Si  $V$  es un suceso imposible, entonces  $P(V) = 0$ .

V.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

VI. Cuando  $A \subset B$ ,  $P(A) \leq P(B)$ .

VII. Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son unos sucesos disjuntos dos a dos, entonces

$$P \left( \sum_{i=1}^k A_i \right) = \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

VIII. Para cualesquiera dos sucesos  $A$  y  $B$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

IX. Para cualesquiera sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_k$

$$P \left( \sum_{i=1}^k A_i \right) \leq \sum_{i=1}^k P(A_i).$$

X. Sean  $A_1, \dots, A_n$  ciertos sucesos,  $A_{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}$ . Entonces

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_{ij}) + \dots + \\ + (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} P(A_{i_1 \dots i_k}) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_{12 \dots n}).$$

1.2.3. Definición clásica de la probabilidad. Supongamos que en un experimento se tiene el grupo completo de sucesos elementales:  $E_1, E_2, \dots, E_n$ . Entonces, todo suceso de  $\mathfrak{A}$  tiene la forma

$$A = \sum E_{i_h}, \quad (2.1)$$

donde  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  es cierto subconjunto del conjunto  $(1, 2, \dots, n)$ . Por consiguiente, de acuerdo con la propiedad VII,

$$P(A) = \sum P(E_{i_h}) = \sum_{E_i \subset A} P(E_i).$$

De este modo, la probabilidad en el experimento finito se determina por las probabilidades de los sucesos elementales (resultados).

Rigiéndose por los razonamientos de simetría, para muchos experimentos finitos puede establecerse a priori que los sucesos elementales tienen una misma probabilidad. Entonces, la probabilidad de cada suceso elemental es igual a  $\frac{1}{n}$  ( $n$  es el número de resultados), mientras

que la probabilidad del suceso  $A$  del tipo (2.1) es  $\frac{m}{n}$ . Si los sucesos elementales tienen igual probabilidad, ellos se denominan resultados equiposibles; aquellos de los sucesos que originan la aparición de  $A$ , resultados favorables. Por consiguiente, en este caso  $P(A)$  es igual a la razón entre el número de los resultados favorables y el número de todos los resultados equiposibles.

Al resolver los problemas referentes a la definición clásica de la probabilidad es necesario calcular el número de todos los resultados equiposibles en el experimento y, a continuación, el número de resultados favorables. Corrientemente, esto puede conseguirse mediante los métodos combinatorios.

EJEMPLO  $m$  bolas se colocan dentro de  $n$  cajones ( $m > n$ ). Todas las variaciones son equiposibles. ¿Cuál es la posibilidad de que no haya ningún cajón vacío?

Numeremos los cajones y supongamos que  $m_i$  es la cantidad de bolas en el cajón de número  $i$ . A título de conjunto de sucesos elementales tomemos los grupos de  $n$  números  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , donde  $m_i \geq 0$ , y  $\sum m_i = n$ . El número de sucesos elementales podemos determinarlo así: a todo suceso le pondremos en correspondencia una sucesión de 0 y 1 según la siguiente regla:

$$\underbrace{0 \dots 0}_{m_1} 1 \underbrace{0 \dots 0}_{m_2} 1 \dots 1 \underbrace{0 \dots 0}_{m_n}$$

En esta sucesión hay  $n - 1$  unidades y  $n$  ceros. A cada una de estas sucesiones de 0 y 1 le corresponde el suceso elemental  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ , donde  $m_1$  es el número de ceros hasta la primera unidad,  $m_2$  es el número de ceros entre las unidades primera y segunda, etc. La cantidad de las sucesiones citadas es, evidentemente, igual a  $C_{m+n-1}^{n-1}$ . Con el fin de hallar el número de resultados favorables se debe calcular el número de sucesiones para las cuales  $m_i \geq 1$ . Mas, este número coincide con el de sucesiones  $(m'_1, m'_2, \dots, m'_n)$ , para las cuales  $m'_i \geq 0$  y  $\sum m'_i = n - n$  ( $m'_i = m_i - 1$ ). Quiere decir

que el número de resultados favorables es  $C_{m-1}^{n-1}$ . La probabilidad buscada

$$p = \frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{m+n-1}^{n-1}} = \frac{(m-1)!(n-1)!m!}{(n-1)!(m-n)!(m+n-1)!} = \frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(m+n-1)!}$$

**1.2.4. Probabilidades geométricas.** Estas son las probabilidades en los experimentos con un número infinito de resultados, los cuales se interpretan como la elección al azar de un punto de cierto conjunto en  $R^m$ . Se supone que este conjunto tiene cierta forma geométrica. En calidad de sucesos se consideran los siguientes: el punto elegido pertenece a la parte prefijada de una figura y la probabilidad de tal suceso se determina como razón entre el volumen (área, longitud) euclideo de la parte de la figura y el volumen (área, longitud) de toda esta figura.

**EJEMPLO.** (problema sobre el encuentro). Dos individuos se ponen de acuerdo en entrevistarse en los límites del lapso convenido  $l$ . El individuo primero en llegar espera durante el tiempo  $a < l$ , y después se va. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentren?

Consideremos a título de conjunto de sucesos elementales un cuadrado compuesto de los puntos  $(x, y)$ ,  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq l$ , donde  $x$  e  $y$  es el tiempo de llegada de los individuos primero y segundo. Los resultados favorables forman los puntos para los cuales  $|x - y| < a$ , es decir, los puntos del cuadrado dispuestos entre las rectas  $y = x - a$ ,  $y = x + a$ . Es fácil de calcular que el área de esta figura es  $l^2 - (l - a)^2$ , el área del cuadrado es  $l^2$ , la probabilidad buscada es

$$p = 1 - \frac{(l-a)^2}{l^2}.$$

### 1.3. Definición del espacio probabilístico

**1.3.1.  $\sigma$ -álgebra de sucesos.** En aquellos experimentos aleatorios en los cuales el álgebra de los sucesos contiene un número infinito de sucesos hemos de considerar tanto sucesiones infinitas de sucesos, como las operaciones que se realizan con ellas. Entre dichas operaciones las más sencillas son la unión y la intersección de una sucesión infinita de sucesos. Si el álgebra de sucesos es tal que a la par con cada sucesión infinita de los sucesos  $A_k$  ella contiene también los sucesos  $\bigcap_k A_k$ ,

$\bigcup_k A_k$ , entonces este álgebra lleva el nombre de  $\sigma$ -álgebra. El suceso  $\bigcap_k A_k$  consiste en que todos los sucesos  $A_k$  ocurren simultáneamente; el suceso  $\bigcup_k A_k$  consiste en que de la sucesión de los sucesos  $A_k$  se realiza por lo menos uno.

La sucesión  $A_k$  se denomina monótona decreciente, si  $A_k \supset A_{k+1}$ , y monótona creciente si  $A_k \subset A_{k+1}$  para todo  $k$ . El suceso  $\bigcap_k A_k$  se denomina límite de la sucesión decreciente, mientras que el suceso  $\bigcup_k A_k$  es el límite de la sucesión creciente de sucesos. El límite de la

sucesión monótona (es decir, monótona creciente o monótona decreciente)  $A_k$  se denota  $\lim A_k$ .

Un álgebra de sucesos  $\mathfrak{A}$  será  $\sigma$ -álgebra, si a la par con toda sucesión monótona ella contiene también el límite de ésta.

Si la probabilidad está definida en cierta  $\sigma$ -álgebra, se supone que ésta satisface un axioma más, el cual generaliza el axioma 11 (p. 1.2.2). Este axioma lleva el nombre de axioma ampliado de adición:

11'. Si  $A_k$  es una sucesión de los sucesos incompatibles dos a dos, entonces

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k).$$

Este axioma es equivalente al siguiente axioma de continuidad: para toda sucesión monótona  $A_k$  se verifica

$$P(\lim A_k) = \lim P(A_k).$$

1.3.2. Espacio probabilístico. Se denomina espacio probabilístico (campo de probabilidades) una totalidad de tres objetos: un espacio de sucesos elementales  $\Omega$ , la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  de subconjuntos del espacio  $\Omega$  que es la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos, una medida  $P(A)$ , definida para  $A \in \mathfrak{A}$ , para la cual  $P(\Omega) = 1$ , llamada probabilidad. El espacio probabilístico que se determina por los objetos citados se designa  $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ .

Se denomina medida en la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos  $\mathfrak{A}$  una función del conjunto  $P(A)$  no negativa numérico-aditiva, es decir, una función tal, para la cual

$$P(\bigcup_k A_k) = \sum_k P(A_k),$$

cualquiera que sea la sucesión de los conjuntos  $A_k$  de  $\mathfrak{A}$ , disjuntos dos a dos.

Si es que  $P(\Omega) = 1$ , la medida se llama normada.

El nombre de espacio medible lo lleva un par de objetos: cierto conjunto  $\Omega$  y cierta  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos  $\mathfrak{A}$ ; se denota con el símbolo  $\{\Omega, \mathfrak{A}\}$ . Así pues, el espacio probabilístico es un espacio medible dotado de una medida normada.

Si  $\Omega$  contiene a lo sumo un número numerable de elementos y  $\mathfrak{A}$  es un conjunto de todos los subconjuntos  $\Omega$ , entonces la probabilidad se determina por completo mediante sus valores en los sucesos elementales. Supongamos que  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ ,  $P(\{\omega_h\}) = p_h$ ,  $\{\omega_h\}$  es el conjunto de un punto que contiene  $\omega_h$ . Entonces

$$P(A) = \sum p_h \chi_A(\omega_h),$$

donde  $\chi_A(\omega) = 1$ , cuando  $\omega \in A$ ;  $\chi_A(\omega) = 0$ , cuando  $\omega \notin A$ , es decir,  $\chi_A(\omega)$  es el indicador del suceso  $A$ . Los espacios probabilísticos del tipo descrito se denominan discretos.

Otro ejemplo importante del espacio probabilístico es un espacio probabilístico para el cual  $\Omega$  coincide con el espacio euclideo  $m$ -dimensional  $R^m$ . Será natural considerar tal espacio de resultados en aquellos experimentos, en los cuales se observan los valores de  $m$  magnitudes reales. Designaremos con  $(x^1, x^2, \dots, x^m)$  las coordenadas del punto  $\bar{x} \in R^m$ . En calidad de  $\mathfrak{A}$  tomemos una  $\sigma$ -álgebra que

contiene los conjuntos de puntos del tipo

$$\{\bar{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}, \quad (3.1)$$

donde  $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$  son números reales. Tales conjuntos llevan el nombre de paralelepípedos semiabiertos a la derecha. Las sumas finitas de paralelepípedos semiabiertos a la derecha forman el álgebra  $\mathfrak{U}_0$  en  $R^m$ . La mínima  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$ , que contiene el álgebra  $\mathfrak{U}_0$ , coincide con la mínima  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos que contienen todos los conjuntos abiertos y cerrados de  $R^m$ . Esta  $\sigma$ -álgebra se denomina boreliana (de Borel) y los conjuntos de  $\mathfrak{A}$ , borelianos.

Todo conjunto de  $\mathfrak{U}$  se obtiene por medio del paso límite aplicado a lo sumo un número numerable de veces a los conjuntos de  $\mathfrak{U}_0$ . Por ello, para definir una probabilidad en  $\mathfrak{A}$  (tomando en consideración el axioma de continuidad) será suficiente profijarla en  $\mathfrak{U}_0$ . Puesto que los conjuntos de  $\mathfrak{U}_0$  pueden ser representados en forma de una suma de paralelepípedos semiabiertos disjuntos dos a dos, resulta suficiente determinar la medida en los conjuntos del tipo (3.1).

1.3.3. Funciones de distribución. Sea

$$G(b_1, \dots, b_m) = P(\bar{x} : -\infty \leq x^1 < b_1, \dots, -\infty \leq x^m < b_m). \quad (3.2)$$

Designemos con  $\Delta_{[a, b]}^{(k)}$   $G(x^1, \dots, x^m) - G(x^1, \dots, x^{k-1}, b, x^{k+1}, \dots, x^m) - G(x^1, \dots, x^{k-1}, a, x^{k+1}, \dots, x^m)$  el incremento de la función  $G(x^1, \dots, x^m)$  respecto al  $k$ -ésimo argumento en el intervalo  $[a, b]$ . Entonces, será lícita la fórmula

$$P(\bar{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m) = \\ = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m). \quad (3.3)$$

De este modo, toda medida en el espacio medible  $\{R^m, \mathfrak{A}\}$  se determina unívocamente por la función  $G(x^1, \dots, x^m)$  del tipo (3.2). Para que la medida correspondiente sea normada es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$I. \quad \lim_{x^1 \rightarrow \infty, \dots, x^m \rightarrow \infty} G(x^1, \dots, x^m) = 1.$$

Indiquemos, además, algunas condiciones a las cuales necesariamente satisface  $G$ . Del axioma de continuidad se deduce que

$$II. \quad \lim_{x^k \rightarrow \infty} G(x^1, \dots, x^m) = 0 \text{ para todo } k = 1, \dots, m.$$

III.  $\lim_{x^1 \uparrow b_1, \dots, x^m \uparrow b_m} G(x^1, \dots, x^m) = G(b_1, \dots, b_m)$ , cualesquiera que sean  $b_1, \dots, b_m$ , es decir, la función  $G(x^1, \dots, x^m)$  es continua por la totalidad de los argumentos a la izquierda.

De (3.3) proviene

$$IV. \quad \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} G(x^1, \dots, x^m) \geq 0.$$

La función  $G(x^1, \dots, x^m)$ , que satisface las condiciones I—IV, se llama función de distribución  $m$ -dimensional. Cuando  $m = 1$ , estas condiciones se reducen a lo siguiente: la función de distribución unidimensional es tal función  $F(x)$ , no decreciente y continua a la

izquierda, que está definida en  $R^1$  y satisface las condiciones

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

A toda función de distribución  $m$ -dimensional le corresponde la única medida probabilística en  $\{R^m, \mathfrak{A}\}$ .

#### 1.4. Magnitudes aleatorias

**1.4.1. Definición de la magnitud aleatoria.** Las magnitudes aleatorias son aquellas que se miden en los experimentos aleatorios. Una magnitud aleatoria se considera definida por completo, si se conoce el resultado del experimento  $\omega$ . Así pues, la magnitud aleatoria  $\xi$  en el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ , que describe el experimento aleatorio dado, es una función  $\xi(\omega)$  de un suceso aleatorio. El hecho de que en nuestro experimento podemos medir esta magnitud significa que se puede observar el suceso: el valor de la magnitud  $\xi$  pertenece al intervalo dado  $\Delta$ , cualquiera que sea este intervalo. Quiero decir:

$$\{\omega: \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathfrak{A}. \quad (4.1)$$

Las funciones  $\xi(\omega)$  que para todos los intervalos  $\Delta$  satisfacen la condición (4.1), se denominan medibles respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  ó  $\mathfrak{A}$ -medibles.

Se denomina magnitud aleatoria en el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$  toda función  $\mathfrak{A}$ -medible  $\xi(\omega)$  definida en  $\Omega$ . En las designaciones de magnitudes aleatorias en lugar de  $\xi(\omega)$  se escribe con frecuencia simplemente  $\xi$ , omitiéndose la indicación de que la magnitud depende del suceso elemental.

De ejemplo más simple de magnitud aleatoria sirve  $\chi_A(\omega)$ , es decir, el indicador del suceso  $A$ ;  $\chi_A(\omega) = 1$  cuando  $\omega \in A$ ;  $\chi_A(\omega) = 0$ , si  $\omega \notin A$ .

Otro ejemplo de magnitud aleatoria es una magnitud aleatoria discreta que toma a lo sumo un conjunto numerable de varios valores. Supongamos que estos valores son  $\{x_1, x_2, \dots\}$ . Es evidente que los sucesos  $\{\xi(\omega) = x_i\} = A_i$  son incompatibles dos a dos y  $\bigcup_i A_i = \Omega$ .

Sea

$$P(A_i) = P\{\xi(\omega) = x_i\} = P\{\xi = x_i\} = p_i.$$

El juego de las probabilidades  $\{p_i\}$  y de los números  $\{x_i\}$  se denomina distribución de la magnitud discreta  $\xi$ . Ella determina la probabilidad de que la magnitud  $\xi$  caiga en cualquier conjunto  $\Delta$  en la recta:

$$P\{\xi \in \Delta\} = \sum_{x_i \in \Delta} p_i.$$

**1.4.2. Distribución de una magnitud aleatoria.** El nombre de distribución de una magnitud aleatoria  $\xi$  se atribuye a la medida

$$P_\xi(\Lambda) = P\{\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\}\}, \quad (4.2)$$

definida en la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos  $R^1$ . De (4.1) se desprende que para todos los  $\Lambda$  borelianos

$$\{\omega: \xi(\omega) \in \Lambda\} \in \mathfrak{A},$$

por lo cual el segundo miembro de (4.2) está definido.

Según se deduce de los resultados del p. 1.3, para definir la distribución de la magnitud  $\xi$  es suficiente fijar la función

$$F_{\xi}(x) = P_{\xi}((-\infty, x]) = P\{\xi \leq x\},$$

que se denomina función de distribución de la magnitud  $\xi$  y es una función de distribución unidimensional.

Si  $\xi$  es una magnitud discreta para la cual  $P\{\xi = x_i\} = p_i$ , entonces

$$F_{\xi}(x) = \sum_{x_j < x} p_j = \sum_i p_i e(x - x_i),$$

donde  $e(x) = 1$ , si  $x > 0$ ;  $e(x) = 0$ , si  $x \leq 0$ . Designemos mediante  $F_{\xi}(x+0)$  el límite a la derecha de  $F_{\xi}(x)$  en el punto  $x$ . La magnitud del salto de la función de distribución  $F_{\xi}(x+0) - F_{\xi}(x)$  coincide con la probabilidad  $P\{\xi = x\}$ . Se dice que  $\xi$  tiene distribución continua, si  $F_{\xi}(x)$  es una función continua. En este caso cualquier valor fijado  $\xi$  puede tomar sólo con la probabilidad 0. La magnitud  $\xi$  tiene distribución absolutamente continua, si existe una función  $f_{\xi}(x)$  tal que

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt. \quad (4.3)$$

Una función  $f_{\xi}(x)$  que satisface la correlación (4.3) se denomina densidad de distribución de la magnitud  $\xi$ . Si  $\xi$  tiene densidad de distribución, entonces su distribución se expresará mediante la fórmula

$$P_{\xi}(A) = \int_A f_{\xi}(t) dt \quad (4.4)$$

(la integral en (4.4) se entiende como la integral de Lebesgue). En particular,

$$P_{\xi}((a, b)) = \int_a^b f_{\xi}(t) dt = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a).$$

La densidad de distribución satisface las siguientes dos condiciones evidentes:

a)  $f_{\xi}(t) \geq 0$  casi para todos los  $t$ ;

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(t) dt = 1$ .

Toda función  $f_{\xi}(t)$ , medible según Lebesgue, que satisface las condiciones a) y b) puede intervenir en calidad de densidad de cierta magnitud aleatoria. Demos a conocer unos ejemplos de las densidades de distribución.



**EJEMPLO 1.** La densidad de la magnitud  $\xi$  distribuida uniformemente en  $[a, b]$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

**EJEMPLO 2** La densidad de distribución exponencial

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

**EJEMPLO 3.** La densidad de distribución normal

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{x^2}{2b}}.$$

La magnitud  $\xi$  tiene una distribución reticular, si es discreta y todos sus posibles valores tienen la forma  $a + kh$ ,  $k = 0, \pm 1, \dots$ . La magnitud  $h$  se denomina **paso de la distribución**. El máximo  $h$ , para el cual con cierto  $a$

$$\sum_h \mathbf{P}\{\xi = a + kh\} = 1,$$

existe, siempre que  $\xi$  tome con la probabilidad positiva por lo menos dos valores. Tal  $h$  se llama **paso máximo de la distribución**. Si los valores posibles de  $\xi$  son iguales a  $a + kh$ , entonces  $h = dh$ , donde  $d$  es el máximo común divisor de tales diferencias  $k_1 - k_2$ , para las cuales  $\mathbf{P}\{\xi = a + k_1 h\} > 0$  y  $\mathbf{P}\{\xi = a + k_2 h\} > 0$ . Entre las magnitudes reticulares se distingue una clase importante de **magnitudes de valores enteros**, para las cuales

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi = k\} = 1.$$

He aquí unos ejemplos. Denotaremos  $p_k = \mathbf{P}\{\xi = k\}$ .

**EJEMPLO 4** La magnitud  $\xi$  tiene una distribución binomial, si para cierto  $0 < a < 1$ ,  $n > 0$ ,

$$p_k = 0, \quad k < 0; \quad p_k = C_n^k a^k (1-a)^{n-k}, \quad k \leq n; \quad p_k = 0, \quad k > n.$$

**EJEMPLO 5** La magnitud  $\xi$  tiene una distribución geométrica, si para cierto  $0 < a < 1$

$$p_k = 0, \quad k < 0; \quad p_k = a^k (1-a), \quad k \geq 0.$$

**EJEMPLO 6** La magnitud  $\xi$  tiene una distribución de Poisson, si para cierto  $a > 0$

$$p_k = 0, \quad k < 0; \quad p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad k \geq 0.$$

## 1.5. Grupos de magnitudes aleatorias

1.5.1. Distribución conjunta de magnitudes aleatorias. Supongamos que en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{G}, P)$  están dadas  $m$  magnitudes aleatorias:  $\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)$ . En este caso para todos los  $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$  se verifica

$$\begin{aligned} \{\omega : a_1 \leq \xi_1(\omega) < b_1, \dots, a_m \leq \xi_m(\omega) < b_m\} = \\ = \prod_{k=1}^m \{\omega : a_k \leq \xi_k(\omega) < b_k\} \in \mathfrak{G}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Designemos mediante  $(\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega))$  un punto en  $R^m$  de coordenadas  $\xi_k(\omega)$ , y mediante  $\Delta$ , un paralelepípedo semiabierto en  $R^m$ :

$$\Delta = \{\bar{x} : a_1 \leq x^1 < b_1, \dots, a_m \leq x^m < b_m\}.$$

La correlación (5.1) puede escribirse de la forma:

$$\{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in \Delta\} \in \mathfrak{G}. \quad (5.2)$$

Haciendo uso de (5.2) y de las igualdades

$$\begin{aligned} \bigcap_k \{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in \bigcap_k B_k\}; \\ \supset_k \{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in B_k\} &= \{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in \bigcup_k B_k\}, \end{aligned}$$

que son válidas para cualquier sucesión de conjuntos de  $R^m$ , llegamos a que (5.2) es lícita, si  $\Delta$  es un conjunto arbitrario boreliano de  $R^m$ .

La medida  $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$ , definida en los conjuntos borelianos mediante la correlación

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = P(\{\omega : (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega)) \in B\}), \quad (5.3)$$

se denomina **distribución conjunta de las magnitudes**  $\xi_1, \dots, \xi_m$  o del vector aleatorio  $\bar{\xi} = (\xi_1(\omega), \dots, \xi_m(\omega))$  en  $R^m$ . Como se ha indicado en el p. 1.3, para fijar la medida  $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$  es suficiente fijar la función

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) &= P(\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \dots, \xi_m(\omega) < x_m\}) = \\ &= P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_m < x_m\}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

la cual se llama **función conjunta de distribución de las magnitudes**  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Esta es una función de distribución  $m$ -dimensional y, por lo tanto, satisface las condiciones I—IV. Conociendo la función conjunta de distribución de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , podemos determinar también la función conjunta de distribución de las magnitudes  $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}$ , donde  $0 < i_1 < \dots < i_m \leq m$ .

$$F_{\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}) = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \Big|_{\substack{j=1 \\ j \neq i_1, \dots, i_m}}^{j=m} \quad (5.5)$$

(por  $F(+\infty)$  se comprende  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ). La correlación (5.5) se deduce directamente de (5.4), puesto que  $\{\xi_j < +\infty\}$  es un suceso

cierto. Las funciones conjuntas de distribución de un subconjunto de magnitudes aleatorias que se obtienen de la función de distribución de todas las magnitudes llevan el nombre de funciones marginales (parciales) de distribución (la fórmula (5.5) determina las distribuciones marginales  $k$ -dimensionales). En particular, conociendo  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}$ , hallamos también las funciones de distribución de las magnitudes  $\xi_k$ :

$$F_{\xi_k}(x) = P_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\overbrace{+\infty, \dots, +\infty, x, +\infty, \dots, +\infty}^k).$$

**1.5.2. Distribuciones discretas y continuas.** Si cada una de las magnitudes  $\xi_k$  tiene una distribución discreta, se dice que el vector aleatorio  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  también tiene distribución discreta (o que la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  es discreta). Supongamos que  $\xi_k$  toma los valores  $\{y_{1k}^h, y_{2k}^h, \dots\}$ . Entonces, la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  se determina por las probabilidades

$$P_{i_1, \dots, i_m} = P\{\xi_1 = y_{i_1}^1, \xi_2 = y_{i_2}^2, \dots, \xi_m = y_{i_m}^m\}.$$

Una medida que define la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , se prefija en este caso mediante la igualdad

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \sum_{i_1, \dots, i_m} P_{i_1, \dots, i_m} \chi_B(y_{i_1}^1, \dots, y_{i_m}^m),$$

donde  $\chi_B(y^1, \dots, y^m) = 1$ , si  $(y^1, \dots, y^m) \in B$ ,  $\chi_B(y^1, \dots, y^m) = 0$ , si  $(y^1, \dots, y^m) \notin B$ ;  $(y^1, \dots, y^m)$  es un punto en  $R^m$  de coordenadas  $y^i$ . La función conjunta de distribución se define por la fórmula

$$P_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{y_{i_1}^1, x_1, \dots, y_{i_m}^m, x_m} P_{i_1, \dots, i_m}.$$

Como ejemplo de distribución discreta  $m$ -dimensional sirve la distribución multinomial  $m$ -dimensional. Los magnitudes  $\xi_k$  son de números enteros con la particularidad de que para ciertas  $p_i \geq 0$ ,

$i = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$  tiene lugar la igualdad

$$P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_m = i_m\} = \begin{cases} \frac{n!}{i_1! \dots i_m!} p_1^{i_1} \dots p_m^{i_m}, & \text{si } i_k \geq 0; k=1, \dots, m, i_1 + \dots + i_m = n; \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  tienen distribución conjunta absolutamente continua, si existe tal función medible según Lebesgue  $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$  que la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  se determina según la fórmula

$$\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(B) = \int_B \dots \int f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$$

(en el segundo miembro figura la integral de Lebesgue  $m$ -múltiple). Entonces, la función  $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$  recibe el nombre de densidad conjunta de distribución de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . La función conjunta de distribución se expresará en términos de la densidad conjunta según la fórmula

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m.$$

De esta correlación se desprende la siguiente fórmula para la densidad:

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Señalemos que la existencia de la derivada que se encuentra en el segundo miembro de la última igualdad no asegura todavía para casi todos  $x_1, \dots, x_m$  la existencia de densidad. Para que ésta exista es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial x_1 \dots \partial x_m} F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1.$$

Son evidentes las siguientes dos propiedades de la densidad conjunta:

a)  $f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \geq 0$  para casi todos  $x_1, \dots, x_m$ ;

b)  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m = 1$ .

Toda función  $g(x_1, \dots, x_m)$ , medible según Lebesgue, que satisface las condiciones a) y b) puede intervenir en calidad de densidad conjunta de ciertas  $m$  magnitudes aleatorias y se denomina densidad  $m$ -dimensional.

Al integrar la densidad respecto a ciertos argumentos  $x_j$ ,  $j \neq i_1, \dots, i_h$ , de  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , obtendremos la densidad de distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_h}$ . En particular,

$$f_{i_h}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_{h-1}, x, (x_{h+1}, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_{h-1} dx_{h+1} \dots dx_m.$$

He aquí dos ejemplos importantes de las densidades  $m$ -dimensionales.  
**EJEMPLO 1.** Un vector aleatorio  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  está uniformemente distribuido dentro del conjunto medible acotado  $G \subset R^m$ , si

la densidad conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  tiene la forma

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes } G}, & (x_1, \dots, x_m) \in G; \\ 0, & (x_1, \dots, x_m) \notin G, \end{cases}$$

donde  $\text{mes } G$  es la medida de Lebesgue  $G$  en  $R^m$ .

**EJEMPLO 2** Un vector aleatorio  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  tiene distribución normal no degenerada, si existen los números  $a_1, \dots, a_m$  y la matriz  $C = \|C_{ij}\|$ , simétrica, no degenerada y definida de modo no negativo, tales que la densidad de distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  tiene por expresión

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [\det C]^{1/2} \exp \times \\ \times \left\{ \sum_{i,j=1}^m C_{ij} (x_i - a_i) (x_j - a_j) \right\}.$$

**1.5.3. Funciones de las magnitudes aleatorias.** Conociendo la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , podemos definir la función de distribución de cierta función de dichas magnitudes aleatorias:  $g(\xi_1, \dots, \xi_m)$ , donde  $g(x_1, \dots, x_m)$  es una función boreliana definida en  $R^m$ , es decir, una función medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos en  $R^m$ . Sea  $\eta = g(\xi_1, \dots, \xi_m)$ , entonces

$$F_{\eta}(x) = P\{\eta < x\} = \int_{g(x^1, \dots, x^m) < x} \dots \int \mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(d\bar{x})$$

(aquí,  $\bar{x} = (x^1, \dots, x^m)$ ) es la variable de integración en  $R^m$ ; la integral es de Lebesgue respecto a la medida  $\mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}$  y se calcula en el dominio  $\{\bar{x} : g(x^1, \dots, x^m) < x\}$  que representa un subconjunto boreliano en  $R^m$ ).

Supongamos que  $g(x_1, \dots, x_m)$  es una función diferenciable y

$$|\text{grad } g(x_1, \dots, x_m)| = \sqrt{\sum_{h=1}^m \left( \frac{\partial g}{\partial x_h}(x_1, \dots, x_m) \right)^2} > 0.$$

Si es que existe la densidad conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , entonces la magnitud  $\eta$  también tiene densidad que se determina según la fórmula

$$f_{\eta}(x) = \int_{g(x_1, \dots, x_m) = x} \dots \int f(x_1, \dots, x_m) \frac{dS_{m-1}}{|\text{grad } g(x_1, \dots, x_m)|},$$

en la cual la integral en el segundo miembro es una integral superficial extendida por la superficie  $(m-1)$ -dimensional en  $R^m$  fijada por la ecuación  $g(x_1, \dots, x_m) = x$ .

Sean  $g_1(x_1, \dots, x_m)$ ,  $g_2(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m)$  unas funciones de Borel definidas en  $R^m$ . Hagamos  $\eta_i = g_i(\xi_1, \dots,$

$\dots, \xi_m$ ). En este caso, la distribución conjunta de las magnitudes  $\eta_1, \dots, \eta_h$  se determinará por la fórmula

$$\mu_{\eta_1, \dots, \eta_h}(C) = \int \dots \int_{(g_1(x^1, \dots, x^m), \dots, g_h(x^1, \dots, x^m)) \in C} \times \\ \times \mu_{\xi_1, \dots, \xi_m}(\bar{d}\bar{x})$$

para el conjunto boreliano  $C \subseteq R^h$ ; la integral en el segundo miembro se toma por el conjunto  $\{\bar{x} : \bar{g}(\bar{x}) \in C\}$ , donde  $\bar{g} = (g_1, \dots, g_h)$  son los puntos en  $R^h$  de coordenadas  $g_1, \dots, g_h$ .

Supongamos que las funciones  $g_1, \dots, g_h$  ( $k < m$ ) son diferenciables y existe una densidad de distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ . Entonces la densidad de distribución conjunta de las magnitudes  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_h$  se expresa mediante la fórmula

$$f_{\eta_1, \dots, \eta_h}(y_1, \dots, y_h) = \\ = \int \dots \int_{\substack{g_1(x_1, \dots, x_m) = y_1 \\ \vdots \\ g_h(x_1, \dots, x_m) = y_h}}^{m-k} f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) \times \\ \times \frac{dS_{m-k}}{\left( \sum_{i_1=1, 2, \dots, k} \left| \frac{D(x_{i_1}, \dots, g_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} \right|^2 \right)^{1/2}}$$

La integral en el segundo miembro es superficial y se extiende por la superficie de dimensión  $m-k$  que se determina por el sistema de ecuaciones:  $g_1(x_1, \dots, x_m) = y_1; g_h(x_1, \dots, x_m) = y_h$ , mientras que

$$\frac{D(g_1, \dots, g_k)}{D(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_1}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{i_k}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_{i_1}} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_{i_k}} \end{vmatrix}$$

es un jacobiano de las funciones  $g_1, \dots, g_k$  respecto de las variables  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ .

Consideremos las distribuciones de las funciones más sencillas de un par de magnitudes aleatorias.

**Distribución de la suma (diferencia) de dos magnitudes.** La función de distribución de una suma (diferencia) se da mediante la fórmula

$$F_{\xi_1 \pm \xi_2}(x) = \int \int_{x_1 \pm x_2 \leq x} f_{\xi_1, \xi_2}(dx^1, dx^2).$$

Si existe  $f_{\xi_1, \xi_2}$ , entonces

$$f_{\xi_1 \pm \xi_2}(x) = \int f_{\xi_1, \xi_2}(x \mp y, y) dy.$$

Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son unas magnitudes discretas de valor entero y  $p_{kj} = P\{\xi_1 = k, \xi_2 = j\}$ , entonces

$$P\{\xi_1 \pm \xi_2 = l\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_{l \mp k k}.$$

Distribución del producto de dos magnitudes. La función de distribución de un producto se da mediante la fórmula

$$F_{\xi_1 \xi_2}(x) = \iint_{x^1 x^2 < x} \mu_{\xi_1, \xi_2}(dx^1, dx^2).$$

Si existe  $f_{\xi_1, \xi_2}$ , entonces

$$f_{\xi_1 \xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}\left(t, \frac{x}{t}\right) \frac{dt}{|t|}.$$

Distribución de la razón de dos magnitudes. La función de distribución de una razón se da mediante la fórmula

$$F_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int_{x^1/x^2 < x} \mu_{\xi_1, \xi_2}(dx^1, dx^2).$$

Si existe  $f_{\xi_1/\xi_2}$ , entonces

$$f_{\xi_1/\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}\left(t, \frac{t}{x}\right) \frac{|t| dt}{x^2}.$$

## 1.6. Esperanza matemática

1.6.1. Esperanza matemática de una magnitud discreta. Supongamos que en un experimento aleatorio se observa cierta magnitud aleatoria  $\xi$ , que puede tomar un número finito de valores  $a_1, \dots, a_N$  con las probabilidades correspondientes  $p_1, \dots, p_N$ . Si  $x_1, \dots, x_n$  son las observaciones de la magnitud en  $n$  realizaciones sucesivas del experimento, el valor medio de las magnitudes observadas puede presentarse en la forma

$$\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \sum_{k=1}^n a_k v_n(A_k),$$

donde  $A_k$  son los sucesos  $\{\xi = a_k\}$  y  $v_n$  es la frecuencia del suceso. Al sustituir las frecuencias por las probabilidades, obtendremos la

expresión

$$M\xi = \sum_{k=1}^N a_k p_k,$$

que se denomina **media probabilística** o bien **esperanza matemática** de la magnitud aleatoria  $\xi$ .

Si  $\xi$  es una magnitud discreta arbitraria que toma los valores  $a_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  con las probabilidades  $p_k$ , entonces la expresión

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_k$$

recibe el nombre de **esperanza matemática** de dicha magnitud, siempre que la serie en el segundo miembro converge absolutamente. Demos a conocer algunas propiedades de la esperanza matemática de una magnitud discreta.

I. Si existen  $M\xi_1$  y  $M\xi_2$ , existirá  $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$ .

II.  $M(\lambda\xi) = \lambda M\xi$  para cualquier  $\lambda$ , siempre que  $M\xi$  exista.

III. Si  $P\{\xi_1 = \xi_2\} = 1$ , entonces  $M\xi_1 = M\xi_2$  (siempre que las esperanzas matemáticas existan).

IV.  $M\xi \geq 0$ , si  $\xi \geq 0$ , y  $M\xi$  existe.

V. Si  $P\{\xi = c\} = 1$ , entonces  $M\xi = c$ .

1.6.2. **Esperanza matemática de una magnitud arbitraria.** Con el objeto de hallar la esperanza matemática de una magnitud aleatoria arbitraria  $\xi$  introduzcamos una sucesión de magnitudes aleatorias discretas  $\xi_n$  determinadas mediante la igualdad  $\xi_n = \frac{k}{n}$ , si  $\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n = 1, 2, \dots$ . Es evidente que  $|\xi_n - \xi| \leq \frac{1}{n}$ . Si  $M\xi_n$  existe para cierto  $n$ , existirá para todos los  $n$ , y, además, existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\right\}.$$

Este límite se llama **esperanza matemática** de la magnitud  $\xi$  y se denota por  $M\xi$ . La esperanza matemática definida del modo indicado conserva las propiedades I—V. Si  $\xi$  es una magnitud aleatoria no negativa,  $M\xi$  siempre se considera determinada o igual a  $+\infty$  en el caso cuando la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \leq \xi < \frac{k+1}{n}\right\} \text{ diverge.}$$

1.6.3. **Fórmulas para calcular la esperanza matemática.** Si  $F_\xi(x)$  es una función de distribución de la magnitud  $\xi$ , entonces

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x), \text{ cuando } \int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_\xi(x) < \infty$$



(las integrales en el segundo miembro son de Stieltjes y se calculan como los límites de las sumas integrales). Si existe la densidad  $f_{\xi}(x)$  de la magnitud  $\xi$ , entonces

$$M_{\xi}^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_{\xi}(x) dx, \text{ cuando } \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k f_{\xi}(x) dx < \infty.$$

Dada la magnitud  $\xi = \xi(\omega)$  en el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ , su esperanza matemática puede calcularse con ayuda de la integral de Lebesgue respecto de la medida  $P$ :

$$M_{\xi}(\omega) = \int \xi(\omega) P(d\omega),$$

a condición de que la integral en el segundo miembro existe.

Sean  $\xi_1, \dots, \xi_m$  magnitudes aleatorias y  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ , su función conjunta de distribución, mientras que  $g(x_1, \dots, x_m)$  es cierta función boreliana. En este caso

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m),$$

siempre que la integral en el segundo miembro converja absolutamente (se entiende como una integral de Lebesgue—Stieltjes  $m$ -múltiple); si  $g$  es una función continua, puede calcularse como la integral de Riemann—Stieltjes. En el caso de que exista la densidad conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$ , la fórmula antecedente toma la forma

$$Mg(\xi_1, \dots, \xi_m) = \int \dots \int g(x_1, \dots, x_m) f_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m,$$

siempre que la integral de Lebesgue  $m$ -múltiple en el segundo miembro converja absolutamente.

1.6.4. Momentos de las magnitudes aleatorias. La magnitud

$$M_{\xi}^k = \int x^k dF_{\xi}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

se denomina  $k$ -ésimo momento de la magnitud  $\xi$  (si dicha esperanza matemática existe). El  $k$ -ésimo momento de la magnitud  $\xi - M_{\xi}$  se llama  $k$ -ésimo momento central. Este último se calcula mediante la fórmula

$$M(\xi - M_{\xi})^k = \int (x - M_{\xi})^k dF_{\xi}(x).$$

El  $k$ -ésimo momento de la magnitud aleatoria  $|\xi|$  se llama  $k$ -ésimo momento absoluto de la magnitud  $\xi$ .

Un papel peculiar pertenece al segundo momento central que se denomina *varianza* de la magnitud y se denota por  $D_{\xi}$ :

$$D_{\xi} = M(\xi - M_{\xi})^2 = M_{\xi}^2 - (M_{\xi})^2 = \int (x - M_{\xi})^2 dF_{\xi}(x) = \int x^2 dF_{\xi}(x) - \left( \int x dF_{\xi}(x) \right)^2.$$

Para las magnitudes absolutamente continuas la varianza se calcula según la fórmula

$$D\xi = \int (x - M\xi)^2 f_{\xi}(x) dx = \int x^2 f_{\xi}(x) dx - \left( \int x f_{\xi}(x) dx \right)^2.$$

Para la magnitud discreta  $\xi$  que toma los valores  $a_h$  con las probabilidades  $p_h$

$$D\xi = \sum_h a_h^2 p_h - \left( \sum_h a_h p_h \right)^2.$$

Hemos de notar que  $D\xi$  está siempre definida, si está definido  $M\xi$ ; no obstante puede adquirir el valor  $+\infty$ .

La magnitud  $\sigma = \sqrt{D\xi}$  recibe el nombre de desviación estándar de la magnitud  $\xi$ .

Señalemos una propiedad importante de la magnitud  $D\xi$ ; si  $D\xi = 0$ , entonces  $P\{\xi = M\xi\} = 1$ , es decir, en este caso la magnitud  $\xi$  con la probabilidad 1 es constante.

Sean  $\xi_1, \dots, \xi_m$  magnitudes aleatorias dadas con la función de distribución conjunta  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m)$ . Las magnitudes

$$\begin{aligned} m_{\xi_1, \dots, \xi_m}(k_1, \dots, k_m) &= \\ &= \int \dots \int x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dF_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) = M\xi_1^{k_1} \dots \xi_m^{k_m}, \end{aligned}$$

donde  $k_1, \dots, k_m \geq 0$ ,  $k_1 + \dots + k_m = k$ , se denominan momentos mixtos de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  de orden  $k$ . Entre los momentos mixtos un papel especial desempeñan los momentos mixtos de segundo orden. La magnitud

$$M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \text{cov}_A(\xi, \eta)$$

se denomina covariación de las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$ . La magnitud

$$r_{\xi, \eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}$$

se llama coeficiente de correlación de las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$ . He aquí algunas de las propiedades del coeficiente de correlación.

$$1. \quad -1 \leq r_{\xi, \eta} \leq 1.$$

2. Si  $|r_{\xi, \eta}| = 1$ , entonces con la probabilidad 1 se verifica la correlación

$$\eta = r_{\xi, \eta} \sqrt{\frac{D\eta}{D\xi}} (\xi - M\xi) + M\eta$$

(es decir, en este caso  $\xi$  y  $\eta$  están asociadas mediante una correlación lineal). Por esta razón,  $r_{\xi, \eta}$  puede considerarse como una medida de dependencia lineal de las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$ . Si las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$  son de tal índole que  $r_{\xi, \eta} = 0$ , se llamarán **independientes**.

Supongamos que  $\xi_1, \dots, \xi_m$  son independientes dos a dos. Entonces,

$$D \sum_{h=1}^m \xi_h = \sum_{h=1}^m D\xi_h.$$

Si  $\xi_1, \dots, \xi_m$  son magnitudes aleatorias para las cuales  $M\xi_i^2 < \infty$ ,  $i = 1, \dots, m$ , entonces la matriz

$$R = \| b_{ij} \|_{i,j=1,m}, \text{ donde } b_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j), \text{ se}$$

denomina covariante (de correlación) para las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  (el vector  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ). La matriz de correlación está positivamente determinada, es decir, para cualesquiera magnitudes complejas  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  se cumple la desigualdad

$$\sum_{i,j=1}^m b_{ij} \alpha_i \bar{\alpha}_j \geq 0,$$

donde  $\alpha$  es un número complejo conjugado de  $\alpha$ .

Calculemos las esperanzas matemáticas y las varianzas para ciertas magnitudes aleatorias que tienen distribuciones discretas y absolutamente continuas.

a)  $\xi$  es una magnitud de valor entero, uniformemente distribuida en  $[0, N]$ :  $P\{\xi = k\} = \frac{1}{N+1}$  para  $k = 0, 1, \dots, N$ ,

$$M\xi = \sum_{k=0}^N k \frac{1}{N+1} = \frac{N}{2};$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^N k^2 \frac{1}{N+1} - \left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{12} + \frac{N}{6}.$$

b)  $\xi$  tiene distribución binomial:  $P\{\xi = k\} = C_N^k a^k (1-a)^{N-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $0 < a < 1$ ,

$$M\xi = \sum_{k=0}^N k C_N^k a^k (1-a)^{N-k} = Na;$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^N k^2 C_N^k a^k (1-a)^{N-k} - N^2 a^2 = Na(1-a);$$

c)  $\xi$  tiene distribución geométrica:  $P\{\xi = k\} = (1-a)a^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ;  $0 < a < 1$ ,

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k (1-a)a^k = \frac{a}{1-a};$$

$$D\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-a)a^k - \left(\frac{a}{1-a}\right)^2 = \frac{a+a^2}{(1-a)^3} - \frac{a^2}{(1-a)^2} = \frac{a+a^2}{(1-a)^3};$$

d)  $\xi$  tiene distribución de Poisson:  $P\left\{\frac{\xi}{\xi} = k\right\} = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ ;  $a > 0$ ,

$$M_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a;$$

$$D_{\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} - a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{a^k}{k!} e^{-a} - a^2 = a;$$

e)  $\xi$  tiene distribución uniforme en  $[a, b]$ :

$$M_{\xi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{b+a}{2};$$

$$D_{\xi} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{12}\right)^2;$$

f)  $\xi$  tiene distribución exponencial:  $f_{\xi}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $x > 0$ ,  $f_{\xi}(x) = 0$ ,  $x \leq 0$ ,

$$M_{\xi} = \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda};$$

$$D_{\xi} = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2};$$

g)  $\xi$  tiene distribución normal.

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}}.$$

$$M_{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}} dx = a;$$

$$D_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2b}} dx = b.$$

## 1.7. Probabilidades condicionales y esperanzas matemáticas

1.7.1. Probabilidad condicional respecto de un suceso. La expresión

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

se denomina probabilidad condicional del suceso  $A$  respecto del suceso  $B$ , para el cual  $P(B) > 0$ . De aquí se deduce la fórmula de multiplicación de las probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A/B) P(B) = P(B/A) P(A)$$

y la expresión para  $P(A/B)$  en términos de  $P(B/A)$ :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A) P(A)}{P(B)}.$$

Aduzcamos, además, la fórmula general de multiplicación de las probabilidades

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = P(A_1) P(A_2/A_1) \dots P(A_n/\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k).$$

Fórmula de probabilidad total. Sea  $E_1, \dots, E_n$  un grupo completo de sucesos. Entonces, para todo suceso  $A$

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A/E_k) P(E_k).$$

La fórmula de Bayes proporciona la expresión para las probabilidades condicionales de uno de los sucesos  $E_k$  del grupo completo ( $E_1, \dots, E_n$ ) a condición de que el suceso  $A$  ya tuvo lugar

$$P(E_k/A) = \frac{P(A/E_k) P(E_k)}{\sum_{i=1}^n P(A/E_i) P(E_i)}.$$

Esta fórmula se llama también fórmula para la probabilidad de la hipótesis después de la prueba. Supongamos que el suceso  $A$  puede ocurrir en las condiciones de la hipótesis  $H_i$  que consiste en que transcurrió el suceso  $E_i$  con la probabilidad  $P(A/E_i)$ , y  $P(E_i)$  es la probabilidad de la hipótesis  $H_i$ . La fórmula de Bayes permite calcular la probabilidad condicional de la hipótesis  $H_k$  a condición de que tuvo lugar el suceso  $A$  en términos de las probabilidades de las hipótesis y la probabilidad del suceso  $A$  para diferentes hipótesis.

EJEMPLO. Se tienen  $n$  urnas que contienen en su interior bolas negras y blancas. La probabilidad de extraer una bola negra de la  $k$ -ésima urna es  $p_k$ . Se elige al azar (con la probabilidad  $\frac{1}{n}$ ) una de las urnas, después de lo cual de ésta se toma una bola. ¿Cuál es la probabilidad de haber elegido la  $k$ -ésima urna, si la bola resultó ser negra? Si  $E_k$  es el suceso consistente en que la urna elegida era la  $k$ -ésima

y el suceso  $A$ , en que la bola extraída resultó ser negra, entonces

$$P(E_k|A) = \frac{P_k}{P_1 + \dots + P_n}.$$

1.7.2. **Distribución condicional de una magnitud aleatoria.** Examinemos una magnitud  $\xi$ . La expresión

$$F_{\xi}(x|A) = \frac{P(\{\xi < x\} \cap A)}{P(A)}$$

se denomina función de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  respecto del suceso  $A$ . Estará definida, si  $P(A) > 0$ . Si  $F_{\xi}(x|A)$  es absolutamente continua y

$$F_{\xi}(x|A) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t|A) dt,$$

entonces  $f_{\xi}(x|A)$  se llama densidad de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  respecto del suceso  $A$ . Tanto la función de distribución condicional, como la densidad de distribución condicional poseen las propiedades de la función de distribución y de la densidad de distribución, respectivamente. Los momentos, calculados a base de la función de distribución condicional, se denominan momentos condicionales de la magnitud. En particular, la expresión

$$M(\xi|A) = \int x dF_{\xi}(x|A),$$

si la integral en el segundo miembro converge absolutamente, lleva el nombre de esperanza matemática condicional de la magnitud  $\xi$  respecto del suceso  $A$ . Si  $\xi$  está fijada en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ , para la esperanza matemática condicional puede presentarse otra expresión:

$$M(\xi|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi(\omega) P(d\omega).$$

Sea  $E_1, \dots, E_n$  un grupo completo de sucesos. Resulta lícita la siguiente fórmula de la esperanza matemática total:

$$M\xi = \sum_{k=1}^n M(\xi/E_k) P(E_k).$$

Se puede dar también cierta generalización de esta fórmula. Si  $C$  tiene la forma  $C = \cup E_k$ , entonces

$$\int_C \xi(\omega) P(d\omega) = \sum_{E_k \subset C} M(\xi/E_k) P(E_k). \quad (7.1)$$

Supongamos que el suceso  $A$  consiste en que  $\{a \leq \xi < b\}$ . En este caso la función de distribución condicional

$$F_{\xi}(x/a \leq \xi < b) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{F_{\xi}(x) - F_{\xi}(a)}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)}, & a \leq x < b; \\ 1 & x > b \end{cases}$$

es la distribución de la magnitud marginada  $\xi$  o la distribución marginada. Escribamos la esperanza matemática y la varianza para la distribución marginada:

$$M(\xi | \{a \leq \xi < b\}) = \frac{1}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \int_a^b x dF_{\xi}(x);$$

$$D(\xi | \{a \leq \xi < b\}) = \frac{1}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \int_a^b x^2 dF_{\xi}(x) - \left( \frac{1}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \int_a^b x dF_{\xi}(x) \right)^2.$$

**1.7.3. Probabilidad condicional y esperanza matemática condicional respecto de una  $\sigma$ -álgebra.** Si  $E_1, \dots, E_n$  es un grupo completo de sucesos, entonces las uniones de toda clase  $\cup E_{ik}$  y el conjunto vacío  $\emptyset$  forman la  $\sigma$ -álgebra minimal que contiene los conjuntos  $E_k$ . Designemos esta  $\sigma$ -álgebra con  $\mathfrak{A}_0$ . Supongamos que  $M\xi$  existe. Una magnitud aleatoria, que en  $E_k$  es igual a  $M(\xi/E_k)$ , se llama **esperanza matemática condicional de la magnitud  $\xi$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$** . Se designa mediante  $M(\xi/\mathfrak{A}_0)$  y satisface las siguientes dos condiciones

- I.  $M(\xi/\mathfrak{A}_0)$  es medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$ .
- II. Para todos los  $C \in \mathfrak{A}_0$  se verifica

$$\int_C \xi(\omega) P(d\omega) = \int_C M(\xi/\mathfrak{A}_0) P(d\omega).$$

La primera condición en este caso significa que  $M(\xi/\mathfrak{A}_0)$  es constante en los conjuntos  $E_k$ , lo que proviene de la definición. La segunda condición se deduce de (7.1).

La magnitud  $\eta$  es  $\mathfrak{A}_0$ -medible ( $\mathfrak{A}_0$  es una  $\sigma$ -álgebra de sucesos de  $\Omega$ ), si para todo intervalo  $\Delta$

$$\{\omega : \eta(\omega) \in \Delta\} \in \mathfrak{A}_0.$$

La magnitud aleatoria  $\eta$  se denomina **esperanza matemática condicional de la magnitud  $\xi$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}$** , siempre que: 1)  $\eta$  es  $\mathfrak{A}_0$ -medible; 2) para todos los  $C \in \mathfrak{A}_0$

$$\int_C \xi(\omega) P(d\omega) = \int_C \eta(\omega) P(d\omega).$$

Observemos que las condiciones 1) y 2) determinan unívocamente con la probabilidad  $\mathbf{P}$  la magnitud  $\eta(\omega)$ . Si  $\eta_1(\omega)$  también satisface 1) y 2), entonces

$$\begin{aligned} \int |\eta_1(\omega) - \eta(\omega)| \mathbf{P}(d\omega) &= \\ &= \int_{\{\eta_1 - \eta > 0\}} (\eta_1(\omega) - \eta(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) + \\ &+ \int_{\{\eta - \eta_1 > 0\}} (\eta(\omega) - \eta_1(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) = \\ &= \int_{\{\eta_1 - \eta > 0\}} (\xi(\omega) - \xi(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) + \\ &+ \int_{\{\eta - \eta_1 > 0\}} (\xi(\omega) - \xi(\omega)) \mathbf{P}(d\omega) = 0, \end{aligned}$$

puesto que  $\{\eta_1 - \eta > 0\}$ ,  $\{\eta - \eta_1 > 0\} \in \mathfrak{A}_0$  en virtud de que  $\eta - \eta_1$  es  $\mathfrak{A}_0$ -medible. La esperanza matemática condicional de la magnitud  $\xi$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$  se denota con  $\mathbf{M}(\xi/\mathfrak{A}_0)$ . Esta esperanza existe siempre, si  $\mathbf{M}|\xi| < \infty$ .

La expresión  $\mathbf{P}(A/\mathfrak{A}_0) = \mathbf{M}(\chi_A(\omega)/\mathfrak{A}_0)$ , donde  $\chi_A(\omega)$  es el indicador del conjunto  $A$ , se llama probabilidad condicional de  $A$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$ .

Diremos que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  es numerablemente engendrada, si existe un álgebra  $\mathfrak{A}'$  (que contiene a lo sumo un número numerable de conjuntos) tal que  $\mathfrak{A}$  es la  $\sigma$ -álgebra minimal que contiene  $\mathfrak{A}'$ . Puesto que la probabilidad condicional sólo se determina con la probabilidad  $\mathbf{P}$ , entonces  $\mathbf{P}(A/\mathfrak{A}_0)$  se puede variar en el conjunto de  $\mathbf{P}$ -medida 0. Si  $\mathfrak{A}$  es numerablemente engendrada,  $\mathbf{P}(A/\mathfrak{A}_0)$  puede definirse de modo tal que para casi todo  $\omega$  la probabilidad condicional  $\mathbf{P}(A/\mathfrak{A}_0)$  sea medida probabilística en  $A$ . En estas condiciones, las esperanzas matemáticas de las magnitudes se calculan según la fórmula

$$\mathbf{M}(\xi/\mathfrak{A}_0) = \int \xi(\omega) \mathbf{P}(d\omega/\mathfrak{A}_0).$$

La expresión  $F_\xi(x/\mathfrak{A}_0) = \mathbf{P}(\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}/\mathfrak{A}_0)$  se denomina función de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$ . Si, en cambio,  $F_\xi(x/\mathfrak{A}_0) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t/\mathfrak{A}_0) dt$ , entonces  $f_\xi(x/\mathfrak{A}_0)$  se llama densidad de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$ .

1.7.4. Propiedades de las probabilidades condicionales y de las esperanzas matemáticas. a) Fórmula de la esperanza matemática total:

$$\mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\mathbf{M}(\xi/\mathfrak{A}_0).$$

b) Fórmula de la probabilidad total:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{M}\mathbf{P}(A/\mathfrak{A}_0)$$



c) Extracción del factor del signo de la esperanza matemática condicional: si  $\eta$  es una magnitud  $\mathfrak{A}_0$ -medible, se tiene

$$M(\xi\eta/\mathfrak{A}_0) = \eta M(\xi/\mathfrak{A}_0).$$

d) Fórmula de las esperanzas matemáticas reiteradas: si es que  $\mathfrak{A}_0 \subset \mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$ , y, además,  $\mathfrak{A}_0$  y  $\mathfrak{A}_1$  son  $\sigma$ -álgebras, entonces

$$M(\xi/\mathfrak{A}_0) = M(M(\xi/\mathfrak{A}_1)/\mathfrak{A}_0) = M(M(\xi/\mathfrak{A}_0)/\mathfrak{A}_1).$$

e) Paso límite en la esperanza matemática condicional según una condición: supongamos que  $\mathfrak{A}_h$  son unas  $\sigma$ -álgebras:  $\mathfrak{A}_h \subset \mathfrak{A}_{h+1} \subset \mathfrak{A}$ , y que  $\mathfrak{A}_\infty$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima que contiene  $\bigcup_h \mathfrak{A}_h$ , en este caso tenemos

$$M(\xi/\mathfrak{A}_\infty) = \lim_{h \rightarrow \infty} M(\xi/\mathfrak{A}_h).$$

1.7.5. Métodos para calcular las distribuciones condicionales. Sean  $\xi$  y  $\eta$  dos magnitudes aleatorias. Designemos con  $\mathfrak{A}_\eta$  la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos del tipo  $\{\omega: \eta \in B\}$ , donde  $B$  son toda una serie de conjuntos borelianos en una recta. Se denomina  $\sigma$ -álgebra engendrada por la magnitud  $\eta$ . La función  $F_{\xi, \eta}(x/\mathfrak{A}_\eta)$  se llama función de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  para  $\eta$  prefijada. Dicha magnitud aleatoria es  $\mathfrak{A}_\eta$ -medible, razón por la cual será función boreliana de  $\eta$ . Designaremos su valor, para  $\eta = y$ , como  $F_{\xi, \eta}(x/\eta = y)$ . Supongamos que  $\eta$  tiene la densidad de distribución  $f_\eta(y)$ . Así que

$$F_{\xi, \eta}(x/\eta = y) = \frac{1}{f_\eta(y)} \frac{\partial}{\partial y} F_{\xi, \eta}(x, y),$$

donde  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  es una función de distribución conjunta de las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$ . Si existe la densidad conjunta  $f_{\xi, \eta}(x, y)$ , de las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$  la expresión

$$f_{\xi, \eta}(x/\eta = y) = \frac{1}{f_\eta(y)} f_{\xi, \eta}(x, y)$$

define la densidad de distribución condicional de la magnitud  $\xi$  para  $\eta$  prefijada. La esperanza matemática condicional de la magnitud  $\xi$  para  $\eta$  preestablecida tendrá por expresión

$$M(\xi/\eta = y) = \frac{1}{f_\eta(y)} \int x dx \frac{\partial}{\partial y} F_{\xi, \eta}(x, y).$$

Sean  $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$  unas magnitudes aleatorias y  $\mathfrak{A}_{\eta_1, \dots, \eta_n}$  la  $\sigma$ -álgebra engendrada por las magnitudes  $\eta_1, \dots, \eta_n$ , es decir, la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos del tipo

$$\{\omega: (\eta_1(\omega), \dots, \eta_n(\omega)) \in B\},$$

donde  $B$  son toda clase de conjuntos en  $R^n$ ;  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  es un punto en  $R^n$  de coordenadas  $\eta_h$ .

La función

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m}^{(\eta_1, \dots, \eta_n)}(x_1, \dots, x_m/\mathfrak{A}_{\eta_1, \dots, \eta_n}) = \\ = P\left\{\left(\bigcap_{h=1}^m \{\omega: \xi_h(\omega) < x_h\}\right)/\mathfrak{A}_{\eta_1, \dots, \eta_n}\right\}$$

se llama función de distribución condicional conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  para  $\eta_1, \dots, \eta_n$  prefijadas. Esta magnitud aleatoria es una función de  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . Su valor para  $\eta_1 = y_1, \dots, \eta_n = y_n$  se designará

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_m / \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m / y_1, \dots, y_n).$$

Si  $\eta_1, \dots, \eta_n$  tienen densidad de distribución conjunta en forma de  $f_{\eta_1, \dots, \eta_n}(y_1, \dots, y_n)$ , entonces

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \dots, \xi_m / \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m / y_1, \dots, y_n) &= \\ &= \frac{1}{f_{\eta_1, \dots, \eta_n}(y_1, \dots, y_n)} \frac{\partial^n}{\partial y_1 \dots \partial y_n} F_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n} \times \\ &\quad \times (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n), \end{aligned}$$

donde  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  es una función de distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ . Si existe la densidad conjunta  $f_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$  de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ , entonces

$$\begin{aligned} f_{\xi_1, \dots, \xi_m / \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) &= \\ &= (1 / f_{\eta_1, \dots, \eta_n}(y_1, \dots, y_n)) f_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n} \times \\ &\quad \times (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

será la densidad conjunta condicional de las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_m$  a condición de  $\eta_1 = y_1, \dots, \eta_n = y_n$ .

**1.7.6. Independencia.** Los sucesos  $A$  y  $B$  se llaman independientes, si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Para los sucesos independientes se verifican

$$P(A/B) = P(A), \quad P(B/A) = P(B).$$

La magnitud  $\xi$  no depende del suceso  $A$ , si

$$F_{\xi}(x/A) = F_{\xi}(x).$$

El suceso  $A$  no depende de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{A}_0$ , si con la probabilidad  $P$  se verifica

$$P(A/\mathfrak{A}_0) = P(A).$$

Para que  $A$  no dependa de  $\mathfrak{A}_0$ , es necesario que  $A$  no dependa de ningún suceso  $B \subset \mathfrak{A}_0$ , y es suficiente que  $A$  sea independiente de los sucesos de cierta álgebra  $\mathfrak{A}_0$  tal que  $\mathfrak{A}_0$  sea la  $\sigma$ -álgebra mínima que contiene  $\mathfrak{A}_0$ .

Las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{A}_0$  y  $\mathfrak{A}_1$  son independientes, siempre que  $P(A \cap A_1) = P(A)P(A_1)$  para cualesquiera  $A \in \mathfrak{A}_0$ ,  $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ . La magnitud  $\xi$  no depende de  $\mathfrak{A}_0$ , si  $\mathfrak{A}_1$ , que es una  $\sigma$ -álgebra engendrada por la magnitud  $\xi$ , y  $\mathfrak{A}_0$  son independientes. Para ello es necesario y suficiente que con la probabilidad  $P$  se verifique

$$F_{\xi}(x/\mathfrak{A}_0) = F_{\xi}(x).$$

Las magnitudes  $\xi$  y  $\eta$  son independientes, si lo son las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{A}_\xi$  y  $\mathfrak{A}_\eta$ . Para dos magnitudes independientes  $\xi$  y  $\eta$  se verifica

$$F_{\xi, \eta}(x, u) = F_\xi(x) F_\eta(u),$$

donde  $F_{\xi, \eta}(x, u)$  es una función de distribución conjunta de  $\xi$  y  $\eta$ ;  $F_\xi(x)$  y  $F_\eta(u)$  son funciones de distribución de  $\xi$  y  $\eta$ , respectivamente.

Las magnitudes  $\xi_1, \dots, \xi_n$  son independientes en conjunto, si

$$F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \dots F_{\xi_n}(x_n).$$

Dos grupos de magnitudes  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  y  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  son independientes, si

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = \\ = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m) F_{\eta_1, \dots, \eta_n}(y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Aquí,  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n}$ ,  $F_{\xi_1, \dots, \xi_m}$ ,  $F_{\eta_1, \dots, \eta_n}$  son funciones de distribución conjuntas de las magnitudes  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ ,  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ , respectivamente. Si los grupos de magnitudes  $(\xi_1, \dots, \xi_m)$  y  $(\eta_1, \dots, \eta_n)$  son independientes (suele decirse también que  $\xi_1, \dots, \xi_m$  no dependen de  $\eta_1, \dots, \eta_n$ ), entonces

$$\begin{aligned} F_{\xi_1, \dots, \xi_m / \eta_1, \dots, \eta_n}(x_1, \dots, x_m / y_1, \dots, y_n) = \\ = F_{\xi_1, \dots, \xi_m}(x_1, \dots, x_m). \end{aligned}$$

Designemos mediante  $\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_n)$  el álgebra mínima que contiene los conjuntos  $A_1, \dots, A_n$ . Los sucesos  $A_1, \dots, A_n$  se denominan independientes, si para todo  $k = 1, 2, \dots, n$  el suceso  $A_k$  no depende del álgebra  $\mathfrak{A}(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_n)$ . Si los sucesos  $A_k$  son independientes, entonces

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

Los sucesos  $A_1, \dots, A_n$  son independientes, cuando, y sólo cuando, para cualesquiera  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ ,  $m \leq n$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^m P(A_{i_k}).$$

Ejem p l o Imaginémonos un experimento que consiste en la elección al azar de una de cuatro bolas. Supongamos que tres de dichas bolas están numeradas con las cifras 1, 2, 3, mientras que en la cuarta bola están grabadas todas las cifras mencionadas. Designemos mediante  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  un suceso consistente en que la bola elegida

tenga la cifra  $i$ . Evidentemente,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4};$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4},$$

de modo que los sucesos  $A_1, A_2, A_3$  son independientes dos a dos, pero no son independientes en conjunto.

**SUCESIONES DE SUCEOS  
Y MAGNITUDES INDEPENDIENTES**

**2.1. Ley de cero y de unidad**

**2.1.1. Teorema de Borel—Cantelli.** Sea  $\{A_n, n \geq 1\}$  una sucesión de sucesos (se supone que es fijado el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$  y, además,  $A_n \in \mathfrak{A}$ ). Un suceso consistente en que entre los sucesos  $A_k$  ocurra un número infinito de ellos, se denomina límite superior de la sucesión  $\{A_n, n \geq 1\}$  y se denota  $\overline{\lim} A_n$ . Se llama límite inferior (lim  $A_n$ ) de la sucesión  $\{A_n, n \geq 1\}$  un suceso consistente en que no ocurra sólo un número finito de los sucesos  $A_k$ . Tienen lugar las igualdades

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k; \quad \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Una sucesión de sucesos  $\{A_n, n \geq 1\}$  se llama sucesión de sucesos independientes, si para todo  $n$  los sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son independientes, es decir,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^n P(A_{i_k})$$

para cualesquiera  $n = 1, 2, \dots, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n < \infty$ .

**Teorema de Borel—Cantelli.** 1. Si la sucesión de sucesos  $\{A_n, n \geq 1\}$  es tal que  $\sum_n P(A_n) < \infty$ , entonces  $P_1(\overline{\lim} A_n) = 0$ . 2. Si para la sucesión de sucesos independientes  $\{A_n, n \geq 1\}$  tiene lugar  $\sum_n P(A_n) = +\infty$ , entonces  $P(\overline{\lim} A_n) = 1$ .

De este teorema se desprende que para la sucesión de sucesos independientes  $\{A_n, n \geq 1\}$  el suceso  $\overline{\lim} A_n$  ocurre con la probabilidad 0, o bien 1.

**2.1.2. Ley de cero y de unidad de Kolmogórov.** Sea  $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$  una sucesión de  $\sigma$ -álgebras de los sucesos ( $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{A}$ ). Designemos con  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$  la  $\sigma$ -álgebra mínima que contiene todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{A}_n, n \geq m$ , y con  $\overline{\lim} \mathfrak{A}_n$  la  $\sigma$ -álgebra  $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \mathfrak{A}_n$ , es decir, la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos contenidos en las  $\sigma$ -álgebras  $\bigcup_{n=m}^{\infty} \mathfrak{A}_n$  para todo  $m = 1, 2, \dots$

Una sucesión de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$  se llama sucesión de  $\sigma$ -álgebras independientes, si cada sucesión de sucesos  $\{A_n, n \geq 1\}$  es de tal índole que  $A_n \in \mathfrak{A}_n$  representa una sucesión de sucesos independientes.

**Teorema.** Si  $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de  $\sigma$ -álgebras independientes, todo suceso de la  $\sigma$ -álgebra  $\lim \mathfrak{A}_n$  tiene probabilidad 0, o bien 1.

Una sucesión de las magnitudes aleatorias  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  se denomina sucesión de magnitudes aleatorias independientes, si para todos los números reales  $x_k, k = 1, 2, \dots$  la sucesión de sucesos  $\{\xi_k < x_k\}, k = 1, 2, \dots$ , es una sucesión de sucesos independientes. Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes y  $f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  es una función de un número infinito de variables  $x_k$  tal que la magnitud  $\xi = f(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$  es medible respecto de  $\lim \mathfrak{A}_n$ , entonces de la ley de cero y de unidad se deduce que  $\xi$  toma con la probabilidad 1 un valor único. En particular, para las magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_k, k \geq 1\}$

las magnitudes  $\lim \xi_n, \overline{\lim} \xi_n, \lim_{h \rightarrow 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \overline{\lim}_{h \rightarrow 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$  son constantes con la probabilidad 1. Para una sucesión de las magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  o bien converge con la probabilidad 1, o bien diverge con la misma probabilidad.

## 2.2. Esquema de Bernoulli

**2.2.1. Distribución binomial.** Sean  $A_1, A_2, \dots, A_n$  unos sucesos independientes, siendo  $p$  la probabilidad de cada uno de ellos. Hagamos  $q = 1 - p$ , y sea  $v$  el número de aquellos sucesos  $A_k$  del conjunto  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  que se han realizado. En este caso  $v$  es una magnitud aleatoria de distribución binomial, es decir,

$$B_p(n, m) = P\{v = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.1)$$

En la práctica se encuentra con frecuencia el siguiente esquema (esquema de Bernoulli): se realizan  $n$  pruebas (experimentos) independientes (en el sentido teórico-probabilístico) en cada una de las cuales puede ocurrir con la probabilidad  $p$  cierto suceso fijado  $A$ . Entonces, la probabilidad de que en una serie de  $n$  pruebas el suceso  $A$  ocurre exactamente  $m$  veces es igual a  $B_p(n, m), m = 0, 1, 2, \dots, n$ .

**EJEMPLO 1.** Supongamos que cada uno de los artículos fabricados en una fábrica puede resultar defectuoso con la probabilidad  $p$ . En este caso la probabilidad de que en un lote de  $n$  artículos haya a lo sumo  $m$  defectuosos es igual a  $\sum_{k=0}^m B_p(n, k)$ .

El número medio de apariciones del suceso  $A$  en la serie de  $n$  pruebas será  $\sum_{m=0}^n m B_p(n, m) = np$ .

La varianza del número de apariciones del suceso  $A$  en  $n$  pruebas es igual a  $\sum_{m=0}^n m^2 B_p(n, m) - n^2 p^2 = npq$ .

Si  $m$  varía de 0 hasta  $n$ , las probabilidades  $B_p(n, m)$  crecen al principio, y luego decrecen, alcanzando el valor máximo para  $m = \lfloor np + p \rfloor$ , si el número  $np + p$  no es entero; si, en cambio,  $np + p$  es un número entero, se tienen dos probabilidades máximas:  $B_p(n, np + p)$  y  $B_p(n, np - p)$ .

**2.2.2. Distribución polinomial.** Supongamos que como resultado de cada una de  $n$  pruebas independientes puede ocurrir uno de  $m$  sucesos  $A_1, A_2, \dots, A_m$  con las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , respectivamente,  $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ ,  $p_i \geq 0$ . Designemos con  $v_i$  el número de aquellas pruebas en las cuales se ha realizado el suceso  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Entonces,

$$P\{v_1 = i_1, v_2 = i_2, \dots, v_m = i_m\} = \frac{n!}{i_1! i_2! \dots i_m!} \times p_1^{i_1} p_2^{i_2} \dots p_m^{i_m}, \quad (2.2)$$

donde  $i_k \geq 0$ , e  $i_1 + i_2 + \dots + i_m = n$ . Esta distribución se llama polinomial. Cuando  $m = 2$ , ésta se convierte en una distribución binomial.

**2.2.3. Aproximación binomial para la distribución hipergeométrica.** Supongamos que de una totalidad de  $n$  objetos, de los cuales  $n_1$  objetos son del género 1 y  $n_2$  objetos, del género 2 ( $n_1 + n_2 = n$ ), se elige sin retorno un grupo de  $k$  objetos,  $k \leq n$ . Designemos mediante  $v$  el número de objetos del género 1 en la muestra. La distribución de la magnitud  $v$  se denomina hipergeométrica y se calcula según la fórmula

$$P_{n_1 n}(k, m) = P\{v = m\} = \frac{C_{n_1}^m C_{n_2}^{k-m}}{C_n^k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \min(k, n_1) \quad (2.3)$$

Cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\frac{n_1}{n} \rightarrow p$ , resulta válida la correlación

$$P_{n_1 n}(k, m) \rightarrow B_p(k, m),$$

de modo que el esquema de Bernoulli puede considerarse como una elección sin retorno de una totalidad infinita de objetos.

Por analogía, supongamos que se tiene una totalidad de  $n$  objetos, de los cuales  $n_i$  objetos son del género  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ; de dicha totalidad se elige sin retorno un grupo de  $k$  objetos. Al designar con  $v_i$  el número de objetos del género  $i$  en la muestra, tendremos:

$$P\{v_1 = m_1, \dots, v_r = m_r\} = \frac{C_{n_1}^{m_1} C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_r}^{m_r}}{C_n^k}.$$

Aquí,  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = k$ ,  $0 \leq m_i \leq n_i$ ,  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ .

Cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\frac{n_1}{n} \rightarrow p_1, \dots, \frac{n_r}{n} \rightarrow p_r$ ,

$$P\{v_1 = m_1, \dots, v_r = m_r\} \rightarrow \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r},$$

es decir, en el límite se obtienen probabilidades polinomiales.

### 2.3. Teoremas de límites para el esquema de Bernoulli

**2.3.1. Ley de los grandes números.** Designaremos con  $v_n$  el número de apariciones del suceso  $A$  en una serie de  $n$  pruebas independientes. Sea  $p$  la probabilidad de aparición del suceso  $A$  en una prueba. En este caso para cualquier  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{v_n}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} = 0. \quad (3.1)$$

Suele decirse que una sucesión de las magnitudes aleatorias  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converge en probabilidad hacia la magnitud aleatoria  $\xi$ , si para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

De esta manera, la afirmación antecedente significa que la frecuencia  $\frac{v_n}{n}$  con que el suceso  $A$  aparece en la serie de  $n$  pruebas independientes converge en probabilidad hacia la probabilidad  $p$  de aparición del suceso  $A$  en una prueba.

**2.3.2. Aproximación normal para la distribución binomial.** Cuando  $n$  son grandes, el cálculo de las probabilidades  $B_p(n, m)$  puede resultar muy dificultoso. Por esta razón mucha importancia adquiere el problema en el que se buscan las fórmulas asintóticas para las magnitudes de  $B_p(n, m)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema de Moivre-Laplace.** Hagamos  $np = a_n$ ,  $npq = B_n^2$ ,  $x_{n,m} = \frac{m - a_n}{B_n}$ . Si  $B_n \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$  y  $x_{n,m}$  es acotada, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n B_p(n, m)}{\varphi(x_{n,m})} = 1, \quad (3.2)$$

donde  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

La afirmación del teorema es también válida en el caso en que  $x_{n,m}$  es acotada, mientras que  $p$  y  $q$  dependen de  $n$  de un modo tal que  $B_n \rightarrow \infty$ .

**Teorema del límite integral de Moivre-Laplace.** En las condiciones del teorema antecedente, para  $x_1 < x_2$  arbitrarios resulta lícita



la fórmula asintótica

$$P \left\{ x_1 < \frac{v_n - a_n}{B_n} < x_2 \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

donde  $v_n$  es el número de apariciones del suceso  $A$  en una serie de  $n$  pruebas independientes, siempre que en una sola prueba el suceso  $A$  ocurre con la probabilidad  $p$ .

En otras palabras, la distribución de la magnitud  $\frac{v_n - np}{\sqrt{npq}}$  es asintóticamente normal con la media 0 y la varianza 1.

**2.3.3. Aproximación de Poisson de la distribución binomial.** Supongamos que se realiza una serie de  $n$  pruebas independientes y la probabilidad  $p$  de que el suceso  $A$  se realice en una prueba depende de  $n$  de un modo tal que la sucesión  $b_n = np_n q_n$  es acotada.

Si  $b_n \rightarrow 0$ , entonces o bien  $p_n \rightarrow 0$ , o bien  $q_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el primer caso

$$B_{p_n}(n, 0) = q_n^n \sim \left(1 - \frac{b_n}{n}\right)^n \sim e^{-b_n} \sim 1.$$

Por esto

$$\sum_{m=1}^n B_{p_n}(n, m) = 1 - B_{p_n}(n, 0) \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

En el segundo caso  $B_{p_n}(n, m) \sim 1$  y  $\sum_{m=0}^{n-1} B_{p_n}(n, m) \rightarrow 0$ .

Examinemos ahora el caso cuando existen unas constantes  $C_1$  y  $C_2$  tales que  $0 < C_1 < C_2 < \infty$  y  $C_1 < b_n < C_2$  para todo  $n$ . En este caso, o bien  $p_n \rightarrow 0$ , o bien  $q_n \rightarrow 0$ . Consideremos el primer caso, pues el segundo se reduce al primero en virtud de la fórmula

$$B_p(n, m) = B_q(n, n - m).$$

Puesto que  $p_n \rightarrow 0$ , se tiene que  $q_n \rightarrow 1$ , y, consecuentemente,  $b_n \sim a_n = np_n$ .

**Teorema de Poisson.** Si, para ciertas constantes  $C_1$  y  $C_2$ ,  $0 < C_1 < a_n < C_2 < \infty$ , entonces para cualesquiera  $m = 0, 1, \dots$

$$B_{p_n}(n, m) \sim \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n}. \quad (3.4)$$

En particular, si  $a_n \rightarrow a$  para  $n \rightarrow \infty$ , entonces la magnitud  $v_n$  (que es el número de apariciones del suceso  $A$  en una serie de  $n$  pruebas independientes) tendrá con las suposiciones mencionadas, la distribución asintótica de Poisson de parámetro  $a$ .

La fórmula (3.4) se cumple también en el caso en que  $np_n^2 \rightarrow 0$  y  $\frac{m^2}{n} \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### 2.3.4. Comportamiento asintótico de las probabilidades polinomiales. Hagamos

$$p_n(m_1, m_2, \dots, m_r) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_r!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_r^{m_r},$$

donde  $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ ,  $m_i \geq 0$ ,  $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$ ,  $p_i \geq 0$ ,  $r$  es un número entero fijado ( $r \geq 2$ ). Si las magnitudes  $np_1 = a_1$ ,  $np_2 = a_2$ ,  $\dots$ ,  $np_{r-1} = a_{r-1}$  son acotadas, entonces para  $n \rightarrow \infty$

$$p_n(m_1, m_2, \dots, m_r) \sim \frac{1}{m_1! m_2! \dots m_{r-1}!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_{r-1}^{m_{r-1}} e^{-(a_1 + \dots + a_{r-1})}. \quad (3.5)$$

Aquí,  $m_1, m_2, \dots, m_{r-1}$  son unos números arbitrarios no negativos, y  $m_r = n - \sum_{i=1}^{r-1} m_i$ .

Si  $r$  puede también variar junto con  $n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , y todas las magnitudes  $a_1, a_2, \dots, a_{r-1}$ ,  $a_r = np_r$  son acotadas, entonces para  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , enteros arbitrarios y no negativos, tenemos, cuando  $n \rightarrow \infty$

$$p_n(m_1, m_2, \dots, m_r) \sim \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n}}{m_1! \dots m_r!} a_1^{m_1} \dots a_r^{m_r}. \quad (3.6)$$

## 2.4. Sucesiones de magnitudes aleatorias independientes. Ley de los grandes números

2.4.1. Criterio de independencia de la sucesión de magnitudes aleatorias. En el p. 2.1.1 se ha introducido el concepto de sucesión de las magnitudes aleatorias independientes. Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión precisamente de esta índole. Designemos mediante  $\mathfrak{A}_k$  una  $\sigma$ -álgebra de sucesos del tipo  $\{\xi_n \in A\}$ , donde  $A$  es un conjunto boreliano arbitrario en una recta. De la definición de sucesión de las magnitudes aleatorias independientes se deduce que la sucesión de las  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de  $\sigma$ -álgebras independientes. Demos a conocer un criterio de independencia de las magnitudes aleatorias.

**Teorema.** Para que las magnitudes  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  sean independientes, es necesario que para todas las funciones borelianas acotadas  $g_1, \dots, g_n$  se verifique

$$M g_1(\xi_1) \dots M g_n(\xi_n) = M g_1(\xi_1) M g_2(\xi_2) \dots M g_n(\xi_n),$$

y es suficiente que dicha igualdad se cumpla para todas las funciones acotadas continuas  $g_1, \dots, g_n$ .

En particular, si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes y  $M \xi_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) existe, entonces

$$M \prod_{i=1}^n \xi_i = \prod_{i=1}^n M \xi_i.$$

Para las magnitudes aleatorias independientes  $\xi_1, \dots, \xi_n$

$$D_s \sum_{h=1}^n \xi_h = \sum_{h=1}^n D\xi_h,$$

siempre que existan  $D\xi_h, k = 1, 2, \dots, n$ .

Si son independientes dos grupos de las magnitudes  $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  y  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ , entonces para las funciones borelianas arbitrarias  $f(x_1, \dots, x_n)$  y  $g(y_1, \dots, y_m)$  las magnitudes aleatorias  $\xi = f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  y  $\zeta = g(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$  son independientes.

2.4.2. Desigualdad de Chébishev. Sean  $\xi$  una magnitud aleatoria arbitraria y  $g(x)$ , una función par no negativa que no decrece en  $[0, +\infty)$ . En este caso, para todo  $a \geq 0$  tenemos:

$$\frac{Mg(\xi) - g(a)}{\sup_{g(\xi)} \text{c.p.c.}} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{Mg(\xi)}{g(a)} \quad (4.1)$$

La magnitud en el denominador del primer miembro de la desigualdad, llamada cota superior casi por cierto de la magnitud aleatoria  $g(\xi)$ , se determina del modo siguiente:

$$\sup g(\xi) \text{ c.p.c.} = \inf \{C: C \geq 0 \text{ y } P\{g(\xi) > C\} = 0\}.$$

Al hacer en la desigualdad (4.1)  $g(x) = |x|^r, r > 0$ , obtenemos

$$\frac{M|\xi|^r - a^r}{\sup |\xi|^r \text{ c.p.c.}} \leq P\{|\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi|^r}{a^r}. \quad (4.2)$$

Aplicando esta desigualdad a la magnitud  $\xi - M\xi$ , obtendremos

$$\frac{M|\xi - M\xi|^r - a^r}{\sup |\xi - M\xi|^r \text{ c.p.c.}} \leq P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{M|\xi - M\xi|^r}{a^r}. \quad (4.3)$$

Para  $r = 2$  de aquí se deduce la desigualdad de Chébishev:

$$P\{|\xi - M\xi| \geq a\} \leq \frac{D\xi}{a^2}. \quad (4.4)$$

2.4.3. Convergencia en media. Una sucesión de las magnitudes aleatorias  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converge en media del orden  $r, r > 0$ , hacia la magnitud aleatoria  $\xi$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n - \xi|^r = 0.$$

La convergencia en media del orden 2 se llama convergencia en media cuadrática. Si  $\xi_n \rightarrow \xi$  en media del orden  $r$ , entonces  $\xi_n \rightarrow \xi$  en media del orden  $r'$  para cualesquiera  $r' \leq r$ , y  $M|\xi_n|^{r'} \rightarrow M|\xi|^{r'}$ . Al aplicar la desigualdad derecha en (4.2) a la magnitud  $\xi_n - \xi$ , llegamos a que de la convergencia en media del orden  $r, r > 0$ , se desprende la convergencia en probabilidad. La desigualdad izquierda en (4.2) nos proporciona una afirmación inversa: si la sucesión  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converge en probabilidad y c.p.c. es uniformemente acotada, converge también en media del orden  $r$  para todo  $r > 0$ .

Una sucesión de las magnitudes aleatorias  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  se llama **uniformemente integrable**, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_n \int_{\{\xi_n \in I_n\}} |\xi_n| dP(\omega) = 0.$$

Para que  $\xi_n \rightarrow \xi$  en media del orden  $r$ , es necesario y suficiente que  $\xi_n \rightarrow \xi$  en probabilidad y que la sucesión  $|\xi_n|^r$  sea uniformemente integrable.

Supongamos que  $g(x)$  es una función de Borel arbitraria prefijada en una recta y sea  $A$  un conjunto de puntos de discontinuidad de  $g(x)$ . Si la sucesión  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converge en probabilidad hacia la magnitud aleatoria  $\xi$  y  $P\{\xi \in A\} = 0$ , entonces  $g(\xi_n)$  converge en probabilidad hacia la magnitud  $g(\xi)$ . Si, además,  $\sup_n M|g(\xi_n)|^r = C < \infty$  para

cierto  $r_0 > 0$ , entonces  $g(\xi_n) \rightarrow g(\xi)$  en media del orden  $r$ , cualquiera que sea  $r < r_0$ . En particular, si  $\xi_n \rightarrow \xi$  en probabilidad, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi_n < x\} = P\{\xi < x\}$  para cualquier  $x$  tal que  $P\{\xi = x\} = 0$ .

**2.4.4. Ley de los grandes números.** Así se llaman los teoremas que ofrecen las condiciones con las cuales

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M\xi_h \rightarrow 0$$

en probabilidad. En el p. 2.3.1 se ha aducido una afirmación de tal índole que se refería al esquema de Bernoulli. Observemos que si  $v_n$  es el número de apariciones del suceso  $A$  en una serie de  $n$  pruebas

independientes, entonces  $v_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ , donde  $\xi_i$  es una magnitud aleatoria igual a 1, si en la  $i$ -ésima prueba tuvo lugar el suceso  $A$ , e igual a 0 en el caso contrario. Entonces

$$\frac{v_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h, \quad p = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M\xi_h.$$

Examinemos un problema que es algo más general. Sean dadas la sucesión de magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  y una sucesión numérica  $\{\beta_n, n = 1, 2, \dots\}$  tal que  $\beta_n \rightarrow \infty$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se pregunta, ¿con qué condiciones existe una sucesión numérica  $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$  tal que para  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \alpha_n \rightarrow 0$$

en probabilidad? La respuesta la hallamos en el siguiente teorema.

**Teorema 1.** Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes.  $F_n(x) = P\{\xi_n < x\}$ . Designemos con  $m_n$  la mediana de la magnitud aleatoria  $\xi_n$ , es decir, cualquiera de los números que

satisfacen las desigualdades  $P\{\xi_n \geq m_n\} \geq \frac{1}{2}$ , y  $P\{\xi_n \leq m_n\} \geq \frac{1}{2}$ . Para que exista la sucesión de constantes  $\{\alpha_n, n \geq 1\}$  tal que para  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \alpha_n \rightarrow 0$$

en probabilidad, es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición

$$\sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - m_h)^2}{\beta_h^2 + (x - m_h)^2} dF_h(x) \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Si esta condición se cumple, entonces

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \left( m_h + \int_{|x - m_h| < \tau \beta_n} (x - m_h) dF_h(x) \right) + o(1),$$

donde  $\tau$  es una constante positiva arbitraria.

El teorema que sigue nos da las condiciones de aplicabilidad de la ley de los grandes números en su forma clásica a la sucesión dada de magnitudes aleatorias independientes.

**Teorema 2.** Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes,  $F_h(x) = P\{\xi_h < x\}$ . Supongamos que  $M|\xi_h| < \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Para que, con  $n \rightarrow \infty$ , sea que

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M\xi_h \rightarrow 0$$

en probabilidad, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1)  $\sum_{k=1}^n \int_{|x - M\xi_k| \geq n} dF_k(x) \rightarrow 0$ ;
- 2)  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int_{|x - M\xi_k| < n} (x - M\xi_k) dF_k(x) \rightarrow 0$ ;
- 3)  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{|x - M\xi_k| < n} (x - M\xi_k)^2 dF_k(x) - \left( \int_{|x - M\xi_k| < n} (x - M\xi_k) dF_k(x) \right)^2 \right\} \rightarrow 0$ .

El siguiente teorema contiene una condición simple de la aplicabilidad de la ley de los grandes números.

**Teorema 3.** Si la sucesión de magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es tal que  $D\xi_n$  existe y  $\frac{D\xi_n}{n} \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow 0$$

en probabilidad.

Si las magnitudes  $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ , tienen una misma función de distribución  $F(x) = P\{\xi_n < x\}$ , se llamarán igualmente distribuidas.

**Teorema 4.** Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas y si existe la esperanza matemática  $M\xi_n = a$ , entonces, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow a$$

en probabilidad.

## 2.5. Desigualdad de Kolmogórov. Ley reforzada de los grandes números

2.5.1. Desigualdades de tipo de la desigualdad de Kolmogórov.

**Teorema 1** (de Kolmogórov). Si las magnitudes aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes y  $D\xi_k < \infty$ , entonces para cualquier  $a > 0$  tenemos

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k (\xi_i - M\xi_i) \right| \geq a\right\} \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k. \quad (5.1)$$

Si, además,  $|\xi_k| \leq C < \infty$  para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ , entonces

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k (\xi_i - M\xi_i) \right| \geq a\right\} \geq 1 - \frac{(a+2c)^2}{\sum_{k=1}^n D\xi_k}. \quad (5.2)$$

La distribución de la magnitud  $\xi$  se denomina simétrica, si las magnitudes  $\xi$  y  $-\xi$  están igualmente distribuidas. La magnitud  $\xi$  de distribución simétrica se llama simétrica. Si  $F(x)$  es una función de distribución de una magnitud aleatoria simétrica, se tiene que  $F(x) = 1 - F(-x + 0)$ .

**Teorema 2.** Si las magnitudes  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes y simétricas, entonces

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \xi_i \right| \geq a\right\} \leq 2P\left\{\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right| \geq a\right\}. \quad (5.3)$$

**Teorema 3.** Si las magnitudes aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes y para ciertos  $a > 0$  y  $\alpha < 1$

$$P \left\{ \left| \sum_{i=k+1}^n \xi_i \right| \geq a \right\} \leq \alpha, \quad k=1, 2, \dots, n-1,$$

entonces para todo  $C > 0$  tenemos

$$P \left\{ \max_{1 \leq h \leq n} \left| \sum_{i=1}^h \xi_i \right| \geq a + C \right\} \leq \frac{1}{1-\alpha} P \left\{ \left| \sum_{h=1}^n \xi_h \right| \geq C \right\}. \quad (5.4)$$

**2.5.2. Convergencia casi por cierto (c.p.c.).** Una sucesión de las magnitudes aleatorias  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converge casi por cierto (o bien con la probabilidad 1) hacia la magnitud aleatoria  $\xi$ , si

$$P \{ \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \rightarrow 0 \} = 1.$$

La sucesión  $\xi_n \rightarrow \xi$  c.p.c. cuando, y sólo cuando, para todo  $\varepsilon > 0$

$$P \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ |\xi_{n+m} - \xi| \geq \varepsilon \} \right\} \rightarrow 0$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

De la convergencia c.p.c. se deduce la convergencia en probabilidad. Lo recíproco, en general, no es cierto. No obstante, toda sucesión  $\xi_n$  que converge hacia  $\xi$  en probabilidad, contiene una subsucesión que converge casi por cierto. Más aún,  $\xi_n \rightarrow \xi$  en probabilidad entonces, y sólo entonces, cuando toda subsucesión de la sucesión  $\xi_n$  contiene una subsucesión que converge hacia  $\xi$  casi por cierto. Del teorema de Borel—Cantelli se desprende que la condición necesaria para que  $\xi_n$  converja hacia  $\xi$  con la probabilidad 1 es la convergencia, para todo  $\varepsilon > 0$ , de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \}.$$

**2.5.3. Ley reforzada de los grandes números.** Así se denominan los teoremas, análogos a las leyes de los grandes números, en los cuales, sin embargo, en lugar de la convergencia en probabilidad se afirma la convergencia casi por cierto (con la probabilidad 1).

De un modo más general el teorema puede enunciarse así: sean dadas una sucesión de magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  y una sucesión numérica  $\beta_n$  tal que  $\beta_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se pregunta ¿con qué condiciones existe tal sucesión numérica  $\{\alpha_n, n = 1, 2, \dots\}$  que, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \alpha_n \rightarrow 0$$

con la probabilidad 1?

**Teorema 1.** Sea dada la sucesión de magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ . Supongamos que  $\beta_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y que existen tal subsucesión  $\beta_{n_h}$  y tales números  $C_1$  y  $C_2$  que para todos

os  $k$  suficientemente grandes se tiene

$$1 < C_1 < \frac{\beta_{n_{k+1}}}{\beta_{n_k}} \leq C_2 < \infty.$$

Pongamos

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad T_k = \frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\beta_{n_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, S_{n_0} = 0.$$

Para que, con  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{\beta_n} (S_n - mS_n) \rightarrow 0$$

es necesario y suficiente que se cumpla una de las siguientes condiciones:

1)  $T_k - mT_k \rightarrow 0$  casi por cierto para  $k \rightarrow \infty$ ;

2)  $\sum_{h=1}^{\infty} P\{|T_h - mT_h| \geq \varepsilon\} < \infty$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Aquí,  $mS_k$

y  $mT_k$  designan las medianas de las magnitudes aleatorias  $S_k$  y  $T_k$ , respectivamente.

Una condición suficiente (cómoda para la comprobación) de la aplicabilidad de la ley reforzada de los grandes números a la sucesión dada de magnitudes aleatorias independientes está contenida en el siguiente teorema.

**Teorema 2.** Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes, para la cual la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{D\xi_h}{k^2}$  converge, entonces, con la probabilidad 1, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n M\xi_h \rightarrow 0.$$

El teorema que sigue se refiere a los sumandos distribuidos igualmente.

**Teorema 3.** Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas, para las cuales  $M\xi_n$  es finita, entonces, con la probabilidad 1

$$\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h \rightarrow M\xi_1.$$

En el caso de que las magnitudes  $\xi_n$  no tengan esperanza matemática

finita, la sucesión  $\frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \xi_h$  no será acotada con la probabilidad 1.



**Corolario.** Si  $v_n$  es el número de apariciones del suceso  $A$  en una serie de  $n$  pruebas independientes, entonces, cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $f \frac{v_n}{n} \rightarrow p$  con la probabilidad 1. Aquí,  $p$  es la probabilidad de aparición del suceso  $A$  en una prueba.

## 2.6. Series de magnitudes aleatorias independientes

Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias. La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  se denomina convergente con la probabilidad 1, si convergen con la probabilidad 1 las sumas parciales  $\sum_{k=1}^n \xi_k$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.** Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes. Si convergen las series  $\sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} D\xi_k$ , la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  convergerá con la probabilidad 1. Y viceversa, si las magnitudes  $\xi_n$  son acotadas con la probabilidad 1 (para cierta  $C > 0$  se tiene que  $P(|\xi_n| > C) = 0$  para toda  $n$ ) y si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  converge con la probabilidad 1, convergerán también las series  $\sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k$  y  $\sum_{k=1}^{\infty} D\xi_k$ .

**Teorema 2** (acerca de las tres series). Para que una serie de magnitudes aleatorias independientes  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  converja con la probabilidad 1, es necesario que para toda  $C > 0$ , y suficiente que para cierta  $C > 0$ , converjan las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k| > C), \quad \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k(C), \quad \sum_{k=1}^{\infty} D\xi_k(C),$$

donde

$$\xi_k(C) = \begin{cases} \xi_k, & \text{si } |\xi_k| \leq C, \\ 0, & \text{si } |\xi_k| > C. \end{cases}$$

**Teorema 3.** Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias no negativas, entonces para que converja la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  es suficiente que para cierta  $C > 0$ , y necesario que para todas  $C > 0$ , converjan las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k > C) \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k(C),$$

donde

$$\xi_k(C) = \begin{cases} \xi_k, & \text{si } \frac{r}{\sigma^2} \leq C, \\ 0, & \text{si } \frac{r}{\sigma^2} > C. \end{cases}$$

Una serie compuesta por las magnitudes  $\xi_k$  se denomina convergente en probabilidad, si convergen en probabilidad sus sumas parciales. Para las series de magnitudes aleatorias independientes la convergencia en probabilidad provoca la convergencia con la probabilidad 1.

Una sucesión de magnitudes aleatorias  $(\eta_n, n \geq 1)$  se llama acotada en probabilidad, si

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_n P\{|\eta_n| > A\} = 0.$$

Si  $(\xi_n, n \geq 1)$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes simétricas y  $\sum_{k=1}^n \xi_k$  son acotadas en probabilidad, entonces

la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  converge con la probabilidad 1.

Los resultados análogos son también válidos en el caso en que se consideran las sumas de vectores aleatorios independientes. En este caso, el siguiente teorema es análogo al teorema acerca de las series.

**Teorema 4.** Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$  una serie compuesta por vectores aleatorios independientes. Para que esta serie converja casi por cierto, es necesario que para todas  $C > 0$  converjan las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k(C), \quad \sum_{k=1}^{\infty} M|\xi_k(C) - M\xi_k(C)|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} P\{|\xi_k| > C\},$$

y es suficiente que dichas series sean convergentes para cierta  $C > 0$ .

Aquí,  $\xi_k(C)$  es un vector determinado por la fórmula

$$\xi_k(C) = \begin{cases} \xi_k, & \text{si } |\xi_k| \leq C, \\ 0, & \text{si } |\xi_k| > C. \end{cases}$$

## Capítulo 3

### APARATO ANALÍTICO

#### 3.1. Funciones generadoras

**3.1.1. Definición, propiedades.** Sea  $v$  una magnitud aleatoria no negativa de valor entero con la distribución de probabilidades

$$P\{v = k\} = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Se llama función generadora de la distribución (1.1) de la magnitud aleatoria  $v$  la serie

$$p(z) = Mz^v = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k, \quad |z| \leq 1. \quad (1.2)$$

Para un grupo de  $n$  magnitudes aleatorias no negativas de valores enteros  $v_1, v_2, \dots, v_n$  la función generadora conjunta se determina por la serie

$$p(z_1, z_2, \dots, z_n) = Mz_1^{v_1} z_2^{v_2} \dots z_n^{v_n} = \\ = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n} p_{k_1 k_2 \dots k_n}, \quad (1.3)$$

donde

$$P_{k_1 k_2 \dots k_n} = P\{v_1 = k_1, v_2 = k_2, \dots, v_n = k_n\}.$$

La función generadora es analítica dentro del círculo unitario  $|z| < 1$ . La distribución de las probabilidades (1.1) se determina unívocamente por su función generadora:

$$p_k = \frac{1}{k!} p^{(k)}(0), \quad p^{(k)}(0) = \frac{d^k}{dz^k} p(z) \Big|_{z=0}, \quad k \geq 0. \quad (1.4)$$

Con frecuencia resulta útil (en particular, en el análisis asintótico) representar la distribución mediante una integral de Cauchy:

$$p_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{p(z)}{z^{k+1}} dz, \quad 0 < \rho \leq 1. \quad (1.5)$$

Determinemos la cola de la distribución

$$P\{v \geq k\} = q_k = \sum_{r=k}^{\infty} p_{k+r}, \quad k \geq 0. \quad (1.6)$$

Una función generadora  $Q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k q_k$  de la sucesión  $\{q_k, k \geq 0\}$  está ligada con la función generadora  $p(z)$  de la distribución  $\{p_k, k \geq 0\}$  mediante la correlación a seguir

$$Q(z) = \frac{1-p(z)}{1-z}. \quad (1.7)$$

En particular, la esperanza matemática  $Mv$  se expresa por la fórmula

$$Mv = Q'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k. \quad (1.8)$$

Los momentos factoriales de una magnitud aleatoria  $Mv^{[m]} = M\{v(v-1)\dots(v-m+1)\}$  se calculan según la fórmula

$$Mv^{[m]} = \left. \frac{d^m}{dz^m} p(z) \right|_{z=1}, \quad m \geq 1. \quad (1.9)$$

En particular, la esperanza matemática  $Mv$  y la varianza  $Dv$  se determinan mediante las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} Mv &= p'(1); \\ Dv &= p''(1) + p'(1) - [p'(1)]^2 \end{aligned} \right\}. \quad (1.10)$$

Para el cálculo de los momentos factoriales puede emplearse también el siguiente desarrollo de la función generadora

$$p(z+1) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m B_m, \quad B_m = \frac{1}{m!} Mv^{[m]}. \quad (1.11)$$

Si la función generadora  $p(z)$  de una magnitud aleatoria  $v$  está definida para todos los  $|z| < z_0$  con cierto  $z_0 > 1$ , entonces todos los momentos  $m_k = Mv^k$ , para  $k \geq 1$ , existen y se determinan por la función generadora

$$P(s) = p(e^s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} m_k. \quad (1.12)$$

Una función generadora en el intervalo  $(0, 1)$  posee sentido probabilístico:

$$p(s) = P\{v \leq \tau\}, \quad 0 < s < 1, \quad (1.13)$$

donde  $\tau$  es una magnitud aleatoria que no depende de  $v$  y que tiene distribución geométrica de parámetro  $s$ :

$$P\{\tau = k\} = s^k (1-s), \quad k \geq 0 \quad (1.14)$$

con la función generadora

$$p_{\tau}(z) = Mz^{\tau} = \frac{s}{1-sz}. \quad (1.15)$$

La igualdad (1.13) puede interpretarse del modo siguiente:  $p(s) = Mz^v$  es la probabilidad de que el número de éxitos  $v$  en cierta prueba no es superior al número de éxitos en las pruebas de Bernoulli, siendo la probabilidad del éxito en una prueba aislada igual a  $s$ .

Una composición (convolución) de dos distribuciones de valores enteros  $\{p_k; k \geq 0\}$  y  $\{q_k; k \geq 0\}$  se da mediante la fórmula

$$c_k = \sum_{r=0}^k p_r q_{k-r} = \sum_{r=0}^k p_{k-r} q_r, \quad k \geq 0 \quad (1.16)$$

y se designa por

$$\{c_k; k \geq 0\} = \{p_k; k \geq 0\} * \{q_k; k \geq 0\}. \quad (1.17)$$

La distribución de una suma  $\gamma = \mu + \nu$  de dos magnitudes aleatorias independientes con las distribuciones de las probabilidades de los sumandos  $\{p_k; k \geq 0\}$  y  $\{q_k; k \geq 0\}$  se define por la composición (1.16):

$$P(\mu + \nu = k) = c_k = \sum_{r=0}^k p_r q_{k-r}, \quad k \geq 0. \quad (1.18)$$

Una función generadora  $p_\nu(z)$  de la suma  $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  de magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de las funciones generadoras de los sumandos:

$$p_\nu(z) = p_{v_1}(z) p_{v_2}(z) \dots p_{v_n}(z). \quad (1.19)$$

Sea  $v$  una magnitud aleatoria no negativa de valores enteros cuya función generadora es  $\varphi(z) = Mz^v$ . La función generadora  $p_\gamma(z)$  de la suma  $\gamma = \sum_{k=1}^n \mu_k$  de las magnitudes aleatorias igualmente distribuidas  $\mu_k$ , independientes entre sí y de  $v$ , y cuya función generadora es  $p(z) = Mz^{\mu_k}$ , es igual a la superposición de las funciones generadoras  $\varphi(z)$  y  $p(z)$ :

$$p_\gamma(z) = \varphi[p(z)]. \quad (1.20)$$

3.1.2. Ejemplos. 1. Una distribución binomial  $B_p(n, k) = C_n^k p^k q^{n-k}$  ( $q = 1 - p$ ) tiene la función generadora

$$b_p(n, z) = (q + pz)^n. \quad (1.21)$$

Una magnitud aleatoria  $v$  con distribución binomial puede representarse en forma de la suma  $v = \sum_{h=1}^n \mu_h$  de magnitudes aleatorias independientes de Bernoulli igualmente distribuidas cuya función generadora es  $p_{\mu_h}(z) = q + pz$ , y que toman dos valores: 0 con la probabilidad  $q$ , y 1, con la probabilidad  $p$ .

2. Una distribución de Poisson  $p_k(a) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ,  $k \geq 0$  ( $a > 0$ ) tiene la función generadora

$$p(z, a) = e^{-a(1-z)}. \quad (1.22)$$

Una suma  $\mu + \nu$  de magnitudes aleatorias independientes que tienen una distribución de Poisson de parámetros  $a$  y  $b$ , tiene la distribución de Poisson de parámetro  $a + b$ .

3. La distribución de Poisson compleja se da por la función generadora

$$H(z) = e^{-c} [1 - P(z)]^c, \quad P(z) = Mz^\mu. \quad (1.23)$$

Una magnitud aleatoria  $\gamma$  con distribución de Poisson compleja (1.23) es representable en forma de la suma  $\gamma = \sum_{k=1}^{\nu} \mu_k$ , en la cual los

sumandos  $\mu_k$  son unas magnitudes independientes igualmente distribuidas con la función generadora  $p(z) = Mz^\mu$ , mientras que el número de sumandos  $\nu$ , independiente de  $\mu_k$  ( $k \geq 1$ ), tiene la distribución de Poisson con la función generadora  $Mz^\nu = e^{-c}(1-z)^c$ .

3.1.3. Teorema de continuidad y teorema de Tauber.

**Teorema de continuidad.** Sea  $p_h^{(n)}$  una sucesión de distribuciones de probabilidades de las magnitudes aleatorias de valores enteros  $\nu_n$  con funciones generadoras  $p_n(z)$ . Para que las distribuciones converjan con todo  $k \geq 0$  finito

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_h^{(n)} = p_h, \quad (1.24)$$

es necesario y suficiente que para cualquier  $s$  del intervalo  $0 \leq s < 1$  se verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(s) = p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k. \quad (1.25)$$

De la función  $L(t)$ , definida en el semieje  $(0, +\infty)$ , suele decirse que es de variación lenta para  $t \rightarrow \infty$ , si con cualquier  $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L(tx)/L(t) = 1.$$

La función de variación lenta  $L(t)$  puede ser representada en la forma

$$L(t) = a(t) \exp \int_1^t \frac{\varepsilon(y)}{y} dy, \quad (1.26)$$

donde  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$  y  $a(t) \rightarrow a < \infty$ , cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $a \neq 0$ .

**Teorema de Tauber.** Supongamos que la serie  $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  converge para  $0 \leq a < 1$  y  $a_n \geq 0$ . En este caso son equivalentes las dos siguientes correlaciones ( $0 \leq c < \infty$ ):

$$(1-s)^c a(s) \sim L\left(\frac{1}{1-s}\right) \text{ para } s \rightarrow 1-0 \quad (1.27)$$

y

$$\frac{1}{n^c} \sum_{k=0}^n a_k \sim \frac{1}{\Gamma(c+1)} L(n) \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (1.28)$$

Si la sucesión  $a_n$  es monótona y  $0 < c < \infty$ , entonces la correlación (1.27) es equivalente a la correlación

$$\frac{a_n}{n^{c-1}} \sim \frac{1}{\Gamma(c)} L(n) \text{ para } n \rightarrow \infty. \quad (1.29)$$

Aquí,  $\Gamma(c) = \int_0^{\infty} x^{c-1} e^{-x} dx$

En particular, cuando  $L(t) \equiv A$ , las correlaciones (1.27)–(1.29) tienen, respectivamente, las siguientes formas:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1-0} (1-s)^c a(s) = A; \quad (1.30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^c} \sum_{h=0}^n a_h = \frac{A}{\Gamma(c+1)}; \quad (1.31)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{c-1}} = \frac{A}{\Gamma(c)}. \quad (1.32)$$

### 3.2. Transformación de Laplace

3.2.1. Definición. Fórmulas de inversión. Sea  $\xi$  una magnitud aleatoria no negativa con función de distribución de las probabilidades  $P(x) = \mathbb{P}\{\xi \leq x\}$ .

Se denomina transformación de Laplace  $p(s)$  de la distribución  $P(x)$  (o bien de la magnitud aleatoria  $\xi$ ) la función

$$p(\lambda) = M e^{-\lambda \xi} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dP(x), \quad (2.1)$$

definida para  $\text{Re } \lambda \geq 0$ , y analítica para  $\text{Re } \lambda > 0$ .

Se supone que el punto 0 está incluido en el dominio de integración.

**Teorema de inversión.** La distribución  $P(x)$  se determina unívocamente por su transformación de Laplace  $p(\lambda)$  en todo punto de continuidad de la distribución

$$P(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sum_{h \leq \lambda x} \frac{(-\lambda)^h}{h!} p^{(h)}(\lambda). \quad (2.2)$$

Aquí,  $p^{(h)}(\lambda)$  es una derivada de orden  $h$ :  $p^{(h)}(\lambda) = (-1)^h \times \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x^h dP(x)$ .

La transformación de Laplace  $p(s)$  puede ser representada en forma de la serie

$$p(\lambda) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^h}{h!} m_h, \quad m_h = M \xi^h = \int_0^{\infty} x^h dP(x), \quad h \geq 1, \quad (2.3)$$

en todo intervalo  $0 \leq \lambda < \lambda_0$ , donde la serie converge. Si tal intervalo de convergencia de la serie (2.3) existe, la sucesión de los momentos  $\{m_k, k \geq 0\}$  determinará unívocamente la distribución  $P(x)$ .

La transformación de Laplace  $p(\lambda)$ , para  $\lambda > 0$  reales, posee un sentido probabilístico:

$$p(\lambda) = P\{\xi \leq \tau\}, \quad \lambda > 0, \quad (2.4)$$

donde  $\tau$  es una magnitud aleatoria que no depende de  $\xi$  y que tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ :

$$P\{\tau > t\} = e^{-\lambda t} \quad (2.5)$$

con la transformación de Laplace  $Me^{-s\tau} = \frac{\lambda}{\lambda + s}$ .

La igualdad (2.4) se interpreta en las aplicaciones de la manera siguiente:  $p(\lambda) = Me^{-\lambda\xi}$  para  $\lambda > 0$  es la probabilidad de que el momento del éxito  $\xi$  (restablecimiento, llamada, denegación, etc.) tiene lugar hasta que llegue el momento de acabar las observaciones  $\tau$ , que tiene distribución exponencial.

Si la distribución  $P(x)$  tiene la densidad  $u(x) = P'(x)$ , la transformación de Laplace tendrá por expresión

$$p(\lambda) = Me^{-\lambda\xi} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} u(x) dx, \quad (2.6)$$

La fórmula de inversión en este caso adquiere la forma:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \left(\frac{n}{x}\right)^n p^{(n-1)}\left(\frac{n}{x}\right), \quad (2.7)$$

o bien, para casi cualesquiera  $x \geq 0$

$$[u(x) = \frac{d}{dx} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(\lambda) e^{\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad (2.8)$$

donde  $c > 0$ , y la integral se calcula a lo largo de cualquier recta  $\text{Re } \lambda = c > 0$ , siendo entendida en el sentido del valor principal, es decir, como un límite de la integral a lo largo del segmento  $(c - iA, c + iA)$  para  $A \rightarrow \infty$ .

Si la densidad de distribución  $u(x)$  es continua, entonces

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} p(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda.$$

La distribución  $F(x)$  de una suma  $\zeta = \xi + \eta$  de dos magnitudes aleatorias independientes no negativas  $\xi$  y  $\eta$  con las funciones de



distribución  $P(x)$  y  $Q(x)$  se determinará mediante la convolución

$$F(x) = \int_0^x Q(x-y) dP(y) = \int_0^x P(x-y) dQ(y) \quad (2.9)$$

y se designará con el símbolo  $*$ :  $F = P * Q$ .

La transformación de Laplace  $P_{\xi+\eta}(\lambda)$  de la suma de dos magnitudes aleatorias independientes  $\xi + \eta$  es igual al producto de las transformaciones de Laplace de los sumandos:

$$P_{\xi+\eta}(\lambda) = P_{\xi}(\lambda) P_{\eta}(\lambda). \quad (2.10)$$

La igualdad (2.10) es equivalente a la que sigue:

$$M e^{-\lambda(\xi+\eta)} = M e^{-\lambda\xi} M e^{-\lambda\eta}. \quad (2.11)$$

Sea  $v$  una magnitud aleatoria no negativa de valores enteros con la función generadora  $\varphi(z) = Mz^v$ . La transformación de Laplace

$p_{\eta}(\lambda)$  de la suma  $\eta = \sum_{k=1}^v \xi_k$  de las magnitudes aleatorias igualmente distribuidas  $\xi_k$  (que son independientes entre sí y no dependen de  $v$ ) con la transformación de Laplace  $p(\lambda) = M e^{-\lambda\xi_k}$  se determinará por la superposición de las funciones  $\varphi(z)$  y  $p(\lambda)$ :

$$P_{\eta}(\lambda) = M e^{-\lambda \sum_{k=1}^v \xi_k} = \varphi(p(\lambda)). \quad (2.12)$$

### 3.2.2. Teorema del límite. Funciones totalmente monótonas.

**Teorema de continuidad.** Si una sucesión  $P_n(x)$  de funciones de distribución converge hacia la distribución  $P(x)$ , entonces sus transformaciones de Laplace  $p_n(\lambda)$  convergen hacia  $p(\lambda)$ , que es la transformación de Laplace de la distribución límite  $P(x)$  en todo punto  $\lambda > 0$ . Y viceversa, si la sucesión de las transformaciones de Laplace  $p_n(\lambda)$  converge, para todo  $\lambda > 0$ , hacia el límite  $p(\lambda)$ , entonces dicho límite es una transformación de Laplace de la distribución de probabilidades  $P(x)$ , y  $P_n(x)$  converge hacia  $P(x)$ . La distribución límite  $P(x)$  es propia ( $P(+\infty) = 1$ ) cuando y sólo cuando,  $p(\lambda) \rightarrow 1$  para  $\lambda \rightarrow 0$ .

Una función  $p(\lambda)$ , dada en el intervalo  $(0, \infty)$  se denomina totalmente monótona, si tiene las derivadas  $p^n(\lambda)$  para todo  $n > 0$ , y, además,

$$(-1)^n p^n(\lambda) \geq 0, \quad \lambda > 0. \quad (2.13)$$

**Teorema de presentación.** Una función  $p(\lambda)$  en  $(0, \infty)$  es una transformación de Laplace de la distribución  $P(x)$  cuando, y sólo cuando, es totalmente monótona y  $p(0) = 1$ .

Del teorema se deduce un criterio útil de la representabilidad de una función en forma de la transformación de Laplace de una distribución de probabilidades.

**Criterio del carácter totalmente monótono.** 1. Un producto de las funciones totalmente monótonas es una función totalmente monótona.

2. La superposición  $\varphi(p(\lambda))$  de una función totalmente monótona  $\varphi(\lambda)$  con una función positiva  $p(\lambda)$ , cuya derivada es totalmente monótona, es también totalmente monótona.

3. El límite de una sucesión de funciones totalmente monótonas es una función totalmente monótona.

**Principio de desplazamiento.** Sea  $U(x)$  una medida en el semieje  $(0, \infty)$  con la transformación de Laplace  $u(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} U(dx)$  que converge con  $\lambda \geq 0$ . En este caso, la función

$$p(\lambda) = \frac{U(\lambda+a)}{U(a)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dP(x) \quad (2.14)$$

es una transformación de la distribución de probabilidades

$$P(x) = \frac{1}{U(a)} \int_0^x e^{-ay} U(dy). \quad (2.15)$$

El principio de desplazamiento permite que todas las afirmaciones referentes a las transformaciones de Laplace de las distribuciones de probabilidades sean aplicadas a las transformaciones de Laplace de las medidas concentradas en el semieje  $(0, \infty)$ .

**Teorema de Tauber.** Para una transformación de Laplace  $u(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dU(x)$  de la medida  $U(x)$  las correlaciones  $(0 \leq c < \infty)$

$$U(\lambda) \sim \lambda^{-c} L\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{para } \lambda \rightarrow 0 \quad (2.16)$$

y

$$U(x) \sim \frac{x}{\Gamma(c+1)} L(x) \quad \text{para } x \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

son equivalentes. Si existe la densidad monótona  $U'(x)$ , de la correlación (2.17), para  $0 < c < \infty$ , se deduce:

$$U'(x) \sim \frac{x^{c-1}}{\Gamma(c)} L(x) \quad \text{para } x \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Aquí,  $L(x)$  es una función de variación lenta:  $\lim_{x \rightarrow \infty} L(tx)/L(x) = 1$  para cualquier  $t > 0$ .

**EJEMPLO 1** La distribución exponencial  $P(x) = 1 - e^{-ax}$  ( $a > 0$ ) tiene la distribución de Laplace

$$p(\lambda) = \frac{a}{a+\lambda}. \quad (2.19)$$

**EJEMPLO 2.** La distribución gamma con una densidad de probabilidades

$$u(x, \rho, a) = \frac{1}{\Gamma(\rho)} a^\rho x^{\rho-1} e^{-ax}, \quad x > 0, a > 0, \rho > 0 \quad (2.20)$$

tiene la transformación de Laplace

$$p(\lambda; \rho, a) = \left( \frac{a}{a + \lambda} \right)^\rho. \quad (2.21)$$

**EJEMPLO 3.** La distribución de Poisson compleja se da por la transformación de Laplace

$$p(\lambda) = \exp a \int_0^\infty (e^{-\lambda x} - 1) dP(x) \quad (a > 0). \quad (2.22)$$

Una función correspondiente de distribución puede representarse en la forma

$$P(x) = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} F^{n*}(x), \quad (2.23)$$

donde  $F^{n*}(x)$  es una convolución  $n$ -múltiple de la función de distribución  $F(x)$  con sí misma.

Una magnitud aleatoria  $\zeta$  con la distribución (2.23) puede ser representada en la forma  $\zeta = \sum_{k=1}^n \xi_k$ , donde  $\xi_k$  son magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas con la función  $F(x)$ , y es una magnitud aleatoria independiente de  $\xi_k$  con la distribución de Poisson de parámetro  $a$ .

El concepto de transformación de Laplace se extiende de modo natural a las distribuciones multidimensionales. La definición (2.1) subsiste también en el caso en que  $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , siempre que por  $x$  y  $\lambda$  se entienden los vectores:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , y su producto  $\lambda x$ , como el producto escalar de

los vectores:  $\lambda x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ .

### 3.3. Funciones características

**3.3.1. Definición. Propiedades fundamentales.** Llamamos función característica (f.c) de la magnitud aleatoria  $\xi$  con la función de distribución  $F(x) = P(\xi < x)$  una función de valor complejo

$$f(t) = M e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x). \quad (3.1)$$

En particular, si existe la densidad de distribución de las probabilidades  $p(x) = F'(x)$ , la función característica será la transformación de Fourier de la densidad de distribución:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx. \quad (3.2)$$

Para una magnitud aleatoria discreta, que toma los valores  $x_k$  con la probabilidad  $p_k$ , la f.c. se representa mediante la serie

$$f(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k. \quad (3.3)$$

La función característica está definida para cualquier magnitud aleatoria, siempre que  $t$  sea real.

**Propiedades fundamentales de la función característica.**

1.  $f(0) = 1$ ,  $|f(t)| \leq 1$ ,  $-\infty < t < +\infty$ .
2.  $f(t)$  es uniformemente continua en el eje numérico.
3. Cuando todo  $n > 0$  es entero, para cualesquiera números complejos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  y cualesquiera números reales  $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\sum_{k, r=1}^n f(t_k - t_r) z_k \bar{z}_r \geq 0. \quad (3.4)$$

Esta propiedad implica la definición positiva de la f.c.

4.  $f(-t) = \bar{f}(t)$ , es decir, forma hermitiana.
5. La función característica de una suma de magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de f.c. de los sumandos:

$$f_{z_1 + z_2}(t) = f_{z_1}(t) f_{z_2}(t). \quad (3.4')$$

6. Si  $\eta = at + b$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes,

$$f_\eta(t) = f_\xi(at) e^{ibt}. \quad (3.4'')$$

Las propiedades fundamentales 1—3 de la f.c. son características.

**Teorema de Bohner—Jinchin.** Para que una función continua  $f(t)$ , definida en un eje real y que satisfice la condición  $f(0) = 1$ , sea característica, es necesario y suficiente que esté positivamente definida.

**3.3.2 Ejemplos.** 1. Una distribución normal con la densidad

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \text{ tiene función característica } f(t) = e^{iat - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

2. Una distribución uniforme en el intervalo  $|x| < a$  tiene función característica  $f(t) = \frac{\text{sen } at}{at}$ .

3. Una distribución de Poisson  $p_k = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$ ,  $k \geq 0$  tiene f.c.

$$f(t) = e^{a(e^{it} - 1)}.$$

4. La distribución de Bernoulli  $B_k(n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , tiene la función característica  $f(t) = (q + pe^{it})^n$ , ( $q = 1 - p$ ).

5. La distribución gamma de densidad  $\frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x}$ ,  $x > 0$ ,  $p > 0$ , tiene la función característica  $f(t) = (1 - it)^{-p}$ .

**3.3.3. Uniformidad recíproca y continuidad de la correspondencia entre la función característica y las distribuciones de probabilidades.**

**Teorema de inversión.** Una función de distribución se determina unívocamente mediante su f.c.  $f(t)$ . Tiene lugar la siguiente fórmula de

*Inversión*

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f(t) dt, \quad (3.5)$$

válida para cualesquiera puntos  $x$  e  $y$  de continuidad de la distribución  $F(x)$ .

En particular, si  $|f(t)/t|$  es integrable en el infinito, entonces

$$F(x) - F(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} f(t) dt. \quad (3.6)$$

Si, en cambio, la función característica  $f(t)$  es sumable en el eje real, entonces la función de distribución  $F(x)$  tiene la densidad continua acotada  $p(x) = F'(x)$ , la cual se determina por la fórmula

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt. \quad (3.7)$$

Para la distribución en retículo

$$p_k = P\{\xi = a + kh\} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-it(a+kh)} f(t) dt. \quad (3.8)$$

Diversas fórmulas de inversión se pueden obtener haciendo uso de la igualdad de Parseval. Sean  $f(t) = Me^{i\xi}$  y  $\varphi(t) = Me^{i\eta}$  funciones características de las magnitudes aleatorias independientes  $\xi$  y  $\eta$  con las funciones de distribución  $F(x) = P\{\xi < x\}$  y  $\Phi(x) = P\{\eta < x\}$ . La igualdad de Parseval se da mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dF(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) d\Phi(t). \quad (3.9)$$

El primero y el segundo miembros de la fórmula (3.9) son distintas formas para anotar las expresiones de  $Me^{i\xi}$ .

Una de las variantes de anotación de la igualdad de Parseval está representada por la fórmula de inversión (con suavización):

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma^2}} dF(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} f(t) dt. \quad (3.10)$$

La magnitud de los saltos de una función de distribución se determina por la correlación

$$F(x+0) - F(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} f(t) dt. \quad (3.11)$$

De suerte que en los puntos de continuidad  $x$  de la distribución  $F(x)$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} f(t) dt = f(x), \quad (3.12)$$

**Teorema de continuidad.** Una sucesión de las funciones de distribución  $F_n(x)$  converge débilmente hacia la distribución de probabilidades  $F(x)$ , cuando, y sólo cuando, la sucesión de sus funciones características  $f_n(t)$  converge hacia la función límite continua  $f(t)$ . En este caso  $f(t)$  es una función característica de la distribución límite  $F(x)$  y la convergencia de  $f_n(t)$  hacia  $f(t)$  es uniforme en todo intervalo finito.

Si una sucesión de funciones características integrables  $f_n(t)$  converge en media hacia f.c. límite  $f(t)$ , es decir,  $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)| \times \times dt \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ , entonces la sucesión de las correspondientes densidades de distribución  $p_n(x)$  converge uniformemente hacia la densidad límite de distribución  $p(x)$ .

**3.3.4. Propiedades de la regularidad.** 1. Si la función de distribución  $F(x)$  es absolutamente continua, entonces  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$ .

2. Si la función de distribución  $F(t)$  tiene una componente absolutamente continua, entonces  $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| < 1$ .

3. Para la distribución en retículo  $p_k = P\{\xi = a + kh\}$  la función característica puede ser representada en la forma

$$f(t) = e^{-iat} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikh} p_k, \quad (3.13)$$

de modo que  $\left| f\left(\frac{2\pi}{h}\right) \right| = 1$ . Y viceversa, si para cierto  $t_0 \neq 0$   $|f(t_0)| = 1$ , la distribución correspondiente será en retículo.

El paso máximo de la distribución es igual a  $h$ , cuando, y sólo cuando, el módulo de la f.c. es menor que la unidad para  $0 < |t| < \frac{2\pi}{h}$ , y es igual a la unidad para  $t = \frac{2\pi}{h}$ .

4. Para una función característica arbitraria  $f(t)$  existe

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = \sum_h p_h^2, \quad (3.14)$$

donde  $p_h$  son las magnitudes de los saltos de la función de distribución, y la adición se realiza según todos los saltos.

5. Si la función de distribución  $F(x)$  satisface la condición de Lipschitz con el exponente  $\gamma < 1$ , entonces, para  $T \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt = O(T^{-\gamma}), \quad (3.15)$$

De la condición

$$\int_1^{\infty} t^{\gamma-1} |f(t)| dt < \infty \quad (3.16)$$

proviene que la función de distribución  $F(x)$  satisface la condición de Lipschitz con el exponente  $\gamma$ .

6. Sea  $f(t)$  una función continua par no negativa y convexa en el dominio  $t > 0$ . Supongamos que satisface las condiciones  $f(0) = 1$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$ . En este caso  $f(t)$  es una función característica. De aquí se deduce que existen funciones características que coinciden en los intervalos finito o infinito, pero no son idénticamente iguales.

7. Si las funciones características tienen la forma  $f(t) = \exp P_k(t)$ , donde  $P_k(t)$  es un polinomio de grado  $k$ , entonces  $k \leq 2$ , es decir, en este caso  $f(t) = \exp \left\{ iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}$ , donde  $a$  y  $\sigma$  son parámetros reales.

8. La función característica de una magnitud aleatoria no negativa no puede reducirse a cero en un intervalo finito.

9. La función característica  $f(t)$  es real ( $\overline{f(t)} = f(t)$ ), cuando, y sólo cuando, la distribución correspondiente es simétrica:  $1 - F(-x+0) = F(x)$ .

3.3.5. Momentos y semiinvariantes. Los momentos de una magnitud aleatoria  $\xi$  se determinan por los valores de las derivadas correspondientes de la función característica:

$$m_k = M\xi^k = -i^k f^{(k)}(0), \quad k \geq 1. \quad (3.17)$$

Si existe el momento absoluto  $a_N = M|\xi|^N < \infty$ , tiene lugar el desarrollo

$$f(t) = 1 + \sum_{h=1}^N \frac{(it)^h}{h!} m_h + o(t^N). \quad (3.18)$$

Para valores de  $t$  suficientemente pequeños la suma principal de  $\log f(t)$ , que tiende a 0 junto con  $t$ , puede ser representada en la forma

$$\log f(t) = \sum_{h=1}^N \frac{(it)^h}{h!} \gamma_h + o(t^N), \quad (3.19)$$

donde los semiinvariantes  $\gamma_h$  se determinan mediante la fórmula

$$\gamma_h = \frac{1}{i^h} \left[ \frac{d^h}{dt^h} \log f(t) \right]_{t=0}. \quad (3.20)$$

La relación entre los semiinvariantes  $\gamma_k$  y los momentos  $m_k = M\xi^k$  se expresará mediante la fórmula

$$\gamma_h = k! \sum_{n_1+\dots+n_k=h} (-1)^{n_1+\dots+n_k-1} (n_1+\dots+n_k-1)! \prod_{l=1}^k \frac{1}{n_l!} \left( \frac{m_l}{i^l} \right)^{n_l}. \quad (3.21)$$

La adición se realiza según todas las soluciones no negativas y enteras de la ecuación  $n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k = k$ .

Para que exista el momento absoluto de orden  $n$  par  $a_{2n} < \infty$ , es necesario y suficiente que  $f(t) = P_{2n}^{(1)}(t) + O(t^{2n})$  para  $t \rightarrow 0$ , donde  $P_{2n}(t)$  es un polinomio de grado  $2n$ .

Para que exista la derivada  $f^{(k)}(0)$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^h (1 - F(x) + F(-x)) &= 0; \\ \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x^h dF(x) &= m_h. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

En este caso  $f^{(k)}(0) = i^k m_k$ .

**3.3.6. Desigualdades.** Con objeto de estimar las funciones características se utiliza la siguiente desigualdad:

$$\left| e^{it} - \sum_{h=0}^n \frac{(it)^h}{h!} \right| \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.23)$$

para cualesquiera  $n \geq 1$  y  $t > 0$ .

Sean  $\tau > 0$  y  $x > 0$  tales que  $\tau x > 1$ . En este caso

$$\left(1 - \frac{1}{\tau x}\right) P\{|\xi| \leq x\} \geq \left|\frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} f(t) dt\right| - \frac{1}{\tau x}. \quad (3.24)$$

De esta igualdad se deduce, en particular, que la equicontinuidad de la familia de funciones características en el cero es equivalente a la compacidad débil de la familia correspondiente de distribuciones.

2. Para todos los  $t$  reales se verifica la desigualdad

$$0 \leq 1 - \operatorname{Re} f(2t) \leq 4(1 - \operatorname{Re} f(t)). \quad (3.25)$$

3. Si  $|f(t)| \leq c < 1$  para  $|t| \geq \varepsilon > 0$ , entonces para  $|t| < \varepsilon$

$$|f(t)| \leq 1 - \frac{1-c^2}{8\varepsilon^2} t^2. \quad (3.26)$$

4. Para una magnitud aleatoria acotada  $\xi$  con  $|\xi| < c$  y la varianza  $\sigma^2$  la función característica satisface las desigualdades

$$e^{-\sigma^2 t^2} \leq |f(t)| \leq e^{-\frac{1}{3}\sigma^2 t^2} \quad \text{para } |t| \leq \frac{1}{4c}. \quad (3.27)$$

5. La función característica  $f(t)$  de una magnitud aleatoria, con densidad acotada  $p(x) \leq c$  y con varianza finita, satisface las desigualdades

$$|f(t)| \leq \exp\left\{-\frac{A}{c^2 \sigma^2}\right\} \quad \text{para } |t| \geq \frac{\pi}{\sigma}; \quad (3.28)$$

$$|f(t)| \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{96c^2(2\sigma^2|t| + \pi)^2}\right\} \quad \text{para cualquier } t. \quad (2.29)$$



3.3.7. Funciones características de las distribuciones multidimensionales. Sea  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  un vector aleatorio cuyos valores están definidos en el espacio euclidiano  $R_n$  con la f.c.  $F(x) = P\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n\}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_n$ . La función característica del vector aleatorio  $\xi$  se determinará mediante la igualdad

$$f(t) = M e^{it\xi} = \int_{R_n} e^{itx} dF(x), \quad (3.30)$$

donde  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ ,  $tx = \sum_{h=1}^n t_h x_h$  es el producto escalar de los vectores  $t$  y  $x$ .

Las propiedades de las funciones características de las distribuciones multidimensionales son análogas a las de las funciones características de las magnitudes aleatorias. Indiquemos algunas diferencias. Se llaman momentos del vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  los números

$$m_{k_1 k_2 \dots k_n} = M(\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}). \quad (3.31)$$

El número  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$  recibe el nombre de orden del momento. Los momentos de índices enteros los podemos determinar por derivación de la función característica

$$m_{k_1 k_2 \dots k_n} = \left. \frac{(-i)^k \partial^{k_1} f(t)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \right|_{t=0}. \quad (3.32)$$

EJEMPLO 1. La distribución normal bidimensional se da por la densidad de las probabilidades

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[ \frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x-a)(x-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x-b)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

con la función característica

$$f(t_1, t_2) = \exp \left\{ iat_1 + ibt_2 - \frac{1}{2} (\sigma_1^2 t_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2 r t_1 t_2 + \sigma_2^2 t_2^2) \right\}.$$

Los parámetros de distribución tienen el siguiente significado:

$$a = M\xi_1, \quad b = M\xi_2, \quad \sigma_1^2 = M\xi_1^2, \quad \sigma_2^2 = M\xi_2^2, \quad r = \frac{M(\xi_1\xi_2)}{\sigma_1\sigma_2}.$$

EJEMPLO 2. La distribución normal multidimensional se da por a densidad

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) \right\},$$

donde  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h,r=1}^n b_{hr}(x_h - a_h)(x_r - a_r)$  es una forma

definida positivamente,  $D = \det B$ . La matriz  $B = \{b_{kr}, 1 \leq k, r \leq n\}$ . La función característica correspondiente tendrá la expresión

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp \left\{ it' - \frac{1}{2} t \sigma t' \right\},$$

donde la matriz de los segundos momentos  $\sigma = \{\sigma_{ij}, 1 \leq i < j \leq n\}$  se determina por las correlaciones  $\sigma = B^{-1}$ ;  $\sigma_{ij} = M \xi_i \xi_j$ .

**TEOREMA DEL LÍMITE CENTRAL**

El término teorema del límite central significa en la teoría de probabilidades cualquier afirmación acerca de que al cumplirse ciertas condiciones, la función de distribución de una suma de magnitudes aleatorias individualmente pequeñas converge con el crecimiento del número de sumandos hacia una función de distribución normal. La importancia exclusiva del teorema del límite central se debe al hecho de que explica teóricamente la siguiente observación confirmada reiteradamente en la práctica: si el resultado de un experimento aleatorio se determina con un gran número de factores aleatorios y la influencia de cada uno de ellos es tan pequeña que puede despreciarse, entonces tal experimento se aproxima con éxito mediante una distribución normal, siendo escogidas de manera adecuada la esperanza matemática y la varianza.

**4.1. Teorema del límite central para las sucesiones de magnitudes aleatorias independientes**

**4.1.1. Teorema del límite central al haber varianzas finitas.** Sea  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independiente con funciones de distribución  $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$ , que tienen esperanzas matemáticas finitas  $M\xi_k = a_k$  y varianzas  $D\xi_k = \sigma_k^2$ , con la particularidad de que  $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0$  para

$n \geq 1$ .

Se denomina suma normada de las magnitudes aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  la magnitud aleatoria

$$\eta_n = B_n^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k),$$

la cual se caracteriza porque  $M\eta_n = 0$ ,  $D\eta_n = 1$  para todo  $n \geq 1$ .

Supongamos que  $F_n(x)$  es una función de distribución de la suma normada  $\eta_n$  y  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  es la función de distribución normal  $(0, 1)$ . Si hay varianzas finitas, el teorema del límite

central establece las condiciones bajo las cuales se verifica la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (1.4)$$

uniformemente respecto de  $x \in (-\infty, \infty)$ .

Una de las formas del teorema del límite central más sencilla y que, al mismo tiempo, se utiliza con mayor frecuencia (especialmente en las aplicaciones estadísticas) está relacionada con la sucesión de magnitudes aleatorias igualmente distribuidas.

**Teorema de Levi—Lindeberg.** Si  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes e igualmente distribuidas, para la función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada

$$\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - na}{\sigma \sqrt{n}} \text{ se verifica la correlación (1.4)}$$

Un caso de importancia particular del teorema de Levi—Lindeberg enunciado para las magnitudes aleatorias  $\xi_k$ , que tienen la distribución de Bernoulli, representa el

**Teorema del límite central de Moivre — Laplace (teorema integral de Moivre—Laplace).** Si  $v_n$  son los números de apariciones de cierto suceso en una serie de  $n$  pruebas independientes, en cada una de las cuales la probabilidad de aparición de dicho suceso es igual a  $p$ , siendo  $0 < p < 1$ , entonces para la función de distribución  $F_n(x)$  de la desviación normada del número medio de aparición del suceso  $\eta_n = \frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$  se verifica la correlación (1.4).

**EJEMPLO 1** Se requiere estimar la probabilidad con que la frecuencia de aparición del suceso  $\frac{v_n}{n}$  en el esquema de las pruebas de Bernoulli se desvía de la probabilidad  $p$ ,  $0 < p < 1$ , a una magnitud no mayor que  $\varepsilon$ , donde  $\varepsilon$  es un número positivo arbitrario.

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \frac{v_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} &= P \left\{ \left| \frac{v_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right\} = \\ &= P \left\{ |\eta_n| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right\} = F_n \left( \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right) - \\ &\quad - F_n \left( -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right). \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon$  y  $n$  son de tal género que  $\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \leq x$ , donde  $x$  es un número finito (fijado), entonces, en virtud del teorema integral de

$$P \left\{ \left| \frac{v_n}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\} \sim \Phi \left( \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right) - \Phi \left( -\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}}^{\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Para valores concretos de  $n, p, \varepsilon$  el segundo miembro de esta igualdad se determina de las tablas para la función de distribución normal.

En el caso de magnitudes aleatorias de distribución desigual una de las razones fundamentales, en virtud de la cual la función de distribución normal  $F_n(x)$  de la suma normal  $\eta_n$  puede no converger hacia una función normal de distribución, se debe a la distinta contribución de los sumandos en la suma  $\eta_n$  como también a la desigual valía de dichos sumandos en la suma  $\eta_n$ . Una de las condiciones que aseguran «la pequeñez uniforme» de los sumandos  $\frac{\xi_h - a_h}{B_n}$  en  $\eta_n$  consiste en la «pequeñez uniforme»

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq h \leq n} \frac{\sigma_h}{B_n} = 0. \quad (1.2)$$

No obstante, esta condición no es suficiente para que se cumpla el teorema del límite central. Esto lo demuestra el siguiente ejemplo.

Sea  $P\{\xi_h = 0\} = 1 - \frac{1}{k^2}$ ,  $P\{\xi_h = \pm k^2\} = \frac{1}{2k^2}$ . Entonces,  $M\xi_h = 0$ ,

$D\xi_h = 1$ ,  $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{h=1}^n \xi_h$ . Para la magnitud  $\eta_n$  la correlación

(1.1) no se verifica, dado que  $\eta_n \rightarrow 0$  con la probabilidad 1, como

consecuencia de que la serie  $\sum_{h=1}^{\infty} \xi_h$  converge con la probabilidad 1.

Lo último se deduce de que

$$\sum_{h=1}^{\infty} P\{\xi_h \neq 0\} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

y consecuentemente, en virtud del teorema de Borel—Cantelli, entre las magnitudes  $\xi_h$  solamente un número finito de ellas son distintas de cero con la probabilidad 1.

Las condiciones de suficiencia, que se comprueban con la mayor comodidad son proporcionadas por el siguiente teorema.

**Teorema de Liapunov.** Si para una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^{2+\delta} = 0, \quad (1.3)$$

entonces para la función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)}{B_n} \quad \text{se verifica la correlación (1.1).}$$

La expresión (1.3) lleva el nombre de condición de Liapunov.

A la par con (1.1) la condición de Liapunov es suficiente para que se cumpla la correlación

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} dF_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2+\delta} d\Phi(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Si tiene lugar la convergencia hacia la distribución normal (1.1) y se ha cumplido la correlación (1.4), entonces la condición de Liapunov es necesaria para que tenga lugar la pequeñez uniforme en el sentido (1.2).

**EjemPlo 2** Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  son recíprocamente independientes y tienen la distribución

$$P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2}.$$

En este caso  $M\xi_k = 0$ ,  $D\xi_k = \sigma_k^2 = k^2$ ,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$M|\xi_k|^3 = k^3, \quad \sum_{k=1}^n M|\xi_k|^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^n M|\xi_k|^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{n^4}{4^{4+1/2}} = 0,$$

y, de este modo, resulta cumplida la condición de Liapunov,

Según el teorema de Liapunov,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k < x \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \right\} = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k < xn \sqrt{\frac{n}{3}} \right\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Una condición más general que asegura el cumplimiento del teorema del límite central para las sucesiones de magnitudes aleatorias  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  dotadas de varianzas finitas es la condición de Lindeberg: para  $\varepsilon > 0$  cualquiera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dG_k(x) = 0,$$

donde  $G_k(x)$  es la función de distribución de las magnitudes aleatorias  $\xi_k$ .

**Teorema de Lindeberg — Feller.** Sea  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes. Con el fin de conseguir que para las funciones de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada

$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)}{B_n}$  tenga lugar la correlación (1.1) y se cumpla la condición de pequeñez uniforme (1.2), es necesario y suficiente que se cumpla la condición de Lindeberg.

La condición de Liapunov resulta suficiente para el cumplimiento de la de Lindeberg en virtud de la desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dG_k(x) \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon^6} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^{2+\delta}. \end{aligned}$$

**4.1.2. Condiciones generales de convergencia hacia la distribución normal para una sucesión de magnitudes aleatorias independientes.** Sea  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes con las funciones de distribución  $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$

y  $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n$ , donde  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  son ciertas sucesiones de constantes.

En ausencia de la suposición acerca del carácter finito de los momentos puede resultar que existen unas sucesiones de las constantes

$\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tales que para la función de distribución  $F_n(x) = P\{\eta_n < x\}$  tendrá, sin embargo, lugar la correlación (1.1).

**Teorema.** Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_h$  están igualmente distribuidas,  $f(x) = P\{\xi_h < x\}$ . Para que existan las sucesiones de las constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tales que para la función de distribución  $F_n(x) = P\{\eta_n < x\}$  tenga lugar la correlación (1.1), es necesario y suficiente que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 P\{|\xi_1| \geq x\}}{\int_{|z| < x} z^2 dG(z)} = 0. \quad (1.5)$$

La condición (1.5) es equivalente a lo siguiente: la función  $d(x) = \int_{|z| < x} z^2 dG(z)$  es de variación lenta, es decir, para todo  $c > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d(cx)}{d(x)} = 1.$$

Sea  $\xi_1^{(n)}$  la magnitud aleatoria marginada (por el nivel de  $\varphi_n$ )  $\xi_1$ , es decir,

$$\xi_1^{(n)} = \begin{cases} \xi_1, & \text{si } |\xi_1| \leq \varphi_n, \\ 0, & \text{si } |\xi_1| > \varphi_n. \end{cases}$$

donde  $\{\varphi_n\}$  es una sucesión de las constantes positivas,  $\varphi_n \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\left. \begin{aligned} M\xi_1^{(n)} &= \int_{|z| < \varphi_n} z dG(z); \\ D\xi_1^{(n)} &= \int_{|z| < \varphi_n} z^2 dG(z) - \left( \int_{|z| < \varphi_n} z dG(z) \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Las magnitudes  $M\xi_1^{(n)}$  y  $D\xi_1^{(n)}$ , que existen para cualesquiera magnitudes aleatorias, se llaman, respectivamente, *esperanza matemática* y *varianza marginadas* (según el nivel de  $\varphi_n$ ). Las igualdades (1.6) explican el significado de las constantes de normación y centralización  $\beta_n$  y  $\alpha_n$ :

$$\beta_n = \sum_{h=1}^n D\xi_h^{(n)}; \quad \alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n M\xi_h^{(n)}.$$

Suele decirse que si existen las sucesiones de las constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tales que la función de distribución  $F_n(x)$  de una magnitud aleatoria  $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum \xi_h - \alpha_n$  (donde  $\xi_h$  tienen la distribución común  $G(x)$ ) converge hacia la función de distribución  $F(x)$ , entonces  $G(x)$  es atraída a  $F(x)$ , o bien  $G(x)$  pertenece al dominio de atracción de la distribución  $F(x)$ .

La condición (1.5) es necesaria y suficiente para que la distribución  $G(x)$  se atraiga a la distribución normal. Las cuestiones generales



relacionadas con la descripción de todas las distribuciones límites posibles para  $\eta_n$ , están examinadas en el capítulo 5.

**EJEMPLO 3.** Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  tienen densidad de distribución común

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|^3} \ln |x|, & |x| \geq 1, \\ 0, & |x| < 1. \end{cases}$$

La varianza de las magnitudes aleatorias de tal densidad es infinita. No obstante, el segundo momento marginado (según el nivel de  $x \gg 1$ )

$$d(x) = \int_{|z| < x} z^2 g(z) dz = 4 \int_1^x \frac{\ln z}{z} dz = 2 \ln^2 x$$

es una función de variación lenta. Por consiguiente,

$$P \left\{ \frac{\sum_{h=1}^n \xi_h}{\sqrt{2n \ln n}} < x \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x).$$

**Teorema.** Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_k$ ,  $k \geq 1$ , son recíprocamente independientes y  $G_h(x)$  son sus funciones de distribución. Para que existan las sucesiones de las constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tales que se considere cumplida la condición de pequeñez unijorme  $\lim \max P(|\xi_k| > \varepsilon \beta_n) = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ , y para la función de distribución

$F_n(x)$  de la magnitud aleatoria  $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \xi_h - \alpha_n$  se verifica la correlación (1.1), es necesario y suficiente que exista una sucesión de las constantes  $\gamma_n$ ,  $\gamma_n \rightarrow \infty$ , para  $n \rightarrow \infty$ , tales que

$$\sum_{h=1}^n \int_{|x| \geq \gamma_n} dG_h(x) \rightarrow 0;$$

$$\frac{1}{\gamma_n^2} \sum_{h=1}^n \left\{ \int_{|x| < \gamma_n} x^2 dG_h(x) - \left( \int_{|x| < \gamma_n} x dG_h(x) \right)^2 \right\} \rightarrow \infty.$$

Si tal sucesión  $\gamma_n$  existe, a título de  $\alpha_n^*$  y  $\beta_n$  pueden tomarse las sumas de las esperanzas matemáticas y las varianzas marginadas, a saber

$$\beta_n^2 = \sum_{h=2}^n \left\{ \int_{|x| < \gamma_n} x^2 dG_h(x) - \left( \int_{|x| < \gamma_n} x dG_h(x) \right)^2 \right\};$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{h=1}^n \int_{|x| < \gamma_n} x dG_h(x).$$

4.1.3. Teorema del límite central en el esquema de series. Se llama esquema de series una sucesión doble de magnitudes aleatorias  $\{\xi_{nh}, 1 \leq k \leq k_n, k_n \rightarrow \infty, n \geq 1\}$ , en la cual las magnitudes aleatorias  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ , que forman la  $n$ -ésima serie, son reciprocamente independientes para cualquier  $n$ . El esquema para sumar las sucesiones es un caso particular del esquema de series. Así por ejemplo, en el caso de varianzas finitas, la  $n$ -ésima serie tiene la forma  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nh}$ , donde  $\xi_{ni} = \frac{\xi_i - M\xi_i}{\sqrt{D\xi_i}}$ .

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n D\xi_k}$$

Forma general del teorema del límite central en el esquema de series. Supongamos que  $\{\xi_{nh}, 1 \leq k \leq k_n, n \geq 1\}$  es un esquema de series;  $F_{nh}(x)$  y  $F_n(x)$  son las funciones de distribución de las magnitudes aleatorias  $\xi_{nh}$  y  $\xi_n = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nh}$ , respectivamente.

Para que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi(x)$  uniformemente respecto de  $x \in (-\infty, \infty)$  y se cumpla la condición de pequeñez uniforme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq k_n} P\{|\xi_{ni}| \geq \varepsilon\} = 0 \quad (1.7)$$

para cualquier  $\varepsilon > 0$  fijado, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} P\{\xi_{nk} \geq \varepsilon\} &= 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon} x dF_{nk}(x) &= 0; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left( \int_{|x| < \varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 &= 1 \end{aligned} \right\} (1.8)$$

## 4.2. Teorema del límite central para los vectores aleatorios independientes

4.2.1 Análogo multidimensional del teorema integral de Moivre—Laplace. Examinemos un esquema de pruebas independientes en cada una de las cuales pueden realizarse  $m$  sucesos  $A_1, \dots, A_m$  con las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , siendo  $0 < p_i < 1$ .

Sea  $v_n(i)$  el número de apariciones del suceso  $A_i$  en una serie de  $n$  pruebas;  $\eta_n(i) = \frac{v_n(i) - np_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$  es la desviación normada del número medio de apariciones del suceso  $A_i$  en la serie de  $n$  pruebas;  $\eta_n = (\eta_n(1), \eta_n(2), \dots, \eta_n(m))$  es el vector de las desviaciones nor-

mas cuyas componentes, en el caso general, son las magnitudes aleatorias dependientes,

$$F_n(x) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = P\{\eta_n(1) < x_1, \dots, \eta_n(m) < x_m\}.$$

Teorema.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m \det C}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_m} \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m c_{ij}^{-1} x_i x_j\right\} dx_1 dx_2 \dots dx_m, \quad (2.1)$$

donde  $C = \{c_{ij}, i, j = \overline{1, m}\}$  es la matriz de covariaciones del vector  $\eta_n$ :

$$c_{ij} = M\eta_n(i)\eta_n(j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ -\frac{\sqrt{p_i p_j}}{(1-p_i)(1-p_j)}, & i \neq j; \end{cases}$$

$$\det C = \frac{q}{(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_m)} \neq 0 \quad q = 1 - \sum_{i=1}^m p_i > 0;$$

$c_{ij}^{-1}$  es el  $(i, j)$ -ésimo elemento de la matriz  $C^{-1}$ , con la particularidad de que

$$c_{ij}^{-1} = \begin{cases} \frac{(1-p_i)(p_i+q)}{q}, & i=j, \\ \frac{\sqrt{p_i p_j (1-p_i)(1-p_j)}}{q}, & i \neq j. \end{cases}$$

4.2.2. Análogos multidimensionales de los teoremas de Lévy-Lindeberg y de Lindeberg-Feller. Sea  $\{\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2, \dots, \xi_n^k), n = 1, 2, \dots\}$  una sucesión de vectores aleatorios mutuamente independientes con las esperanzas matemáticas  $M\xi_n = a_n$  y las matrices de covariación  $C_n = \text{cov } \xi_n = M[\xi_n - a_n][\xi_n - a_n]^*$  (el signo \* significa aquí la transposición del vector columna  $[\xi_n - a_n]$ ). Sean

$B_n = \sum_{i=1}^n C_i$  la matriz de covariación de la suma  $\sum_{i=1}^n \xi_i$  y  $B_n^{1/2}$ , su raíz cuadrada. Si la matriz  $B_n$  está positivamente definida, el vector  $\eta_n = B_n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\xi_i - a_i)$  se llamará suma normada de los vectores aleatorios  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . El vector  $\eta_n$  se caracteriza porque  $M\eta_n = 0$  (vector nulo) y  $\text{cov } \eta_n = M\eta_n \eta_n^* = I$  ( $k \times k$  matriz unidad).

Designemos con  $F_n(x) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$  la función de distribución de la suma normada  $\eta_n$ :

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = P\{\eta_n^1 < x_1, \eta_n^2 < x_2, \dots, \eta_n^k < x_k\},$$

(donde  $\eta_n^l$  es la  $l$ -ésima componente del vector  $\eta_n$ , y sea  $\Phi_{k,1}(x)$  una distribución normal  $k$ -dimensional de media nula con la matriz de covariación unidad.

**Teorema.** Si  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión de vectores aleatorios recíprocamente independientes e igualmente distribuidos,  $M\xi_n = a$ ,  $\text{cov } \xi_n = C$ , y la matriz de covarianza  $C$  está positivamente definida, entonces para la función de distribución  $F_n(x) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$  de la

suma normada  $\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} C^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=1}^n (\xi_l - a_l)$  se verifica uniformemente respecto de  $x \in R^k$  la siguiente correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \Phi_{D, l}(x). \quad (2.2)$$

En cuanto a los vectores aleatorios  $\xi_n$  de distribución desigual, para ellos tiene lugar la afirmación a seguir.

**Teorema.** Supongamos que  $G_n(x) = G_n(x_1, \dots, x_k)$  son las funciones de distribución de los vectores aleatorios  $\xi_k$ , y la matriz de covarianza  $B_n$  de la suma  $\sum_{l=1}^n \xi_l$  está positivamente definida para cualquier  $n$ . Con el fin de conseguir que para una función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada  $\eta_n = B_n^{-1/2} \sum_{l=1}^n (\xi_l - a_l)$  tenga lugar la correlación (2.2) y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq l \leq n} P\{\|\xi_l - a_l\| > \varepsilon \sqrt{\text{Sp } B_n}\} = 0,$$

donde  $\text{Sp } B_n$  es una traza de la matriz  $B_n$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{Sp } B_n} \sum_{l=1}^n \int_{\|x - a_l\| > \varepsilon \sqrt{\text{Sp } B_n}} \|x - a_l\|^2 dG_l(x) = 0 \quad (2.3)$$

(el análogo multidimensional de la condición de Lindeberg) y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{x \in R^k} \frac{(B_n x, x)}{\|x\|^2} > 0. \quad (2.4)$$

**4.2.3 Teorema del límite central para los vectores aleatorios en el esquema de series.** Sea  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  una sucesión de series de los vectores aleatorios independientes e igualmente distribuidos en cada serie con valores en el espacio euclídeo  $k$ -dimensional  $R^k$ , y sean  $G_n(x)$  las funciones de distribución de los vectores  $\xi_{nl}$ ,  $l = 1, k_n$ .

**Teorema.** Si existen un vector  $a \in R^k$  y una matriz simétrica  $B$ , definida de manera no negativa, para dicho vector y dicha matriz se

realizan las igualdades

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \int_{\|x\| \leq \varepsilon} (z, x) G_n(dx) &= (z, a); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \left[ \int_{\|x\| \leq \varepsilon} (z, x^2) G(dx) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \int_{\|x\| < \varepsilon} (z, x) G_n(dx) \right)^2 \right] = (Bz, z); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k_n \int_{\|x\| > \varepsilon} G_n(dx) &= 0, \end{aligned} \right\} (2.5)$$

cualesquiera que sean  $z \in R^h$  y  $\varepsilon > 0$ , entonces la distribución del vektor aleatorio  $\eta_n = \sum_{l=1}^{k_n} \xi_{nl}$  para  $n \rightarrow \infty$ , converge débilmente hacia la distribución normal con la función característica

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i(a, z) - \frac{1}{2} (Bz, z) \right\}. \quad (2.6)$$

### 4.3. Teoremas del límite locales

**4.3.1. Teoremas del límite locales para las densidades.** Sea  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias reciprocamente independientes (con las funciones de distribución  $G_k(x) = P\{\xi_k < x\}$ )

de tal índole que a partir de cierto  $n_0$  la suma  $\sum_{k=1}^n \xi_k$  para  $n \geq n_0$  tiene densidad de distribución. Sin reducir la generalidad de los razonamientos podemos considerar que  $n_0=1$ . Los teoremas del límite locales para las densidades ponen en claro las condiciones bajo las cuales las densidades  $f_n(x)$  de las distribuciones de las sumas normadas o bien,

en el caso general, de las sumas del tipo  $\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n$  con las sucesiones de magnitudes constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$ , seleccionadas de manera adecuada, satisfacen la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \varphi(x) \quad (3.1)$$

uniformemente respecto de  $x \in (-\infty, \infty)$ , donde  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  representa la densidad de distribución normal estándar.

#### 1. CASO DE VARIANZAS FINITAS.

**Teorema.** Si en una sucesión  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  las magnitudes aleatorias están igualmente distribuidas, tienen la esperanza matemática finita  $M\xi_k = a$ , la varianza  $D\xi_k = \sigma^2$  y, además,  $f_n(x)$  es la densidad de dis-

tribución de la suma normada  $\eta_n = \frac{\sum \xi_k - na}{\sigma \sqrt{n}}$ , entonces, para que se

verifique la correlación (3.1), es necesario y suficiente que exista un  $N$  tal que

$$\sup_x f_N(x) < \infty.$$

Para el caso de magnitudes aleatorias  $\xi_k$  de distribución desigual determinaremos una clase  $M_r$  de las sucesiones de magnitudes aleatoria  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  con esperanzas matemáticas finitas  $M\xi_k = a_k$  y varianzas  $\sigma_k^2 = D\xi_k$ , siendo  $B_n^2 = \sum \sigma_k^2 > 0, n \geq 1$ , la cual se caracterizará porque entre las distribuciones  $G_k(x)$  de las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  no hay más que  $r$  distintas.

Sea  $n_k, k = \overline{1, r}$  un número de distribuciones de  $k$ -ésimo tipo que tienen los primeros  $n$  términos de la sucesión  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  de  $M_r$ .

**Teorema.** Si una sucesión de magnitudes aleatorias  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  pertenece a la clase  $M_r$  ( $B_n \rightarrow \infty$  para  $n \rightarrow \infty$ ), existe una densidad  $f_n(x)$  de la suma normada

$$\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)}{B_n} \text{ y se cumple la condición}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq k \leq r} \frac{n_k}{\ln B_n} = \infty, \quad (3.2)$$

entonces, para que se verifique la correlación (3.1), es necesario y suficiente que exista un  $N$  tal que

$$\sup_x f_N(x) < \infty.$$

II. CONDICIONES GENERALES DE CONVERGENCIA HACIA LA DENSIDAD DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL. Designemos mediante  $f_n(x)$  la densidad de distribución de una magnitud aleatoria

$$\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n,$$

donde las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  son independientes y tienen la distribución normal  $G(x)$ ,  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  son ciertas sucesiones de las constantes.

**Teorema.** Para que existan las sucesiones de las constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tales, que para  $f_n(x)$  se verifique (3.1), es necesario y suficiente el cumplimiento de las siguientes condiciones:

1) la función de distribución  $G(x)$  pertenece al dominio de atracción de la distribución normal (p. 4.1.2);

2) existe un  $N$  tal que  $\sup_x f_N(x) < \infty$

4.3.2. Teoremas locales para las distribuciones en retículo. Sea  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes que tienen igual distribución en retículo  $G(x)$ , es decir (véase el p. 1.4.3), las magnitudes aleatorias  $\xi_n$  toman los valores de cierta progresión aritmética  $\{m + kh\}$ ,  $h > 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_n$  tienen la esperanza matemática finita  $M\xi_h = a$  y la varianza

$$D\xi_h = \sigma^2, \text{ y sea } P_n(r) = P\left\{\sum_{i=1}^n \xi_i = nm + rh\right\}.$$

**Teorema de Gnedenko.** Para que uniformemente respecto de  $r$  ( $-\infty < r < \infty$ ) se verifique la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sigma \sqrt{n}}{h} P_n(r) - \varphi(x_{nr}) \right| = 0, \quad (3.3)$$

donde  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  es la densidad de la distribución normal  $(0, 1)$  y  $x_{nr} = \frac{n(m-a) + rh}{\sigma \sqrt{n}}$ , resulta necesario y suficiente que el paso  $h$  de la distribución  $G(x)$  sea máximo.

En particular, si las magnitudes aleatorias están distribuidas según la ley de Bernoulli, el teorema de Gnedenko se convierte en el teorema local de Moivre-Laplace. Si la probabilidad  $p$  de aparición de un suceso es distinta de cero y de la unidad, entonces la probabilidad  $P_n(r)$  de que en una serie de  $n$  pruebas independientes el suceso aparecerá exactamente  $r$  veces, satisface la correlación (3.1) con

$$x_{nr} = \frac{r - np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ y } \sigma = \sqrt{p(1-p)}$$

En ausencia de la suposición del carácter finito de los momentos tiene lugar el siguiente teorema.

**Teorema.** Con el fin de conseguir que para ciertas sucesiones de las constantes  $\{\alpha_n\}$  y  $\{\beta_n > 0\}$  tenga lugar, uniformemente respecto de  $r$  ( $-\infty < r < \infty$ ), la correlación

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta_n}{h} P_n(r) - \varphi(x_{nr}) \right| = 0, \quad (3.4)$$

donde  $\varphi(x)$  es la densidad de la distribución normal  $(0, 1)$  y  $x_{nr} = \frac{nm - \alpha_n \beta_n + rh}{\beta_n}$ , es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones. 1) la función general de la distribución  $G(x)$  de las magnitudes aleatorias  $\xi_h$  es atraída hacia la ley normal (p. 1.2.1); 2) el paso  $h$  de la distribución  $G(x)$  es máximo.

#### 4.4. Precisión del teorema del límite central y los desarrollos asintóticos

4.4.1. Desigualdades de Esseen y Berry-Esseen. Sea  $\{\xi_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias recíprocamente independientes que tienen esperanzas matemáticas finitas  $M\xi_k = a_k$  y varianzas

$D\xi_k = \sigma_k^2$  y  $B_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 > 0$ . La suposición de que existen momen-

tos de orden superior a dos permite establecer no sólo el hecho de la convergencia débil de la función de distribución  $F_n(x)$  de

la suma normada  $\eta_n = \frac{\sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)}{B_n}$  hacia la función normal  $(0, 1)$  de distribución  $\Phi(x)$ , sino que aclarar también de qué modo esto ocurre.

**Teorema.** Si para cierto  $\delta \leq 1$  positivo existen  $M$   $|\xi_k - a_k|^{2+\delta}$  entonces

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M |\xi_k - a_k|^{2+\delta}, \quad (4.1)$$

donde  $A$  es una constante absoluta. Cuando  $\delta = 1$ , la desigualdad (4.1) se denomina habitualmente **desigualdad de Esseen**. En particular, si las magnitudes aleatorias  $\xi_1, \dots, \xi_n$  tienen una misma distribución y  $\delta = 1$ , la desigualdad (4.1) se convierte en una que sigue

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leq A \frac{M |\xi_1 - a|^2}{\sigma^3 \sqrt{n}}. \quad (4.2)$$

La desigualdad (4.2) lleva el nombre de **desigualdad de Berry—Esseen**.

Las constantes absolutas en (4.1) y (4.2) no pueden ser menores que la magnitud  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . El valor mínimo de la constante  $A$  en la desigualdad de Berry—Esseen es igual a

$$\sup \sqrt{n} \frac{\sigma^3}{M |\xi_1 - a|^3} \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)|,$$

donde el primer sup se toma respecto de todos los  $n$  y todas las funciones de distribución  $F_n(x)$ , que tienen el tercer momento finito y la media nula. El valor exacto de esta constante se desconoce. Se sabe, no obstante, que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_x \sup_x \sqrt{n} \frac{\sigma^3}{M |\xi_1 - a|^3} |F_n(x) - \Phi(x)| = \frac{\sqrt{10+3}}{6 \sqrt{2\pi}}.$$

De acuerdo con las evaluaciones modernas el valor de la constante absoluta  $A$  en la desigualdad (4.1) no es superior a 0,9051 y en la desigualdad (4.2), a 0,82. La desigualdad de Berry—Esseen admite los reforzamientos y las modificaciones siguientes:

$$1) |F_n(x) - \Phi(x)| < A \frac{M |\xi_1 - a|^3}{\sigma^2 \sqrt{n} (1 + |x|^3)};$$

2) si  $\rho^{(p)}(F_n, \Phi)$  es la distancia entre  $F_n$  y  $\Phi$  en el espacio métrico  $L_p$  ( $p \geq 1$ ), es decir,

$$\rho^{(p)}(F_n, \Phi) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}},$$



entonces

$$\rho^{(p)}(F_n, \Phi) \leq A \frac{M |\xi_1 - a|^3}{\sigma_3 \sqrt{n}}.$$

El orden de las estimaciones en (4.1) y (4.2) no puede ser mejorado sin introducir suposiciones complementarias.

4.4.2. Precisión del teorema del límite central para el caso multidimensional. Sea  $\{\xi_n, k \geq 1\}$  una sucesión de vectores aleatorios recíprocamente independientes e igualmente distribuidos con sus valores en  $R^k$ , cuyo vector de las esperanzas matemáticas es  $M\xi_n = a$ , y la matriz de covariación  $B = \text{cov } \xi_n$  está positivamente definida.

La desigualdad de Berry—Esseen para el caso multidimensional tiene la forma: si  $G_n(x)$  es una función de distribución del vector

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=1}^n \xi_l, \text{ entonces}$$

$$\sup_{x \in R^k} |G_n(x) - \Phi_{0, B}(x)| \leq A(k) \left( \sum_{i=1}^k \frac{\Lambda_{ii}}{\Lambda} \rho_i \right) \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (4.3)$$

dónde  $\Phi_{0, B}(x)$  es una función normal de distribución con el vector de las esperanzas matemáticas 0 y la matriz de covariación  $B$ ;  $A(k)$  es una constante absoluta, dependiente sólo de la dimensión de  $k$ ;  $\rho_i =$

$$= \frac{M |\xi_i^n|^3}{(M (\xi_i^n)^2)^{3/2}}, \quad \xi_i^n \text{ es el } i\text{-ésimo componente del vector } \xi_n; \Lambda = \det B;$$

$\Lambda_{ii}$  es el  $i$ -ésimo menor principal de la matriz de covariación  $B$ .

En particular, cuando  $k = 2$ , la desigualdad (4.3) toma la forma

$$\sup_{x \in R^2} |G_n(x) - \Phi_{0, B}(x)| \leq A(2) \frac{\rho_1 + \rho_2}{4 - \lambda^2} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (4.4)$$

La estimación (4.4) tiene sentido sólo para aquellos valores de  $\lambda$  que no son muy próximos a  $\pm 1$ , es decir, cuando la distribución del vector  $\xi_n$  no es muy próxima a la degenerada.

La estimación de la velocidad de convergencia, que es cierta para cualesquiera suposiciones respecto del carácter de la dependencia de las componentes del vector  $\xi_n$ , tiene la forma

$$\sup_{x \in R^k} |G_n(x) - \Phi_{0, B}(x)| \leq B(k) \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k \rho_i}{\sqrt{n}}}, \quad (4.5)$$

dónde  $B(k)$  es una constante que depende solamente de la dimensión de  $k$ .

4.4.3. Desarrollos asintóticos para las sumas de magnitudes aleatorias. Los desarrollos asintóticos en el teorema del límite central están basados en los desarrollos de las funciones respecto de los polinomios de Chébishev—Hermite  $H_m(x)$ , que se determinan por cualquiera

de las igualdades:

$$\left. \begin{aligned} H_m(x) &= (-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m}{dx^m} e^{-\frac{x^2}{2}}; \\ H_m(x) &= m! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k x^{m-2k}}{k! (m-2k)! 2^k}, \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

donde  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  significa la parte entera del número  $\frac{m}{2}$ .

Algunos de los primeros polinomios de Chébishev—Hermite tienen la forma:

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = x; \quad H_2(x) = x^2 - 1; \quad H_3(x) = x^3 - 3x;$$

$$H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3; \quad H_5(x) = x^5 - 10x^3 + 15x; \dots$$

Designemos con  $\gamma_j$  el  $j$ -ésimo semiinvariante de la magnitud aleatoria  $\xi_1$  y sean

$$Q_m(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum H_{m+2s-1}(x) \prod_{l=1}^m \frac{1}{k_l!} \left( \frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)! \sigma^{l+2}} \right)^{k_l}; \quad (4.7)$$

$$q_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum H_{m+2s}(x) \prod_{l=1}^m \frac{1}{k_l!} \left( \frac{\gamma_{l+2}}{(l+2)! \sigma^{l+2}} \right)^{k_l}, \quad (4.8)$$

donde la adición se realiza según todas las soluciones no negativas de valor entero de la ecuación  $k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = m$ , mientras que  $s = k_1 + k_2 + \dots + k_m$ .

**Teorema.** Si las magnitudes aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$ , recíprocamente independientes e igualmente distribuidas, tienen un momento absoluto finito del orden  $r \geq 3$ ,  $M\xi_n = a$ ,  $D\xi_n = \sigma^2$ , y si para ellas se cumple la condición (C) de Cramer

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow \infty} |g(z)| < 1, \quad (4.9)$$

donde  $g(z)$  es la función característica de distribución  $G(x) = P\{\xi_n < x\}$ , entonces para la función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma \sqrt{n}} \text{ tiene lugar uniformemente respecto de } x \in (-\infty, \infty) \text{ el desarrollo asintótico}$$

$$F_n(x) = \Phi(x) + \sum_{m=1}^{r-2} \frac{Q_m(x)}{\sqrt{n^m}} + o(n^{-\frac{r-2}{2}}), \quad (4.10)$$

donde  $\Phi(x)$  es una función normal (0, 1) de distribución;  $Q_m(x)$  se

determina por la igualdad (4.7). En particular, si  $r=3$ , y  $\mu_3 =$   
 $= \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^3 G(dx)$ , entonces

$$F_n(x) = \Phi(x) + \frac{\mu_3}{6\sigma^3 \sqrt{n}} (1-x^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

El desarrollo (4.10) tiene diferentes modificaciones y reforzamientos, a saber, en las condiciones del teorema enunciado arriba

$$(1+|x|^r) \left| F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{m=1}^{r-2} \frac{Q_m(x)}{\sqrt{n^m}} \right| = o\left(n^{-\frac{r-2}{2}}\right). \quad (4.11)$$

Para todo  $p > \frac{1}{r}$  se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F_n(x) - \Phi(x) - \sum_{l=1}^{r-2} \frac{Q_l(x)}{\sqrt{n^l}} \right|^p dx = o\left(n^{-\frac{(r-2)p}{2}}\right). \quad (4.12)$$

Para todo  $p \geq 1$  se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{r-2} \frac{Q_l(x)}{\sqrt{n^l}} \right|^p dx + o\left(n^{-\frac{r+p-3}{2}}\right). \quad (4.13)$$

Para todo  $p \geq 1$  se tiene

$$\|F_n(x) - \Phi(x)\|_p = \left\| \sum_{l=1}^{r-2} \frac{Q_l(x)}{\sqrt{n^l}} \right\|_p + o\left(n^{-\frac{r-2}{2}}\right), \quad (4.14)$$

donde  $\|f(x)\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ , si la función  $f(x)$  satisface

la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty$ .

**Teorema.** Si las magnitudes aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$ , recíprocamente independientes e igualmente distribuidos, tienen distribución en retículo con los valores en la progresión  $\{n + hk\}$ ,  $h > 0$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , el paso  $h$  es máximo,  $M\xi_n = a$ ,  $D\xi_n = \sigma^2 > 0$ , y si existe un momento absoluto finito del orden  $r \geq 3$ , entonces para la función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada

$$\eta_n = \frac{\sum_{l=1}^n \xi_l - na}{\sigma \sqrt{n}} \text{ tiene lugar, uniformemente respecto de } x \in (-\infty, \infty),$$

el desarrollo asintótico

$$F_n(x) = \Phi_{nr}(x) + \sum_{j=1}^{r-2} d_j \left( \frac{h}{\sigma \sqrt{n}} \right)^j \times \\ \times S_j \left\{ \frac{\sigma x \sqrt{n}}{h} - \left( \frac{um}{h} - \left[ \frac{nm}{h} \right] \right) \right\} \frac{d^j}{dx^j} \Phi_{nr}(x) + o\left(n^{-\frac{r-2}{2}}\right), \quad (4.15)$$

donde

$$\Phi_{nr}(x) = \Phi(x) + \sum_{l=1}^{r-2} \frac{Q_l(x)}{\sqrt{n^l}};$$

$$d_l = \begin{cases} 1, & \text{si } l \text{ puede representarse en la forma } l=4k+1, \text{ o bien} \\ & l=4k+2; \\ -1, & \text{si } l \text{ puede representarse en la forma } l=4k+3, \text{ o bien} \\ & l=4k; \end{cases}$$

$$S_{2l}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi j x}{2^{2l-1} (\pi j)^{2l}}, \quad S_{2l+1}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\pi j x}{2^{2l} (\pi j)^{2l+1}}.$$

**Teorema.** Si las magnitudes aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$ , reciprocamente independientes e igualmente distribuidas, tienen un momento absoluto finito del orden  $r \geq 3$ ,  $M_{\xi_n}^r = a$ ,  $D_{\xi_n}^2 = \sigma^2 > 0$ , y si la densidad  $f_n(x)$

de distribución de la suma normada  $\eta_n = \frac{\sum_{l=1}^n \xi_l - nu}{\sigma \sqrt{n}}$  está acotada para cierto  $n = N$ , entonces, uniformemente respecto de  $x \in (-\infty, \infty)$ , tiene lugar el desarrollo asintótico

$$f_n(x) = \varphi(x) + \sum_{l=1}^{r-2} \frac{q_l(x)}{\sqrt{n^l}} + o\left(n^{-\frac{r-2}{2}}\right), \quad (4.16)$$

donde  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  es la densidad de distribución  $(0, 1)$ ;  $q_l(x)$  se determina por la fórmula (4.6).

**Teorema.** Si las magnitudes aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$ , reciprocamente independientes e igualmente distribuidas, toman solamente valores de números enteros, el paso máximo de la distribución equivale a 1 y existe un momento absoluto finito del orden  $r \geq 3$ , entonces uniformemente respecto de  $k \in (-\infty, \infty)$  se verifica

$$\sigma \sqrt{n} P_n(k) = \varphi(x_{nk}) + \sum_{l=1}^{r-2} \frac{q_l(x_{nk})}{\sqrt{n^l}} + o\left(n^{-\frac{r-2}{2}}\right),$$

donde  $P_n(k) = P \left\{ \sum_{l=1}^n \xi_l = k \right\}$ ;  $x_{nh} = \frac{k - na}{\sigma \sqrt{n}}$ ;  $\varphi(x)$  es la densidad de distribución normal  $(0, 1)$  y las funciones  $q_l(x)$  se determinan por la fórmula (4.8).

#### 4.5. Grandes desviaciones

4.5.1. Zonas de convergencia normal. Sea  $\xi_1, \xi_2, \dots, \dots, \xi_n$  una sucesión de magnitudes aleatorias reciprocamente independientes e igualmente distribuidas.

Si las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  satisfacen las condiciones del teorema del límite central (integral), entonces de la convergencia uniforme de la función de distribución  $F_n(x)$  de la suma normada  $\eta_n$  hacia la función normal  $(0, 1)$  de distribución  $\Phi(x)$  proviene que uniformemente respecto a  $x$  de cualquier intervalo finito tienen lugar las correlaciones

$$\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (5.1)$$

Análogamente, si las magnitudes aleatorias  $\xi_k$  satisfacen las condiciones del teorema del límite local para las densidades y  $f_n(x)$  es la densidad de distribución de la suma normada  $\eta_n$ , entonces uniformemente respecto a  $x$  de cualquier intervalo finito tienen lugar la correlación

$$\frac{f_n(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \quad (5.2)$$

Las correlaciones (5.1) y (5.2) pueden verificarse uniformemente respecto de  $x$  que varían en los intervalos  $[0, \Lambda(n)]$  o  $[-\Lambda(n), 0]$ , donde  $\Lambda(n)$  es una función no decreciente que crece indefinidamente junto con  $n$ . Tales intervalos se denominan zonas (integral, en el caso (5.1) y local, en el caso (5.2)) de convergencia normal. El ejemplo que sigue da una idea de lo que es la zona integral de convergencia normal.

EJEMPLO Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  describen un esquema de las pruebas independientes de Bernoulli. De la igualdad

$$1 - F_n(x) = P \left\{ \frac{\sum_{h=1}^n \xi_h - np}{\sqrt{np(1-p)}} > x \right\} = \\ = P \left\{ \sum_{h=1}^n \xi_h > x \sqrt{np(1-p)} + np \right\},$$

se deduce que para cualesquiera  $x > \sqrt{\frac{n(1-p)}{p}}$  se realiza la igualdad  $\frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} = 0$ . De este modo, en el intervalo  $[0, O(\sqrt{n})]$  la correlación (5.1) puede no verificarse.

Para las zonas de convergencia normal  $\Lambda(n) = o(\sqrt{n})$ . En particular, si  $\Lambda(n) = o(\frac{1}{\sqrt{n}})$ , las zonas correspondientes se llaman estrechas; si, en cambio,  $\Lambda(n) = n^\alpha$ , donde  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  es un número prefijado, las zonas correspondientes se llaman monomiales.

4.5.2. Desarrollos asintóticos individuales en el esquema de grandes desviaciones. Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_h$ , definidas anteriormente, satisfacen la condición de Cramer

$$\exists h > 0 \text{ es tal que } M \exp \{h | \xi_h | \} < \infty, \quad (5.3)$$

que asegura la existencia de todos los momentos de  $\xi_h$ . En este caso, la zona integral y local (si existe la densidad de probabilidad acotada de las magnitudes aleatorias  $\xi_h$ ) de la convergencia normal es una zona estrecha.

Designemos con  $f(x)$  una función característica de las magnitudes aleatorias  $\xi_h$  y sea  $\psi(x) = \ln f(x)$ . Si se cumple la condición de Cramer (5.3),  $\psi(x)$  será una función analítica en el entorno del cero. Para  $x$  suficientemente pequeños la igualdad  $\psi'(x) = x / D \xi_1$  define  $s$  como una función analítica de la variable  $x$ .

Una serie de potencias  $\lambda(x) = \lambda_1 + x\lambda_2 + x^2\lambda_3 + \dots$ , determinada por la correlación

$$x^2\lambda(x) = \psi(s) - s\psi'(s) + \frac{1}{2} \psi''(s),$$

se llama serie de Cramer. Si  $M \xi_{5n} = 0$ , tenemos

$$\lambda_1 = \frac{\gamma_3}{3! \sigma^3}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma_4 \sigma^2 - 3\gamma_3^2}{4! \sigma^4}, \quad \lambda_3 = \frac{\gamma_5 \sigma^2 - 10\gamma_4 \gamma_3 \sigma + 15\gamma_3^3}{5! \sigma^5},$$

donde  $\sigma^2 = D \xi_h$  y  $\gamma_l$  es el  $l$ -ésimo semiinvariante de la magnitud aleatoria  $\xi_n$ .

Si se cumplen las condiciones de Cramer (5.3), para  $x \geq 0$  y  $x = o(\sqrt{n})$  tienen lugar las correlaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 - F_n(x)}{1 - \Phi(x)} &= \exp \left[ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left( 1 + o \left( \frac{x+1}{\sqrt{n}} \right) \right); \\ \frac{F_n(-x)}{\Phi(-x)} &= \exp \left[ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( -\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left( 1 + o \left( \frac{|x|+1}{\sqrt{n}} \right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Si las magnitudes aleatorias  $\xi_n$  tienen, además, la densidad de probabilidad  $f(x)$ , continua y acotada en todo el eje, entonces para  $x \geq 1$  y  $x = o(\sqrt{n})$  se verifican las correlaciones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{f_n(x)}{\varphi(x)} &= \exp \left[ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left( 1 + o \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right); \\ \frac{f_n(-x)}{\varphi(x)} &= \exp \left[ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda \left( -\frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right] \left( 1 + o \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Las correlaciones (5.4) y (5.5) tienen carácter individual, porque la serie de Cramer  $\lambda(x)$  se determina por todos los semiinvariantes,

à consecuencia de lo cual se determina unívocamente mediante una magnitud aleatoria correspondiente.

4.5.3. Zonas de la convergencia normal y los desarrollos asintóticos. Sea  $\rho(n)$  una función positiva creciente al infinito de manera tan lenta como se quiera y  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . Para que las zonas  $[0, n^\alpha \rho(n)]$  y  $[-n^\alpha \rho(n), 0]$  sean zonas de convergencia normal, es necesario y suficiente que

$$M \exp \left\{ \left| \xi_k \right|^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}} \right\} < \infty. \quad (5.6)$$

Cuando  $\alpha < \frac{1}{6}$ , la condición (5.6) es necesaria para que las zonas  $[0, n^\alpha \rho(n)]$  y  $[-n^\alpha \rho(n), 0]$  sean zonas de convergencia normal local y suficiente, para que las zonas  $\left[ 0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)} \right]$  y  $\left[ -\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0 \right]$  también sean zonas de convergencia normal local.

Sea  $\frac{1}{6} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ . Consideremos una serie de los números:

$$\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{3}{10}, \dots, \frac{1}{2} \frac{n+1}{n+3}, \dots \rightarrow \frac{1}{2}, \quad (5.7)$$

y sea  $s$  tal que  $\frac{1}{2} \frac{s+1}{s+3} \leq \alpha < \frac{1}{2} \frac{s+2}{s+4}$ .

Para que las zonas  $[0, n^\alpha \rho(n)]$  y  $[-n^\alpha \rho(n), 0]$  sean zonas de convergencia normal (integral), es necesario que se cumpla la condición (5.6) y que todos los momentos de  $\xi_k$ , hasta el  $(s+3)$ -ésimo coincidan con los momentos de la distribución normal  $(0, 1)$ . Estas dos condiciones son suficientes para que las zonas  $\left[ 0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)} \right]$  y  $\left[ -\frac{n^\alpha}{\rho(n)}, 0 \right]$  sean las de convergencia normal (integral).

Al cumplirse la condición (5.6), en la zona  $\left[ 0, \frac{n^\alpha}{\rho(n)} \right]$ , tienen lugar, uniformemente respecto de  $x$ , las correlaciones

$$\begin{aligned} 1 - F_n(x) &\sim [1 - \Phi(x)] \exp \left\{ \frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]} \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\}; \\ F_n(-x) &\sim \Phi(-x) \exp \left\{ -\frac{x^3}{\sqrt{n}} \lambda^{[s]} \left( \frac{x}{\sqrt{n}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $\lambda^{[s]}(z)$  es un segmento de la serie de Cramer de longitud  $s$ , mientras que  $s$  se determina por la condición (5.7). A diferencia de los desarrollos (5.4), las correlaciones (5.8) tienen un carácter colectivo, pues son ciertas para las clases de aquellas magnitudes aleatorias que satisfacen la condición (5.6) y tienen segmentos iguales de la serie de Cramer de longitud  $s$ , es decir, momentos iguales hasta el orden  $s+3$ , inclusive.

## DISTRIBUCIONES DIVISIBLES INFINITAMENTE

## 5.1. Sumas de magnitudes aleatorias independientes y sus distribuciones

5.1.1. Convoluciones de las distribuciones. Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  dos magnitudes aleatorias independientes con valores en  $R^m$  y  $\mu_1, \mu_2$ , sus distribuciones respectivas, es decir, las medidas definidas en los conjuntos borelianos  $A$  de  $R^m$  mediante las correlaciones:  $\mu_i(A) = P\{\xi_i \in A\}$ . Entonces, la distribución de la suma  $\xi_1 + \xi_2$ , que, evidentemente, es también una magnitud aleatoria en  $R^m$ , se da por medio de la medida

$$\mu(A) = \int \mu_1(A-x) \mu_2(dx),$$

donde  $A-x = \{y : y+x \in A\}$ . La medida  $\mu$  se llama convolución de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y puede ser representada también así:

$$\mu(A) = \iint_{x+y \in A} \mu_1(dx) \mu_2(dy). \quad (1.1)$$

La convolución de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se denota  $\mu_1 * \mu_2$ . De (1.1) se ve que la operación de convolución es conmutativa:  $\mu_1 * \mu_2 = \mu_2 * \mu_1$ . Sea  $F_1(x)$ ,  $x \in R^m$ , una función de distribución de la magnitud  $\xi_1$ . La función de distribución de la magnitud  $\xi_1 + \xi_2$  se define por la igualdad

$$F(x) = \int F_1(x-y) dF_2(y).$$

$F(x)$  se denomina convolución de las funciones de distribución  $F_1$  y  $F_2$  y se designa  $F = F_1 * F_2$ . Si existe la densidad de distribución  $f_1(x)$  de las magnitudes  $\xi_1$ , existirá también la densidad  $f(x)$  de su suma, con la particularidad de que

$$f(x) = \int f_1(x-y) f_2(y) dy,$$

donde  $f$  también se llama convolución de  $f_1$  y  $f_2$ .

Observemos que para la existencia de la densidad de la suma  $\xi_1 + \xi_2$  es suficiente que sólo un sumando tenga densidad. Si, por ejemplo, existe  $f_1(x)$ , entonces

$$f(x) = \int f_1(x-y) \mu_2(dy).$$



Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  son magnitudes aleatorias de  $R^m$ , entonces la distribución  $\mu$  de su suma  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_k$  se da por la convolución de las distribuciones  $\mu_i$  de los sumandos aislados:

$$\mu = \mu_1 * \mu_2 * \dots * \mu_k,$$

dónde  $\mu_1 * \dots * \mu_k = (\mu_1 * \dots * \mu_{k-1}) * \mu_k$  se determina por inducción. Haciendo uso de la conmutatividad y asociatividad de la adición de magnitudes aleatorias es fácil convencerse de que la operación de convolución también posee estas propiedades.

**5.1.2. Función característica de la suma de magnitudes aleatorias independientes.** La distribución de una magnitud aleatoria se determina por su función característica, es decir, por una transformación de Fourier de la medida correspondiente. Resulta que al sumar las magnitudes aleatorias independientes, la función característica de la suma se expresa de manera muy sencilla en términos de las funciones características de los sumandos.

**Teorema.** Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  unas magnitudes aleatorias independientes con valores en  $R^m$  y sea  $f_j = \text{Me}^{i(z, \xi_j)}$ ,  $z \in R^m$ . La función característica de la magnitud  $\xi_j$ ,  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_k$ ,  $f(z) = \text{Me}^{i(z, \xi)}$ . En este caso,  $f(z) = f_1(z) \cdot \dots \cdot f_k(z)$ .

La demostración de esta afirmación se deduce de que la esperanza matemática de un producto de magnitudes aleatorias independientes es igual al producto de las esperanzas matemáticas y también de la independencia de los factores en el segundo miembro de la igualdad

$$e^{i(z, \xi)} = \prod_{j=1}^k e^{i(z, \xi_j)}.$$

En el caso de valores numéricos podemos establecer una corrección análoga para las transformaciones de Laplace: si  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, k$  son magnitudes numéricas no negativas y  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_k$ ,  $\varphi_j(\lambda) = \text{Me}^{-\lambda \xi_j}$ ,  $\varphi(\lambda) = \text{Me}^{-\lambda \xi}$ , entonces  $\varphi(\lambda) = \prod_{j=1}^k \varphi_j(\lambda)$ .

Supongamos que las magnitudes  $\xi_j$  toman los valores solamente de un retículo de números enteros en  $R^m$  (es decir,  $\xi_j$  tienen con la probabilidad 1 coordenadas de números enteros). En este caso, en lugar de funciones características resulta más cómodo considerar las funciones generadoras

$$h_j(z) = \text{M}z^{\xi_j},$$

dónde  $z = (z^1, \dots, z^m)$  es un punto de  $C^m$ , un espacio complejo  $m$ -dimensional,  $|z^j| = 1$  y  $z^\alpha = \prod_{k=1}^m (z^k)^{\alpha_k}$ ,  $z \in R^m$ ,  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  (véase el p. 3.1).

Designemos mediante  $h(z)$  la función generadora de la magnitud  $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_j$ . Entonces  $h(z) = h_1(z) \cdot \dots \cdot h_k(z)$ .

**5.1.3. Ejemplos.** 1. Supongamos que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son unas magnitudes independientes gaussianas en  $R^m$ ,  $M\xi_1 = a_1$  y  $B_{\xi_1}$ , una matriz de correlación de la magnitud  $\xi_1$ . En este caso la función característica de

$\xi_h$  es

$$f_h(z) = \exp \left\{ i(z, a_h) - \frac{1}{2} (B_h, z, z) \right\}.$$

Si  $f(z)$  es una función característica de la magnitud  $\xi_1 + \xi_2$ , entonces

$$f(z) = \exp \left\{ i(z, a_1 + a_2) - \frac{1}{2} ((B_1 + B_2), z, z) \right\}.$$

Así pues,  $\xi_1 + \xi_2$  tiene también distribución gaussiana con la media  $a_1 + a_2$  y la matriz de correlación  $B_1 + B_2$ .

2. Sean  $\xi_1$  y  $\xi_2$  unas magnitudes aleatorias independientes de Poisson de parámetros  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente. Sus funciones características son

$$f_h(t) = \exp \{ a_h (e^{it} - 1) \}.$$

La función característica de la suma

$$f(t) = \exp \{ (a_1 + a_2) (e^{it} - 1) \}.$$

De nuevo la suma tiene distribución de Poisson de parámetro  $a_1 + a_2$ .

## 5.2. Definición y propiedades principales de las distribuciones divisibles infinitamente

5.2.1. Definición. La distribución de probabilidades  $\mu$  en  $R^m$  se denomina divisible infinitamente, si para todo  $n$  puede indicarse una distribución  $\mu_n$  tal que  $\mu$  pueda representarse en forma de la convolución  $n$ -múltiple de la distribución  $\mu_n$  con sí misma:

$$\mu = \underbrace{\mu_n * \mu_n * \dots * \mu_n}_{n \text{ veces}}.$$

De este modo, la magnitud  $\xi$  tiene distribución divisible infinitamente, siempre que para todo  $n$  existan las magnitudes independientemente distribuidas  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nn}$  tales que

$$\xi = \xi_{n1} + \dots + \xi_{nn}.$$

La definición de distribución divisible infinitamente puede enunciarse también en términos de funciones características. Sea  $\varphi(z)$ ,  $z \in R^m$ , una función característica de la distribución  $\mu$ :

$$\varphi(z) = \int e^{i(z, x)} \mu(dx).$$

Entonces, si  $\mu$  es divisible infinitamente, para todo  $n$  existe una función característica  $\varphi_n(z)$  tal que

$$\varphi(z) = \varphi_n(z)^n.$$

Las funciones características de distribuciones divisibles infinitamente reciben el nombre de funciones características divisibles infinitamente. He aquí algunas de sus propiedades esenciales:

I. Una función característica divisible infinitamente no se reduce a cero.

II.  $\arg \varphi(z)$  siempre puede considerarse como una función continua.

III. Si, para  $t > 0$ , se determina

$$\varphi(z)^t = |\varphi(z)|^t \exp \{it \arg \varphi(z)\},$$

donde  $\arg \varphi(z)$  es una función continua, entonces  $\varphi(z)^t$  será, para todo  $t > 0$ , una función característica y, además, divisible infinitamente.

5.2.2. Forma general de la función característica divisible infinitamente. Para toda función característica divisible infinitamente  $\varphi(z)$  en  $R^m$  se pueden indicar: 1)  $a \in R^m$ ; 2) un operador lineal no negativo  $B$  que actúa en  $R^m$ ; 3) una medida finita en los conjuntos borelianos  $R^m - \Pi$ , para la cual  $\Pi(\{0\}) = 0$  ( $\{0\}$  es un conjunto compuesto por un solo punto 0) tales que es justa la fórmula

$$\varphi(z) = \exp \left\{ iz - \frac{1}{2} (Bz, z) + \int e^{i(z, x)} - 1 - \frac{i(z, x)}{1 + |x|^2} \frac{1 + |x|^2}{|x|^2} \Pi(dx) \right\}, \quad (2.1)$$

donde  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ . En el caso de que  $\Pi = 0$ ,  $\varphi(z)$  será una función característica de distribución gaussiana. La fórmula (2.1) ofrece la representación canónica de una función divisible infinitamente. Tres elementos  $a$ ,  $B$ ,  $\Pi$  se determinan por la función característica de manera unívoca. Demos a conocer el teorema de la convergencia de funciones divisibles infinitamente.

**Teorema.** Una sucesión de funciones divisibles infinitamente puede converger sólo hacia una función divisible infinitamente. Si  $\varphi_n(z)$  se determina por la fórmula (2.1), en la cual en lugar de  $a$ ,  $B$  y  $\Pi$  están sustituidas  $a_n$ ,  $B_n$ ,  $\Pi_n$ , respectivamente, entonces  $\varphi_n(z)$  converge hacia  $\varphi(z)$ , definida mediante la fórmula (2.1), cuando, y sólo cuando, se cumplen las condiciones:

a) para toda función acotada continua  $g(x)$  en  $R^m$ , para la cual  $g(0) = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g(x) \Pi_n(dx) = \int g(x) \Pi(dx);$$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (B_n, z, z) + \int \frac{(z, x)^2}{|x|^2} \Pi_n(dx) = (Bz, z) + \int \frac{(z, x)^2}{|x|^2} \Pi(dx);$

c)  $\lim a_n = a$ .

Para las funciones características en  $R^1$  se puede disminuir el número de elementos determinantes hasta dos. Para toda función divisible infinitamente  $\varphi(z)$  en  $R^1$  existen  $\gamma \in R^1$  y una función  $G(x)$ , acotada no decreciente continua a la derecha, para la cual  $G(-\infty) = 0$  de tal género que

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i\gamma z + \int \left( e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}. \quad (2.2)$$

El integrando  $\left( e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2}$  está, en este caso, adic-

ionalmente definido para  $x = 0$  hasta la continuidad igual a  $-x^2$ . La representación (2.2) en el caso unidimensional se denomina canónica; sus elementos  $\gamma$  y  $G$  se determinan unívocamente por la función característica. Del teorema se deduce que para que converja la sucesión de

funciones características  $\varphi_n(z)$  representables según la fórmula (2.2), si  $\gamma$  y  $G$  están sustituidas en ésta por  $\gamma_n$  y  $G_n$ , para la función  $\varphi(z)$ , definida mediante la fórmula (2.2), es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones: a)  $\gamma_n \rightarrow \gamma$ ; b)  $G_n(x) \rightarrow G(x)$  para casi todos los  $x$  y  $G_n(+\infty) \rightarrow G(+\infty)$ .

Aduzcamos, algunas otras fórmulas para la función característica divisible infinitamente en el caso unidimensional. En vez de la fórmula (2.2) se emplea la fórmula siguiente:

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i\gamma z - \frac{bz^2}{2} + \int_{-\infty}^0 \left( e^{itz} - 1 - \frac{itz}{1+x^2} \right) dN(x) + \int_0^{\infty} \left( e^{itz} - 1 - \frac{itz}{1+x^2} \right) dM(x) \right\}, \quad (2.3)$$

donde  $\gamma \in R^1$ ,  $b > 0$ ,  $N(x)$  y  $M(x)$  no decrecen, respectivamente, en  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$   $N(-\infty) = 0$ ,  $M(+\infty) = 0$ , y

$$\int_{-1}^0 x^2 dN(x) + \int_0^1 x^2 dM(x) < \infty.$$

Para las distribuciones divisibles infinitamente en  $R^1$  con varianza infinita la función característica puede ser representada según la fórmula de Kolmogórov

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i\gamma z + \int \left( e^{itz} - 1 - itz \right) \frac{1}{x^3} dK(x) \right\}, \quad (2.4)$$

donde  $K(x)$  es una función acotada no decreciente y continua a la derecha, para la cual  $K(-\infty) = 0$  y el integrando se define adicionalmente para  $x = 0$  hasta la continuidad igual  $\alpha = \frac{z^2}{2}$ .

Si la magnitud  $\xi$  es no negativa y tiene distribución divisible infinitamente, su función característica tendrá por expresión

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i\gamma z + \int_0^{\infty} (e^{itz} - 1) dM(x) \right\}, \quad (2.5)$$

donde  $\gamma > 0$ , y  $M(x)$  es una función no decreciente, para la cual  $M(+\infty) = 0$ ,  $\int_0^1 x dM(x) < \infty$ .

Si la magnitud  $\xi$  tiene distribución aritmética divisible infinitamente de paso  $h$ , su función característica tiene la forma

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i\gamma z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{itzkh} - 1) C_k \right\}, \quad (2.6)$$

donde  $n$  y  $k$  son enteros,  $C_k \geq 0$ ,  $\sum C_k < \infty$ .

§.2.3. Ejemplos de distribuciones divisibles infinitamente y de funciones características.

I. Distribución de Poisson. La magnitud  $\xi$  tiene la distribución aritmética con paso 1 y  $P\{\xi=k\} = \frac{a^k e^{-a}}{k!}$ ,  $k \geq 0$ . La función característica tiene por expresión

$$\varphi(z) = \exp\{a(e^{iz} - 1)\}, \quad (2.7)$$

es decir, puede ser representada por la fórmula (2.6) con  $n=1$ ,  $s_n=0$ ,  $C_1=a$ ,  $C_k=0$ ,  $k \neq 1$ .

II. Distribución generalizada de Poisson. Supongamos que  $\xi_1, \xi_2, \dots$  es una sucesión de magnitudes independientes en  $R^m$  igualmente distribuidas con la distribución  $\mu$ , en tanto que  $v$  es una magnitud aleatoria que no depende de las primeras y que toma valores enteros no negativos. Hagamos  $s_0=0$ ,  $s_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ . En este caso la magnitud  $\xi = s_v$  tiene la distribución generalizada de Poisson. Si  $\mu^{*n}$  significa una convolución  $n$ -múltiple de la medida  $\mu$  y  $\mu^0$ , la distribución de una magnitud que equivale a 0 con la probabilidad 1, entonces

$$P\{\xi \in A\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{-a}}{n!} \mu^{*n}(A), \quad (2.8)$$

donde  $a$  es el parámetro de la distribución de Poisson que figura en la fórmula (2.7). La función característica de la magnitud  $\xi$  tiene por expresión

$$\varphi(z) = \exp\left\{a \int (e^{izx} - 1) \mu(dx)\right\}, \quad (2.9)$$

es decir, puede ser representada mediante la fórmula (2.1) con la medida  $\Pi$ , definida por la igualdad  $\Pi(A) = \int_A \frac{|x|^2}{1+|x|^2} \mu(dx)$ ,  $B=0$  y  $a \in R^m$ , para la cual  $(a, z) = \int \frac{(z, x)}{1+|x|^2} \mu dx$ .

III. Distribución normal. La función característica de tal distribución se obtiene en  $R^m$ , si hacemos en la fórmula (2.1)  $\Pi=0$ , y en el caso unidimensional, si hacemos en la fórmula (2.2)  $G(x)=0$  para  $x < 0$ ,  $G(x)=G(0)$  para  $x > 0$ .

IV. La distribución  $\Gamma$  se define en  $R^1$  por la densidad

$$p_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}, \quad x > 0, \quad p_\alpha(x) = 0, \quad x < 0 \quad (\alpha > 0).$$

La función característica de tal distribución es

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{1}{(1-iz)^\alpha} = \exp\left\{\alpha \int_0^\infty \frac{e^{izx} - 1}{x} e^{-x} dx\right\} \quad (2.10)$$

y puede ser representada mediante la fórmula (2.3) con  $\gamma =$   
 $= \alpha \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-x} dx, b=0, N(x)=0, M(x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy.$

V. Distribuciones estables. Así se llama una familia de distribuciones en  $R^1$ , para las cuales las funciones características se dan mediante la igualdad

$$\varphi(z) = \exp \{i\gamma z - C |z|^\alpha (1 + i\beta \omega(z, \alpha))\}, \quad (2.11)$$

donde  $\gamma \in R^1, C > 0, |\beta| \leq 1, 0 < \alpha \leq 1, \omega(z, \alpha) = \text{sign } z \text{ tg } \frac{\pi}{2} \alpha,$   
 $\alpha \neq 1, \omega(z, 1) = \frac{2}{\pi} \ln(z).$

Cuando  $\alpha = 2$ , la distribución estable es normal. La función característica de la ley estable para  $\alpha < 2$  puede ser escrita según la fórmula (2.3), si ponemos en olla  $b = 0$ ,

$$N(x) = \frac{C_1}{|x|^{1+\alpha}}, \quad M(x) = -\frac{C_2}{x^{1+\alpha}}, \quad \text{donde } C_1 > 0,$$

$C_2 > 0$  son ciertas constantes. Para las densidades de las distribuciones estables no existen expresiones explícitas, a excepción de los casos: 1)  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \pm 1$ ; 2)  $\alpha = 1, \beta = 0$ ; 3)  $\alpha = 2$ . Para  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1, \gamma = 0$ , la densidad tiene por expresión

$$p(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} x^{-3/2} e^{-\frac{G^2}{2x}},$$

para  $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$  obtenemos la distribución de Cauchy con la densidad

$$p(x) = \frac{C}{\pi(x^2 + C^2)}.$$

La densidad existe para todas las distribuciones estables y se puede calcular rigiéndose por la fórmula de inversión, puesto que  $\varphi(z)$  es absolutamente integrable.

Hemos de notar una peculiaridad característica de las funciones estables de distribución.  $F$  será una función estable de distribución, siempre que para cualesquiera  $a_1 > 0, a_2 > 0$  y  $b_1$  y  $b_2$  existen  $a > 0$  y  $b$  tales que

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b)$$

(en otras palabras, las convoluciones de las distribuciones de un mismo tipo llevan a una distribución del mismo tipo). Con la ayuda de esta propiedad se determina, a veces, la clase de distribuciones estables y, a continuación, se deduce la fórmula (2.11) para la función característica.

### 5.3. Teoremas del límite para el esquema de series

5.3.1. Teoremas generales. Examinemos una sucesión de series de las magnitudes aleatorias  $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$  (el primer índice indica el número de la serie, el segundo, indica el número de la magnitud en la serie) que toman los valores de  $R^m$  y son independientes en cada serie. Estas magnitudes se denominan infinitamente pequeñas, si para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{1 \leq i \leq k_n} P\{|\xi_{ni}| > \varepsilon\} = 0.$$

En este punto se enuncian las condiciones bajo las cuales las sumas  $\varphi_n = \sum_{i=1}^{k_n} \xi_{ni}$  de magnitudes infinitamente pequeñas tienen una distribución límite. El primer hecho de importancia, establecido aquí, puede enunciarse así: si una distribución límite de las magnitudes  $\xi_{ni}$  existe, será obligatoriamente divisible infinitamente.

Haciendo uso de este hecho, reducimos el problema general de las distribuciones límites para las sumas de magnitudes aleatorias independientes al siguiente: hallar las condiciones que deben imponerse sobre las distribuciones de los sumandos sueltos para que las sumas  $\xi_n$  tengan a título de distribución límite la distribución divisible infinitamente dada.

Designemos con  $\mu_{ni}$  una distribución de la magnitud  $\xi_{ni}$  en  $R^m$  y determinemos, luego, tal  $a_{ni} \in R^m$  que para cualquier  $\varepsilon \in R^m$  se cumpla la condición

$$(a_{ni}, z) = \int \frac{(x, z)}{1 + (x, x)} \mu_{ni}(dx).$$

Introduzcamos en  $R^m$  la medida  $\Pi_n$  de modo tal que para toda función continua acotada  $g(x)$  se verifique

$$\int g(x) \Pi_n(dx) = \sum_{j=1}^{k_n} \int g(x - a_{nj}) \frac{|x - a_{nj}|^2}{1 + |x - a_{nj}|^2} \mu_{nj}(dx).$$

**Teorema 1.** Para que una sucesión de distribuciones  $\nu_n$  de las magnitudes  $\xi_n$  converja débilmente hacia una distribución divisible infinitamente con la función característica  $\varphi(z)$ , definida por la igualdad (2.1), es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} a_{nj} = a;$$

$$b) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} (x - a_{nj}, z)^2 \mu_{nj}(dx) - (Bz, z) \right\} = 0;$$

c) para toda función continua acotada  $g(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int [g(x) - g(0)] \Pi_n(dx) = \int [g(x) - g(0)] \Pi(dx).$$

**Observación. 1.** Si se cumplen sólo las condiciones b) y c) del teorema

la distribución  $\zeta_n - a_n$ , donde  $a_n = \sum_{j=1}^{h_n} \times a_{nj}$ , converge a una distribución infinitamente divisible cuya función característica  $\varphi(x)$  se da mediante la fórmula (2.1), si hacemos en ésta  $a = 0$ . Y viceversa, si, con cierta elección de los vectores  $a'_n \in R^m$ , la magnitud  $\zeta_n - a'_n$  tiene distribución límite con la función característica (2.1), entonces se cumplen las condiciones b) y c) del teorema y, además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=1}^{h_n} a_{nj} - a'_n \right) = a.$$

Para unas magnitudes aleatorias que toman los valores en  $R^1$ , las condiciones de convergencia son más sencillas. Sea  $F_{n1}(x)$  una función de distribución de la magnitud  $\zeta_{n1}$ .

$$a_{n1} = \int \frac{x}{1+x^2} dF_{n1}(x), \quad G_n(x) = \int_{-\infty}^x \frac{y^2}{1+y^2} dF_{n1}(y+a_{n1}).$$

**Teorema 2.** Para que la sucesión  $F_n(x)$  de funciones de distribución de las magnitudes  $\zeta_n$  converja débilmente hacia cierta función límite de distribución, es necesario y suficiente el cumplimiento de las siguientes

condiciones: a) existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} a_{nj} = \gamma$ ; b) la sucesión de funciones  $G_n(x)$  converge débilmente hacia cierta función no decreciente  $G(x)$ . Si estas condiciones se consideran cumplidas, la función característica de la distribución límite se da mediante la fórmula (2.2).

**Observación 2.** Si está cumplida la condición b), entonces  $\zeta_n - \sum_{j=1}^{h_n} a_{nj}$  tiene una distribución límite cuya función característica se determina mediante la fórmula (2.2) con  $\gamma = 0$ .

5.3.2. Aplicación de los teoremas generales. Los resultados generales arriba obtenido se usarán para enunciar la convergencia hacia las distribuciones concretas divisibles infinitamente.

1. Condiciones de convergencia hacia una distribución degenerada. Sea dada una sucesión de series de las magnitudes aleatorias  $\zeta_{n1}, \dots, \zeta_{nh_n}$  con los valores en  $R^m$  e independientes en cada serie. Para que exista tal sucesión de los vectores  $a_n \in R^m$  que, con cualquier  $\varepsilon > 0$  se verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\zeta_n - a_n| > \varepsilon) = 0,$$

donde  $\zeta_n = \sum_{j=1}^{h_n} \zeta_{nj}$  (es decir,  $\zeta_n - a_n \rightarrow 0$  en probabilidad,) es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones

$$a) \quad \sum_{j=2}^{h_n} a_{nj} - a_n \rightarrow 0;$$



$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \frac{|x - a_{nj}|^2}{1 + |x - a_{nj}|^2} \mu_{nj}(dx) = 0$$

(las designaciones son las mismas que en el teorema I).

II. Condiciones de convergencia hacia una distribución normal. Para que  $\zeta_n$  tenga una distribución normal límite en  $R^m$  con la función característica

$$\varphi(z) = \exp \left\{ i(a, z) - \frac{1}{2} (Bz, z) \right\},$$

es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} a_{nj} = a;$$

$$b) \text{ para todo } \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} P(|\xi_{nj}| > \varepsilon) = 0;$$

$$c) \text{ para cierto } \varepsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ (Bz, z) - \sum_{j=1}^{h_n} \int_{|x| \leq \varepsilon} (x - a_{nj}, z)^2 \mu_{nj}(dx) \right] = 0.$$

III. Condiciones de convergencia hacia una distribución generalizada de Poisson. Una sucesión  $\zeta_n$  tiene la distribución generalizada límite de Poisson, si se cumplen las condiciones

$$a) \text{ existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} P\{\xi_{nj} \neq 0\} = 0;$$

b) Existe en  $R^m$  una medida  $\nu(dx)$  tal que para toda función continua acotada  $g(x)$  en  $R^m$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} \int [g(x) - g(0)] \mu_{nj}(dx) = \int [g(x) - g(0)] \nu(dx).$$

Si estas condiciones están cumplidas, la función característica de la distribución límite se da mediante la fórmula

$$\psi(z) = \exp \left\{ \int (e^{i(z, x)} - 1) \nu(dx) \right\}.$$

IV. Condiciones de convergencia hacia las distribuciones aritméticas. Supongamos que las magnitudes  $\xi_{nj}$  toman solamente valores enteros. Para que  $\zeta_n$  tengan una distribución límite, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

$$a) \text{ existe } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} P\{\xi_{nj} \neq 0\} = C;$$

b) para todo  $m$  entero existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{h_n} P\{\xi_{nj} = m\} = C_m$$

y  $C = \sum_m C_m$ . Si estas condiciones están cumplidas, la función característica de la distribución límite tiene por expresión

$$\varphi(z) = \exp \left[ -C + \sum_m C_m e^{izm} \right] = \exp \left[ \sum_m C_m (e^{izm} - 1) \right].$$

**Observación.** Si en la condición b) ponemos  $C_m = 0$  para  $m \neq 1$ , obtendremos las condiciones de convergencia hacia la distribución de Poisson.

#### 5.4. Teoremas del límite para las sumas crecientes en $R^1$

**5.4.1. Teorema para las sumas crecientes.** Consideraremos una sucesión de magnitudes aleatorias independientes en  $R^1$ , a saber,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ . Serán de interés para nosotros las siguientes preguntas: ¿cuándo existen unas constantes  $A_n$  y  $B_n$  tales que las magnitudes

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} \left( \sum_{k=1}^n \xi_k - A_n \right) \quad (4.1)$$

tienen una distribución límite, cuál es el procedimiento para elegir  $A_n$  y  $B_n$  y cómo será esta distribución límite? El problema planteado se puede reducir al de sumar las magnitudes en un esquema de series, si ponemos

$$\xi_{nk} = \frac{1}{B_n} (\xi_k - a_{nk}), \quad (4.2)$$

donde  $a_k$  son de tal índole que  $\sum_{k=1}^n a_{nk} = A_n$ . Resulta que si las magnitudes (4.2) son infinitamente pequeñas para cierta elección de  $a_{nk}$ , serán infinitamente pequeñas, si hacemos  $a_{nk} = m_k$ , donde  $m_k$  es la mediana de la magnitud  $\xi_n$ , es decir, un número tal que  $P\{\xi_k \geq m_k\} \geq \frac{1}{2}$ ,  $P\{\xi_k < m_k\} \geq \frac{1}{2}$ . Las constantes  $B_n$  deben elegirse de una manera tal que exista el límite finito distinto de cero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n \inf_{\alpha} \int \frac{(x-\alpha)^2}{B_n^2 + (x-\alpha)^2} dF_h(x + m_k), \quad (4.3)$$

donde  $F_h(x)$  es la función de distribución de la magnitud  $\xi_h$ . Elegidas  $B_n$ , podemos tomar

$$A_n = \sum_1^n \left[ m_k + B_n \int \frac{x}{B_n^2 + x^2} dF_h(x + m_k) \right]. \quad (4.4)$$

**Teorema 1.** Si para la sucesión dada  $\xi_n$  resulta posible escoger  $B_n$  de un modo tal que se cumpla la condición (4.3) y, con ello para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \{ |\xi_n - m_n| > \varepsilon B_n \} = 0,$$

entonces para que  $\xi_n$  posea una distribución límite, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones: existe una función no decreciente  $G(x)$  tal que  $G(-\infty) = 0$ ,  $G(+\infty) < \infty$  y para casi todos los  $y$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{y B_n} \frac{x^2}{B_n^2 + x^2} dF_h(x + m_h + \alpha_{nh}) = G(y),$$

mientras que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2 + x^2} dF_h(x + m_h + \alpha_{nh}) = G(+\infty),$$

donde

$$\alpha_{nh} = B_n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2 + x^2} dF_h(x + m_h).$$

Si se cumple esta condición, la función característica de la ley límite se da por la fórmula (2.2) con  $\gamma = 0$ .

Ha de notarse, que en el caso de que están cumplidas las condiciones del teorema 1, a título de distribución límite para la magnitud  $\xi_n$  pueden intervenir no todas las distribuciones divisibles infinitamente, sino sólo una cierta clase de tales distribuciones, llamada clase  $L$ .

Las distribuciones de la clase  $L$  se caracterizan por la siguiente propiedad: para estas distribuciones la función  $G$  en la fórmula (2.2) tiene obligatoriamente en todo punto  $x \neq 0$  las derivadas izquierda y derecha y la función

$$\frac{1+x^2}{x} G'(x)$$

no es creciente, cuando  $x < 0$  y cuando  $x > 0$  (con ello,  $G'(x)$  puede significar cualquier derivada, izquierda o derecha, y quizás ésta no será la misma en diferentes puntos). Al emplear la representación (2.3) para las funciones características de distribuciones divisibles infinitamente, la clase  $L$  coincidirá con el conjunto de aquellas distribuciones para las cuales las funciones  $N$  y  $M$  en la fórmula (2.3) son logarítmicamente convexas, es decir,  $N(-e^{-x})$  y  $M(e^x)$  son convexas (la primera hacia las  $y$  negativas y la segunda, hacia las  $y$  positivas). A título de ejemplo de las distribuciones de la clase  $L$ , pueden servir las distribuciones estables (inclusive normales).

**5.4.2. Aplicación del teorema general. 1. Convergencia hacia la distribución degenerada.** Está claro que mediante la elección adecuada de las constantes  $B_n$ , crecientes con la suficiente rapidez, se puede conseguir que  $\xi_n$  converja hacia cero en probabilidad. Este hecho no es

de interés, si  $\frac{A_n}{B_n} \rightarrow 0$ . Si en cambio, esta última condición no se cum-

ple, se pueden indicar unas constantes  $C_n$  tales que  $\frac{1}{C_n} \sum_{h=1}^n (\xi_h - 1)$

converge en probabilidad hacia cero. En este caso las constantes  $C_n$  caracterizan en cierto sentido el crecimiento de las sumas aleatorias  $\sum_{h=1}^n \xi_h$ , mientras que las propias sumas se denominan relativamente estables.

Supongamos que las constantes  $A_n$  y  $B_n$  están elegidas en conformidad con las fórmulas (4.3) y (4.4). Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$ , para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{A_n} \sum_{h=1}^n \xi_h - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (4.5)$$

Otra condición de estabilidad relativa. Supongamos que existen unas  $C_n$  tales que se cumplen las condiciones:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n P \{ |\xi_h| > C_n \} = 0$ ;
- 2) si  $F_h(x)$  es una función de distribución de la magnitud  $\xi_h$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{C_n} \int_{-C_n}^{C_n} x dF_h(x) = +\infty.$$

Entonces, la correlación (4.5) se cumplirá, si ponemos

$$A_n = \sum_{h=1}^n \int_{-C_n}^{C_n} x dF_h(x).$$

Supongamos ahora que las magnitudes  $\xi_h$  están igualmente distribuidas y no son negativas,  $P \{ \xi_h > 0 \} > 0$ . Para que las sumas de  $\xi_n$  sean relativamente estables, es necesario y suficiente el cumplimiento de la siguiente condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t [1 - F(t)]} \int_0^t x dF(x) = +\infty$$

(en el caso de que  $1 - F(t_0) = 0$  para cierto  $t_0$ , consideramos que  $\frac{C}{0} = +\infty$  cuando  $C > 0$ , de suerte que esta condición se cumple). Las constantes  $A_n$  tales que se cumpla la correlación (4.5), pueden

escogerse iguales a  $A_n = n \int_0^{C_n} x dF(x)$ , si  $C_n$  son de tal índole que  $\frac{A_n}{C_n} \rightarrow +\infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - F(C_n)) = 0$ .

EjemPlo. Supongamos que las magnitudes  $\xi_k$  toman los valores  $2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) con la probabilidad  $\frac{1}{2^{n+1}}$ . Entonces, para  $2^n \leq t < 2^{n+1}$

$$\frac{1}{t[1-F(t)]} \int_0^t x dF(x) = \frac{2^n}{t} n \rightarrow +\infty.$$

Si tomamos  $A_n = n \ln n$ , estará cumplida (4.5).  $C_n$  puede elegirse aquí, por ejemplo, igual a  $n \sqrt{\ln n}$ .

II. Convergencia hacia la distribución normal. Sea  $\xi_k$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes con las funciones de distribución  $F_k(x)$ . Sin restringir la generalidad, consideraremos que sus medianas  $m_k = 0$  (de lo contrario podríamos considerar las magnitudes  $\xi_k - m_k$ ).

Para que existan tales constantes  $A_n$  y  $B_n$  que

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} \left( \sum_1^n \xi_k - A_n \right)$$

tenga, para  $n \rightarrow \infty$ , una distribución normal límite y para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\zeta_n| > \varepsilon B_n\} = 0,$$

es necesario y suficiente que existan unas constantes  $C_n$  tales que

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n P\{|\xi_k| > C_n\} = 0,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{C_n^2} \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{|x| < C_n} x^2 dF_k(x) - \left( \int_{|x| < C_n} x dF_k(x) \right)^2 \right\} = +\infty.$$

En este caso podemos poner

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{|x| < C_n} x^2 dF_k(x) - \left( \int_{|x| < C_n} x dF_k(x) \right)^2 \right\};$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \int_{|x| < C_n} x dF_k(x).$$

La función característica de la ley normal límite tendrá la forma:  $\varphi(z) = e^{-z^2/2}$ .

5.4.3. Teoremas del límite para los sumandos igualmente distribuidos. Supongamos que  $\xi_1, \xi_2, \dots$  son independientes y están igualmente distribuidas. Señalemos las condiciones bajo las cuales existen las constantes  $A_n$  y  $B_n$  tales que la magnitud

$$\zeta_n = \frac{1}{B_n} \left( \sum_1^n \xi_h - A_n \right)$$

tiene una distribución límite, cuando  $n \rightarrow \infty$ . En este punto serán de interés para nosotros las distribuciones límites distintas de la distribución degenerada y de la normal, pues la convergencia hacia las últimas ya se ha considerado más arriba. Además, nos limitaremos a un caso de magnitudes en  $R^1$ .

**Teorema 2.** Si las magnitudes  $\zeta_n$  tienen una distribución límite esta será obligatoriamente estable.

Para enunciar los resultados ulteriores nos hará falta el concepto de función de variación regular. Una función  $h(t)$ , definida para  $t > 0$  (o bien para todos los  $t > 0$ ), recibe el nombre de función de variación regular, si para todos los  $k > 0$  existe

$$\lim \frac{h(t_1)}{h(t_2)},$$

cuando  $t_1 \rightarrow +\infty, \frac{t_1}{t_2} \rightarrow k$ . Resulta que este límite (que, naturalmente, sólo depende de  $k$ ) tiene forzosamente la forma  $k^\alpha$  ( $-\infty < \alpha < +\infty$ ). El exponente  $\alpha$  se denomina grado de la función de variación lenta. Una función regular de grado  $\alpha$  puede ser representada en la forma  $h(t) = t^\alpha h_0(t)$ , donde  $h_0(t)$  es una función de variación lenta.

A título de ejemplo de las funciones de variación lenta sirven:

- a) la función  $h(t)$ , para la cual  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t)$  existe y es distinto de cero;
- b)  $h(t) = (\log t)^\beta$ , cualquiera que sea el exponente  $\beta$ ;
- c)  $h(t) = \llbracket \log \log(t+1) \rrbracket^\beta$  para todo  $\beta$ .

La forma general de una función de variación lenta se da por la fórmula

$$h(t) = C(t) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\alpha(z)}{z} dz \right\},$$

donde existen  $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) \neq 0$ , y  $\lim_{z \rightarrow +\infty} \alpha(z) = 0$ .

Las condiciones para la convergencia hacia las leyes estables de exponente  $\alpha$  nos da el

**Teorema 3.** Para que existan las constantes  $A_n$  y  $B_n$  tales que las magnitudes  $\zeta_n$  tengan una distribución estable límite de exponente  $\alpha$ , es necesario y suficiente que

a) la función  $h(t) = 1 - F(t) + F(-t)$  ( $t > 0$ ) sea de variación regular de grado  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ );

b) exista el límite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t)}{h(t)} = \lambda.$$

Si dichas condiciones están cumplidas, la función característica de la ley estable límite tendrá la forma

$$\varphi(z) = \exp \{t\gamma z - C |z|^\alpha [1 + t\beta\omega(z, \alpha)]\} \quad (4.6)$$

(véase la fórmula (2.11), donde  $\gamma$  y  $C$  son unas constantes, dependientes de cómo se eligen las constantes  $A_n$  y  $B_n$ ;  $\alpha$  es lo que se ha mencionado en la condición a);  $\beta = 2\lambda - 1$ , donde  $\lambda$  se ha tomado de la condición b).

La elección de las constantes  $B_n$  puede realizarse por un procedimiento que no depende de los valores de  $\alpha$  y  $\lambda$ , a saber,  $B_n$  puede ser elegida de una manera tal que sea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh(B_n) = 1 \quad (4.7)$$

(de la regularidad de la función  $h$  se desprende que esto es siempre posible).

Para la elección de  $A_n$  conviene considerar tres casos.

1.  $\alpha < 1$ ,  $A_n = 0$ . Si  $B_n$  está elegida en conformidad con (4.7), entonces en la fórmula (4.6)  $\gamma = 0$ ,  $C = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} \cos \frac{\pi}{2} \alpha$  ( $\Gamma$  es la función gamma de Euler).

2.  $1 < \alpha < 2$ . En este caso  $M\xi_n = a$ , y  $A_n = na$ . Con tal elección de  $A_n$  y  $B_n$  tendremos en la fórmula (4.6):  $\gamma = 0$ ,  $C = -\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha(\alpha-1)} \times \cos \frac{\pi}{2} \alpha$  ( $\Gamma$  es la función gamma de Euler).

3.  $\alpha = 1$ . En este caso se puede poner  $A_n = nB_n \int \frac{x}{x^2 + B_n^2} \times dF(x)$  ( $B_n$  se determinan de (4.7)). Con tal elección de las constantes  $A_n$  y  $B_n$  tendremos  $C = \frac{\pi}{2}$ ,  $\gamma = \int_0^\infty \left[ \frac{\sin v}{v^2} - \frac{1}{v(1+v^2)} \right] dv$ .

**DISTRIBUCIONES PROBABILÍSTICAS PRINCIPALES**

Abajo se dan los datos fundamentales acerca de las distribuciones probabilísticas más importantes.

**6.1. Distribuciones discretas**

6.1.1. **Distribución degenerada.** 1. La magnitud aleatoria  $\xi$  tiene una distribución degenerada, concentrada en  $a$ , si

$$P\{\xi = a\} = 1.$$

La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

2. La función característica  $\varphi(t) = e^{it a}$ .

Los momentos:  $M\xi^k = a^k$ ;  $D\xi = 0$ .

3. Una distribución degenerada describe las magnitudes no aleatorias. Es válida la afirmación recíproca: si una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene la esperanza matemática finita y la varianza nula, entonces

$$P\{\xi = M\xi\} = 1.$$

6.2.1. **Distribución de Bernoulli.** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene la distribución de Bernoulli de parámetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ), si

$$P\{\xi = 1\} = p, \quad P\{\xi = 0\} = 1 - p.$$

La función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

2. La función característica  $\varphi(t) = 1 + p(e^{it} - 1)$ .

Los momentos:  $M\xi^k = p$ ;  $D\xi = p(1 - p)$ .

3. La distribución de Bernoulli desempeña un papel fundamental en la teoría de probabilidades y en la estadística matemática sirviendo de modelo para cualquier experimento aleatorio cuyos resultados pertenecen a dos clases que se excluyen.

6.1.3. **Distribución binomial.** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución binomial con los parámetros  $(n, p)$  ( $0 < p < 1, n \geq$



$\geq 1$ ), si

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, n.$$

La función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} \sum_{h=1}^l C_n^h p^h (1-p)^{n-h}, & l \leq x \leq l+1; \\ 1, & x \geq n; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2. La función característica  $\varphi(t) = [1 + p(e^{it} - 1)]^n$ .

Los momentos:  $M\xi = np$ ,  $M\xi^2 = np + n(n-1)p^2$ ,  $M\xi^3 = np(1-p)(1-2p)$ ,  $M\xi^4 = 3n^2p^2(1-p^2) + np(1-p)(1-6p(1-p))$ ;  $D\xi = np(1-p)$ .

El coeficiente de asimetría  $\gamma = \frac{p}{\sqrt{np(1-p)}}$ .

Los momentos centrales  $\mu_k = M(\xi - M\xi)^k$  pueden ser calculados por medio de la fórmula

$$\mu_{k+1} = p(1-p) \left[ n^k \mu_{k-1} + \frac{d\mu_k}{dp} \right].$$

3. La distribución binomial es un modelo de experimentos aleatorios compuestos de  $n$  pruebas de Bernoulli homogéneas independientes; si  $\xi_k$ ,  $k = 1, n$  son independientes y tienen la distribución de Bernoulli de parámetro  $p$ , entonces la magnitud aleatoria  $\xi = \sum_{k=1}^n \xi_k$  posee una distribución binomial.

4. Si  $p$  es tal que  $np(1-p) > 9$  y  $\frac{1}{n+1} < p < \frac{n}{n+1}$ , podemos emplear las siguientes fórmulas aproximadas:

$$B_p(n, k) = P\{\xi = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \varphi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

donde  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  es la densidad de la distribución normal estándar, o bien

$$B_p(n, k) \approx \Phi\left(\frac{x+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{x-0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

donde  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$  es una función de la distribución normal estándar.

Con los mismos valores de  $p$  para la función de distribución  $F(x)$  puede emplearse la aproximación

$$F(x) \approx \Phi\left(\frac{x+0,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Si  $np^2 > 1,07$ , el error resultante, al emplear la función normal de distribución en lugar de la binomial, no es superior a 0,05 para cualquier  $x$ .

Si  $p$  tiene el mismo orden para  $n$  grandes que  $\frac{1}{n}$ , o bien si  $p < 0,1$ , podemos recurrir a una aproximación mediante la distribución de Poisson

$$B_p(n, k) \approx \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}, \quad F(k) \approx \sum_{l=0}^k \frac{(np)^l}{l!} e^{-np}.$$

Sea  $F_{\alpha\beta}(x)$  una función de distribución de la beta-distribución con los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ . Entonces

$$P\{\xi \leq k\} = F_{n-k, k+1}(1-p).$$

Si  $\eta_{m_1, m_2}$  es una magnitud aleatoria que tiene la  $F$ -distribución con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad, entonces

$$F(k) = P\{\xi \leq k\} = P\left\{\eta_{2(n-k), 2(k+1)} \leq \frac{k+1}{n-k} \frac{1-p}{p}\right\}.$$

#### 6.1.4. Distribución binomial negativa (distribución de Pascal).

1. La magnitud aleatoria  $\xi$  tiene una distribución binomial negativa (distribución de Pascal) con los parámetros  $(r, p)$ , si\*

$$P\{\xi = k\} = C_{r+k-1}^k p^r (1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. La función característica

$$\varphi(t) = \left[ \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}} \right]^r.$$

Los momentos:  $M\xi = \frac{r(1-p)}{p}$ ;  $D\xi = \frac{r(1-p)}{p^2}$ .

3. Siendo  $r$  natural, la distribución binomial negativa describe el número de pruebas en el esquema de Bernoulli indispensables para que se obtenga el valor 1 exactamente  $r$  veces.

Si las magnitudes aleatorias  $\xi_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , son independientes y tienen distribución logarítmica, entonces la magnitud aleatoria

$\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k$ , donde  $v$  no depende de  $\xi_k$  y está distribuida de acuerdo con la ley de Poisson de parámetro  $\lambda$ , tiene la distribución binomial negativa

con el parámetro  $r = -\frac{\lambda}{\ln p}$ .

---

\* Para  $r$  no enteros  $C_{r+k-1}^k$  se determina así:  $C_{r+k-1}^k = \frac{(r+k-1)(r+k-2)\dots r}{k!}$ .

Existe un rasgo característico más de la distribución binomial negativa, que consiste en lo siguiente. Sea  $\eta$  una magnitud aleatoria que tiene distribución de Poisson de parámetro  $\mu$ , es decir,  $P\{\eta = k\} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$ . Consideraremos  $\mu$  como una magnitud aleatoria que tiene distribución gamma de parámetro  $\lambda = \frac{p}{1-p}$  y  $\alpha = r$ . En este caso

$$P\{\eta = k\} = C_{r+k-1}^r p^r (1-p)^k.$$

En esta interpretación la distribución binomial negativa se aplica tanto a la estadística de accidentes y enfermedades, como también a los problemas asociados con la cantidad de individuos de la especie dada en las muestras de las poblaciones biológicas, etc.

4. Para  $p$  fijado la distribución binomial negativa es divisible infinitamente.

6.1.5. Distribución geométrica. 1. La magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución geométrica de parámetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ), si

$$P\{\xi = k\} = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{p}{1 - (1-p)e^{it}}.$$

$$\text{Los momentos: } M_{\xi}^k = \frac{1-p}{p^k}; \quad D\xi = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. La distribución geométrica es un caso particular de la distribución binomial negativa con  $r = 1$ . Describe el número de pruebas en el esquema de Bernoulli indispensables para que se obtenga el valor 1 exactamente una sola vez.

4. La importancia de la distribución geométrica se explica por una propiedad llamada ausencia del efecto posterior: para cualesquiera  $m, n \geq 0$

$$P\{\xi \geq m + n \mid \xi \geq m\} = P\{\xi \geq n\}.$$

6.1.6. Distribución hipergeométrica. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución hipergeométrica de parámetros  $(N, p, n)$  ( $0 < p < 1$ ), si

$$P\{\xi = k\} = \frac{C_N^k C_{N-k}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{[N(1-p)]^{[n]}}{N^{[n]}} \sum_{l=0}^n \frac{[Np]^{[l]} n^{[l]} e^{ilt}}{[N(1-p) - n + l]^{[l]} l!},$$

donde  $C^{[l]} = C(C-1)(C-2)\dots(C-l+1)$ .  $\varphi(t)$  es una solución de la ecuación diferencial

$$(1-e^{it}) \left\{ \frac{d^2\varphi}{dt^2} - (n+Np) \frac{d\varphi}{dt} + Npn\varphi \right\} - Npn\varphi + N \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

Los momentos:  $M_{\xi}^2 = np$ ;  $D_{\xi}^2 = \frac{N-n}{N-1} np(1-p)$ .

3. Un esquema típico en el que surge la distribución hipergeométrica: se comprueba un lote de artículos acabados en el que están contenidos  $Np$  artículos útiles y  $N(1-p)$  defectuosos. Se eligen al azar  $n$  artículos. La distribución hipergeométrica describe precisamente el número de artículos útiles entre los elegidos.

4. Si  $n$  es pequeño en comparación con  $N$  (prácticamente, cuando  $n < 0,1 N$ ), entonces

$$\frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n} \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

6.1.7. Distribución de Polya. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Polya de parámetros  $(N, p, n, s)$ , si

$$P\{\xi = k\} = C_n^k \frac{b(b+s) \dots [b+(k-1)s] c(c+s) \dots [c+(n-k-1)s]}{N(N+s) \dots [N+(n-1)s]},$$

donde  $b = Np$ ,  $c = N(1-p)$ .

2. Los momentos:  $M_{\xi}^2 = np$ ,  $M_{\xi}^3 = np \frac{n+p+1+\frac{s}{N}}{1+\frac{s}{N}}$ ;  $D_{\xi}^2 =$

$$= np(1-p) \frac{1+\frac{ns}{N}}{1+\frac{s}{N}}.$$

3. La distribución de Polya interviene como modelo del experimento siguiente: se tiene una urna en la cual hay  $Np$  bolas blancas y  $N(1-p)$  bolas negras. Al azar se saca una bola y, determinado el color, se retorna a la urna junto con  $s$  bolas nuevas de ese mismo color. En este caso  $\xi$  significa el número de extracciones de la bola blanca en la serie de  $n$  extracciones. Es de amplio uso en la simulación de epidemias de enfermedades contagiosas.

4. Si  $n$  es pequeño en comparación con  $N$ , entonces

$$P\{\xi = k\} \approx C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

6.1.8. Distribución de Poisson. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ), si

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

2. La función característica  $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ .

Los momentos:  $M_{\xi}^2 = \lambda$ ,  $M_{\xi}^3 = \lambda^2 + \lambda$ ;  $D_{\xi}^2 = \lambda$ .

Los momentos centrales  $\mu_k = M\{\xi - M\xi\}^k$  pueden ser calculados según las correlaciones:

$$\mu_k = \lambda \sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l \mu_l, \quad \text{o bien } \mu_{k+1} = k\lambda\mu_{k-1} + \lambda \frac{d\mu_k}{d\lambda}.$$

3. La distribución de Poisson es un modelo aceptable para la descripción de un número aleatorio de apariciones de ciertos sucesos en el intervalo fijado de tiempo y en el recinto fijado del espacio.

4. Si  $np \rightarrow \lambda$ , entonces  $C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ . Para  $\lambda$  grandes tiene lugar la aproximación

$$P\{\xi \leq k\} \approx \Phi\left(\frac{k+0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

donde  $\Phi(x)$  es una función normal (0, 1) de distribución.

Si  $F_m(x)$  es la función de distribución de la distribución  $\chi^2$  con  $m$  grados de libertad, entonces

$$P\{\xi \leq k\} = 1 - F_{2(\lambda+1)}(2\lambda).$$

Si  $\xi$  tiene una distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ , entonces para  $\lambda$  grandes la magnitud aleatoria  $\sqrt{\xi}$  tiene la distribución, próxima a la normal, de parámetros  $(\sqrt{\lambda}, \frac{1}{4})$ .

5. La distribución de Poisson es divisible infinitamente. Si una suma de las magnitudes aleatorias independientes está distribuida según la ley de Poisson, todo sumando de la suma se atiene a la distribución según esta misma ley.

Supongamos que  $\xi_1, \xi_2, \dots$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas y  $\nu$  es una magnitud aleatoria que tiene la distribución de Poisson de parámetro  $\lambda$ .

La distribución de la magnitud aleatoria  $\xi = \sum_{k=1}^{\nu} \xi_k$  se denomina distribución compleja de Poisson.

La función característica de la magnitud aleatoria

$$\varphi(t) = e^{-\lambda + \lambda\psi(t)},$$

donde  $\psi(t)$  es la función característica de las magnitudes aleatorias  $\xi_k$ .

6.1.9. Distribución binomial generalizada. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene la distribución binomial generalizada con los parámetros  $(n, p_1, p_2, \dots, p_n)$  ( $0 < p_i < 1, i = \overline{1, n}$ ), si

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (1-p_i), & k=0; \\ \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_{k-1}=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_j}}^n (1-p_i) \prod_{j=1}^k p_{i_j}, & k = \overline{1, n-1}; \\ \prod_{i=1}^n p_i, & k=n. \end{cases}$$

2. La función característica  $\varphi(t) = \prod_{k=1}^n [1 + p_k(e^{it} - 1)]$ .

Los momentos:  $M_{\xi}^1 = \sum_{h=1}^n p_h$ ,  $M_{\xi}^{22} = \sum_{h=1}^n p_h + \sum_{h < l} p_h p_l$ ;  $D_{\xi}^2 =$   
 $= \sum_{h=1}^n p_h (1 - p_h)$ .

3. Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  unas magnitudes aleatorias que tienen la distribución de Bernoulli de parámetro  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , respectivamente. En este caso la magnitud aleatoria  $\xi = \sum_{h=1}^n \xi_h$  tendrá una distribución binomial generalizada.

Si  $\bar{p} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n p_h$  y  $\sigma_p^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n p_h^2 - \bar{p}^2$ , entonces  $D_{\xi}^2 =$   
 $= n\bar{p}(1 - \bar{p}) + n\sigma_p^2$ . Por ello, la varianza de la distribución binomial de parámetros  $(n, \bar{p})$  por  $n$  varianzas de la magnitud aleatoria  $\xi$  con los valores  $p_h, k = 1, n$  y la distribución  $P\{\xi = p_h\} = \frac{1}{n}$  es mayor que la distribución de la magnitud aleatoria  $\xi$  con la distribución binomial generalizada.

6.1.10. Distribución logarítmica. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución logarítmica de parámetro  $p$  ( $0 < p < 1$ ), si

$$P\{\xi = k\} = -\frac{1}{\ln p} \frac{(1-p)^k}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

2. La función característica es  $\varphi(t) = \frac{1}{\ln p} \ln[1 - (1-p)e^{tp}] =$   
 $= 1 - \frac{1}{\ln p} \ln \left[ 1 - \frac{1-p}{p} \cdot \frac{t}{1!} - \frac{1-p}{2!} \frac{t^2}{2!} - \dots \right]$ .

Los momentos:  $M_{\xi}^1 = -\frac{1-p}{p \ln p}$ ,  $M_{\xi}^{22} = -\frac{1-p}{p^2 \ln p}$ ,  $M_{\xi}^{33} =$   
 $= -\frac{(1-p)(2-p)}{p^3 \ln p}$ ;  $D_{\xi}^2 = -\frac{1-p}{p^2 \ln p} \left[ 1 + \frac{1-p}{\ln p} \right]$ .

3. La distribución logarítmica es límite para una distribución binomial negativa en el sentido siguiente. Si  $\eta_r$  es una magnitud aleatoria que tiene distribución binomial negativa de parámetro  $(r, p)$ , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} P\{\eta_r = k/\eta_r\} > 0 = -\frac{(1-p)^k}{k \ln p}$$

4. Se llama también logarítmica una distribución de la magnitud aleatoria  $\xi$  tal que

$$P\{\xi = k\} = \log_m(k+1) - \log_m k, \quad k = 1, m-1.$$

**6.1.11. Distribución de Borel—Tanner.** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Borel—Tanner de parámetros  $(r, \alpha)$  ( $0 < \alpha < 1$ ), si

$$P\{\xi = k\} = \frac{r}{(k-r)!} k^{k-r-1} e^{-\alpha k} \alpha^{k-r}, \quad k = r, r+1, \dots$$

2. Los momentos:  $M\xi = \frac{r}{1-\alpha}$ ;  $D\xi = \frac{\alpha r}{(1-\alpha)^2}$ .

3. En la teoría del servicio de masas la distribución de Borel—Tanner se determina como la distribución del número de las demandas servidas durante el período de ocupación en el sistema mencionado con un flujo de Poisson entrante de parámetro  $\alpha$  y el tiempo constante de servicio en aquel caso cuando la longitud de la cola en el instante inicial sea igual a  $r$ .

## 6.2. Distribuciones continuas

**6.2.1. Distribución uniforme.** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene la distribución uniforme en el intervalo  $[a, b]$ , ( $a < b$ ), si\*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(Véase la fig. 1.)

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{1}{b-a} \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it}.$$

Los momentos:  $M\xi^k = \frac{1}{b-a} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$ .

3. Con la ayuda de la transformación lineal  $\eta = \frac{\xi - a}{b - a}$  se reduce a la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . La distribución uniforme es el análogo continuo de las distribuciones de la teoría clásica de probabilidades que describen unos experimentos aleatorios con resultados equiprobables.

4. El error originado por el redondeo de un número se describe satisfactoriamente mediante una distribución uniforme en el intervalo  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

Si una magnitud aleatoria  $\xi$  con la función de distribución  $F_\xi(x)$  tiene distribución continua, la magnitud aleatoria  $\xi - F_\xi(\xi)$  tiene distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . A esto se debe la amplia aplicación de la distribución uniforme en la simulación estadística (los métodos de Montecarlo).

\*Aquí y en adelante con  $f(x)$  está designada la densidad de probabilidad de la magnitud aleatoria correspondiente.

6.2.2. Distribución en triángulo (distribución de Simpson). 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución en triángulo (distribución de Simpson) en el intervalo  $[a, b]$ , si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{b-a} - \frac{2}{(b-a)^2} |a+b-2x|, & x \in [a, b]; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(Véase la fig. 2.)

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \left[ \frac{2}{b-a} \frac{e^{it\frac{b}{2}} - e^{it\frac{a}{2}}}{it} \right]^2.$$

Los momentos:  $M_{\xi}^{2k} = \frac{4}{(b-a)^2 (k+1)(k+2)} \left[ a^{k+2} + b^{k+2} - 2 \left( \frac{a+b}{2} \right)^{k+2} \right]$ ;  $D_{\xi} = \frac{(b-a)^2}{24}$ .

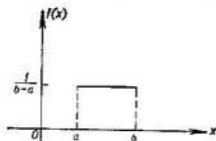


Fig. 1. Densidad de la distribución uniforme

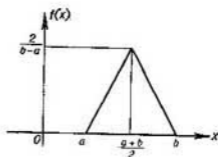


Fig. 2. Densidad de la distribución en triángulo

3. Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son unas magnitudes aleatorias independientes, distribuidas igualmente en el intervalo  $\left[ \frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right]$ , entonces la magnitud aleatoria  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  tiene distribución en triángulo.

6.2.3. Distribución exponencial. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución exponencial de parámetro  $\lambda > 0$ , si

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 3.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$ .

Los momentos:  $M_{\xi}^{2k} = \frac{k!}{\lambda^k}$ ;  $D_{\xi} = \frac{1}{\lambda^2}$ .

3. Análogo continuo de la distribución geométrica. Posee la propiedad de la ausencia del efecto posterior:

$$P\{\xi > t + s / \xi > s\} = P\{\xi > t\},$$



a consecuencia de la cual es la distribución principal en la teoría de los procesos a saltos de Márkov.

6.2.4. **Distribución hiperexponencial.** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución hiperexponencial con los parámetros  $(m; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ,  $\alpha_h \lambda_h > 0$ ,  $\sum_{h=1}^m \alpha_h = 1$ , si

$$\alpha_2, \dots, \alpha_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m), \alpha_h \lambda_h > 0, \sum_{h=1}^m \alpha_h = 1, \text{ si}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{h=1}^m \alpha_h \lambda_h e^{-\lambda_h x}, & k \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 4.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \sum_{k=1}^m \frac{\alpha_k \lambda_k}{\lambda - it}$ .

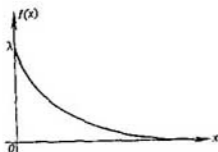


Fig. 3. Densidad de la distribución exponencial

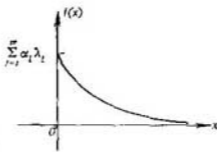


Fig. 4. Densidad de la distribución hiperexponencial

3. Los momentos:  $M_{\xi}^k = \sum_{l=1}^m \alpha_l \frac{k!}{\lambda_l^k}$ ;  $D_{\xi}^2 = 2 \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_l}{\lambda_l^2} -$

$$- \left( \sum_{l=1}^m \frac{\alpha_l}{\lambda_l} \right)^2.$$

3. Introduzcamos los indicadores aleatorios  $I_h$  ( $h = \overline{1, m}$  son unas magnitudes aleatorias) que toman los valores 0 ó 1, con la particularidad de que  $P\{I_h = 1\} = \alpha_h$ ,  $P\left\{\sum_{k=1}^m I_h = 1\right\} = 1$ . Si  $\xi_h$ ,  $h = \overline{1, m}$  son unas magnitudes aleatorias independientes que tienen distribución exponencial de parámetro  $\lambda_h$ , respectivamente, entonces la magnitud aleatoria  $\xi = \sum_{h=1}^m I_h \xi_h$  tiene distribución hiperexponencial con los parámetros  $(m, \alpha_1, \dots, \alpha_m; \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ .

6.2.5. Distribución normal. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución normal de parámetros  $(m, \sigma^2)$ , si

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

(Véase la fig. 5.)

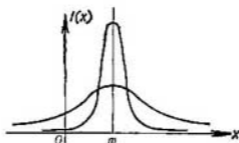


Fig. 5. Densidad de la distribución normal

A la par con la representación de la densidad de una distribución normal aducida más arriba se utiliza también la siguiente:

$$f(x) = \frac{\rho}{\sqrt{\pi}E} e^{-\frac{\rho^2(x-m)^2}{E^2}},$$

donde  $\rho = 0,4769 \dots$  es una solución de la ecuación

$$\int_0^{\rho} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\pi}.$$

y  $E = \rho \sqrt{2} \sigma$  se determina de la correlación

$$\{ |\xi - m| \leq E \} = \mathbf{P} \{ |\xi - m| > E \} = 0,5$$

y se denomina desviación media (o bien probabilística).

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \exp \left\{ imt - \frac{t^2 \sigma^2}{2} \right\}.$$

Los momentos:  $\mu_{2k+1} = 0$ ,  $\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1) \sigma^{2k}$ , donde  $\mu_k = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^k$ ,  $\mathbf{M}\xi = m$ ;  $\mathbf{D}\xi = \sigma^2$ .

3. El papel fundamental que se desempeña por la distribución normal se debe a que bajo las amplias suposiciones el comportamiento de las sumas de magnitudes aleatorias, al crecer el número de sumandos, es asintóticamente normal. Las correspondientes condiciones constituyen el contenido del teorema del límite central.

Con la ayuda de la transformación lineal  $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$  se reduce a la distribución normal de parámetros  $(0, 1)$ , llamada **distribución**

normal estándar con la función de distribución

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Es tabulada, como regla, la función  $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ , ligada con  $\Phi(x)$  mediante la correlación  $\Phi_0(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x)$ .

Cuando  $x$  son pequeños, para calcular  $\Phi(x)$  se puede emplear el desarrollo

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2! 2 \cdot 5} + \dots \right)$$

o bien la correlación de Mills  $R(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = \int_x^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - y^2)} dy$ ,

que se descompone en una fracción continua:

$$R(x) = \frac{1}{x+} \frac{1}{x+} \frac{2}{x+} \frac{3}{x+} \dots \frac{n}{x+} \dots$$

Una magnitud aleatoria de distribución normal toma con alta probabilidad unos valores próximos a su esperanza matemática, lo que se expresa por la regla de sigmas:

$$P\{| \xi - m | \geq k\sigma\} = \begin{cases} 0,3173 \dots, & k=1; \\ 0,0455 \dots, & k=2; \\ 0,0027 \dots, & k=3. \end{cases}$$

Con la mayor frecuencia se utiliza la regla de tres sigmas.

4. La distribución normal es divisible infinitamente. Si una suma de dos magnitudes aleatorias independientes tiene distribución normal, la distribución de cada sumando también será normal.

La distribución normal puede encontrarse llevando los nombres de segunda ley de Laplace, distribución laplaciana, distribución gaussiana, distribución de Laplace-Gauss, distribución de Gauss-Laplace.

6.2.6. Distribución gamma. 1. Una magnitud aleatoria tiene distribución gamma de parámetros  $(\alpha, \lambda)$  ( $\alpha > 0, \lambda > 0$ ), si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 6.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$ .

Los momentos  $M_{\xi^k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}$ ;  $D_{\xi}^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$ .

3. La distribución gamma es un análogo continuo de la distribución binomial negativa. Cuando  $\alpha = 1$ , la distribución gamma coincide con la distribución exponencial y para  $\alpha = \frac{n}{2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$  con la distribución  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad. Cuando  $\lambda = n\mu$  y  $\alpha = n$ , la distribución gamma lleva el nombre de distribución de Erlang de parámetros  $(n, \mu)$  que describe la distribución de la duración del intervalo de tiempo hasta la aparición de  $n$  sucesos del proceso de Poisson de parámetro  $\mu$ , que se utiliza en la teoría del servicio de masas y en la de fiabilidad.

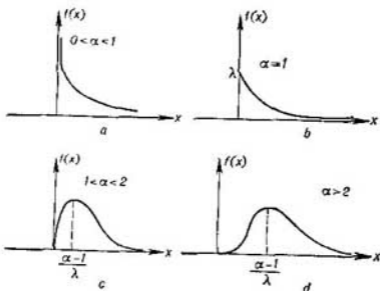


Fig. 6 Densidad de la distribución gamma

Cuando  $n \rightarrow \infty$ , la distribución de Erlang tiende a una distribución degenerada.

Cuando  $\alpha = m + 1$  y  $\lambda = 1$ , la distribución gamma se denomina distribución exponencial potencial de parámetro  $m$ , cuya función de distribución tiene por expresión

$$F(x) = 1 - e^{-x} \sum_{l=0}^m \frac{x^l}{l!}.$$

Para  $\lambda$  fijado la distribución gamma es divisible infinitamente.

6.2.7. Distribución beta. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución beta de parámetros  $(\alpha, \beta)$  ( $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ), si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & x \in [0, 1]; \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

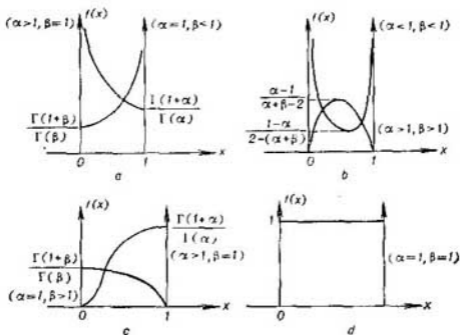
(Véase la fig. 7.)

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{\Gamma(\alpha + k)}{\Gamma(\alpha + \beta + k)}.$$

$$\text{Los momentos: } M_{\xi}^k = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+k-1)} = \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+k)}; \quad D_{\xi}^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

3. La distribución beta surge, por ejemplo, como una distribución de las estadísticas ordinales.



Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son independientes y están igualmente distribuidas en el intervalo  $[0, 1]$  y si  $\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \dots, \xi_{(n)}$  son unas magnitudes  $\xi_k, k = 1, n$ , ordenadas en crecimiento ( $\xi_{(k)}$  se llama  $k$ -ésima estadística ordinal), entonces la densidad de probabilidad  $f_{(k)}(x)$  de la  $k$ -ésima estadística ordinal  $\xi_{(k)}$ , tiene distribución beta con  $\alpha = k, \beta = n - k + 1$ .

Si  $\alpha > 1, \beta > 1$ , la distribución beta es unimodal con la moda en el punto  $\tau = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ . Cuando  $\alpha = \beta = 1$ , la distribución beta coincide con la distribución uniforme en el intervalo  $[0, 1]$ . Cuando  $\beta = \alpha + 1$ , la distribución beta lleva el nombre de distribución

generalizada del arco seno y para  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , distribución del arco seno.

6.2.8. Distribución de Cauchy. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Cauchy de parámetros  $(\alpha, \lambda)$  ( $\lambda > 0$ ), si

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x - \alpha)^2}.$$

(Véase la fig. 8.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \exp\{i\alpha t - \lambda|t|\}$ .

Los momentos de una magnitud aleatoria que tiene distribución de Cauchy son infinitos.

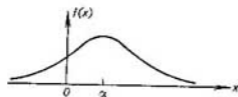


Fig. 8. Densidad de la distribución de Cauchy

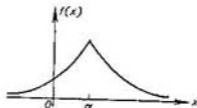


Fig. 9. Densidad de la distribución exponencial doble

3. El parámetro  $\alpha$  es la moda y la mediana. La distribución de Cauchy es divisible infinitamente.

6.2.9. Distribución de Laplace (distribución exponencial doble).

1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Laplace (distribución exponencial doble) de parámetros  $(\alpha, \lambda)$  ( $\lambda > 0$ ), si

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

(Véase la fig. 9.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \frac{\lambda^2 e^{i t \alpha}}{t^2 + \lambda^2}$ .

Los momentos:  $M\xi^{2k+1} = \alpha^{2k+1} (2k+1)!$   $M\xi^{2k} = \left[ \frac{\alpha^{2k}}{(2k)!} + \frac{\alpha^{2(k-1)}}{2(k-1)!\lambda^2} + \dots + \frac{1}{\lambda^{2k}} \right] (2k)!$   $D\xi = \frac{2}{\lambda^2}$ .

3. Sean  $\xi_1, \xi_2$  unas magnitudes aleatorias independientes que tienen la distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Una magnitud aleatoria  $\xi = \xi_1 - \xi_2 + \alpha$  tiene la distribución de Laplace de parámetro  $(\alpha, \lambda)$ . Aparece a título de distribución límite en los esquemas de adición del número aleatorio de los sumandos aleatorios.

6.2.10. Distribución  $\chi^2$ . 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $\alpha$  grados de libertad, si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 10.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = (-2it)^{-\frac{\alpha}{2}}$ .

Los momentos:  $M\xi^k = \alpha(\alpha + 2) \dots [\alpha + 2(k - 1)]$ ;  $D\xi = 2\alpha$ ,  
 $\mu_3 = 8\alpha$ ,  $\mu_4 = 48\alpha + 2\alpha^2$ , ...

3. Las numerosas aplicaciones de la distribución  $\chi^2$  en la teoría de probabilidades y en la estadística matemática están basadas en su siguiente interpretación.

Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  unas magnitudes aleatorias independientes que tienen la distribución normal estándar. La magnitud aleatoria  $\xi =$

$\xi = \sum_{h=1}^n \xi_h^2$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad.

Si  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  es un vector normal  $n$ -dimensional con la esperanza matemática  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  y la matriz de covarianza no degenerada  $C = \{c_{ij}, i, j = \overline{1, n}\}$ , entonces la magnitud aleatoria

$$\xi = (\eta - m)^* C^{-1} (\eta - m) =$$

$$= \sum_{i, j=1}^n c_{ij}^{-1} (\eta_i - m_i) (\eta_j - m_j),$$

donde  $*$  significa la operación de transposición y  $c_{ij}^{-1}$  son los elementos de la matriz  $C^{-1}$ , tiene la distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad.

Si  $\xi$  es una magnitud aleatoria que tiene la distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad, entonces la magnitud aleatoria  $\sqrt{2\xi^2} = \sqrt{2n-1}$  tiene una distribución normal estándar aproximada.

4. Uno de los criterios para comprobar la concordancia de los datos empíricos con la función hipotética de distribución  $F(x)$  está basado en el estudio de la estadística  $\chi^2$  de Pearson

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

donde  $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ ,  $x_0 = -\infty < x_1 < \dots < x_h = \infty$ , es una partición arbitraria del intervalo  $(-\infty, \infty)$ ,  $n_i$  es el número de observaciones en el intervalo  $[x_{i-1}, x_i)$ . Al suponer verdadera la hipótesis, la estadística  $\chi^2$  de Pearson tiene en límite, para  $n = \sum_{i=1}^h n_i \rightarrow \infty$ , una distribución  $\chi^2$  con  $k - 1$  grados de libertad y no depende de  $F(x)$ .

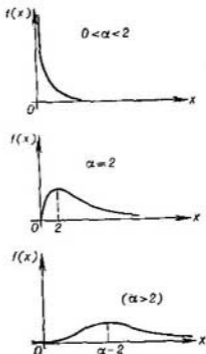


Fig. 10. Densidad de la distribución  $\chi^2$

5. Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son unas magnitudes aleatorias independientes que tienen distribuciones normales con los parámetros respectivos  $(m_1, \sigma^2), (m_2, \sigma^2), \dots, (m_n, \sigma^2)$ , entonces la distribución de la magnitud aleatoria  $\xi = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2$  se denominará distribución  $\chi^2$  no central con  $n$  grados de libertad y un parámetro de no centralidad  $m = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n m_i^2$ . Para los valores grandes del parámetro  $m$ , la

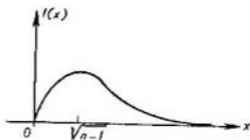


Fig. 11. Densidad de la distribución  $\chi$

distribución  $\chi^2$  no central con  $n$  grados de libertad coincide aproximadamente con la distribución normal  $(m+n, \sqrt{2(n+2m)})$ .

Bajo el supuesto de que las probabilidades teóricas son  $(p'_1, p'_2, \dots, p'_h)$  la estadística  $\chi^2$  de Pearson tiene distribución  $\chi^2$  asintóticamente no central con  $k-1$  grados de libertad y parámetro de no centralidad

$$m = \sum_{i=1}^h \frac{(p'_i - p_i)^2}{p_i}$$

6.2.11. Distribución  $\chi$ . 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución  $\chi$  con  $\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) grados de libertad, si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig 11.)

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\sqrt{2}t)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right).$$



Los momentos:  $M_{\xi}^k = \frac{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ;  $D\xi = \alpha - 2 \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right]^2$ .

3. Si  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  son unas magnitudes aleatorias independientes que tienen distribución normal estándar, entonces  $\xi = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$  tiene la distribución  $\chi$  con  $n$  grados de libertad.

Cuando  $n = 2$ , la distribución  $\chi$  lleva el nombre de distribución de Rayleigh (Rayleigh—Rice).

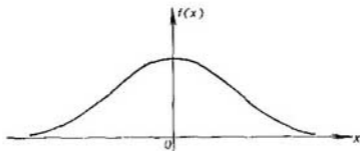


Fig. 12. Densidad de la distribución de Student

Cuando  $n = 3$ , la distribución  $\chi$  se llama distribución de Maxwell y describe la distribución de velocidades de las moléculas de un gas.

**6.2.12. Distribución de Student (distribución  $t$ ).** 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Student (distribución  $t$ ) con  $\alpha$  grados de libertad ( $\alpha > 0$ ), si

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{\alpha\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Véase la fig. 12.)

2. La función característica es  $\varphi(t) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \times \frac{e^{-\sqrt{\alpha}|t|}}{2^{2(n-1)}(n-1)!} \sum_{h=0}^{n-1} (2k)! C_{n-1+k}^{2k} (2\sqrt{\alpha}|t|)^{n-1+k}$ , si  $n = \frac{\alpha+1}{2}$  es un número entero.

Los momentos:  $M_{\xi}^{2k-1} = 0$ ,  $M_{\xi}^{2k} = \frac{\alpha^k}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} - k\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ ,

$$2k < \alpha;$$

$$D\xi = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-2}, & \text{si } \alpha > 2; \\ \infty, & \text{si } \alpha \leq 2. \end{cases}$$

3. Si  $\eta$  y  $\zeta$  son unas magnitudes aleatorias independientes y  $\eta$  tiene distribución normal estándar, mientras que  $\zeta$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad, entonces  $\xi = \eta \sqrt{\frac{n}{\zeta}}$  tiene distribución de Student con  $n$  grados de libertad.

En muchas aplicaciones estadísticas el parámetro  $\alpha$  es un número natural. Cuando  $\alpha = 1$ , la distribución de Student coincide con la de

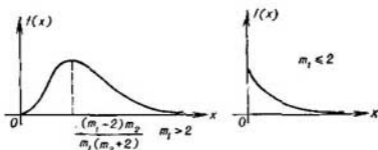


Fig. 13. Densidad de la distribución F

Cauchy. La distribución de Student aparece al comprobar la hipótesis de la media de una totalidad general de distribución normal, siendo incógnita la varianza.

Cuando los valores de  $\alpha$  son grandes, la distribución de Student se aproxima asintóticamente a una distribución normal estándar. Está demostrado que la distribución  $t$  con  $n = 2k + 1$ ,  $k \geq 0$ , grados de libertad es infinitamente divisible.

6.2.3. Distribución F (distribución de Snedekor). 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución F (distribución de Snedekor) con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad, si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) m_1^{\frac{m_1}{2}} m_2^{\frac{m_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)} x^{\frac{m_1}{2}-1} (m_2+m_1x)^{-\frac{m_1+m_2}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 13.)

$$2. \text{ Los momentos: } M\xi^k = \frac{\Gamma\left(\frac{m_1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{2} - k\right) m_2^k}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right) m_1^k \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}, \text{ si } 2k < m_2,$$

$$M\xi = \frac{m_2}{m_2-2} (m_2 > 2); \quad D\xi = \frac{2m_2^2(m_1+m_2-2)}{m_1(m_2-2)^2(m_2-4)} (m_2 > 4).$$

3. Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son unas magnitudes aleatorias independientes que tienen distribución  $\chi^2$  con los grados de libertad  $m_1$  y  $m_2$ , respectivamente, entonces la magnitud aleatoria  $\xi = \frac{\xi_1/m_1}{\xi_2/m_2}$  tiene distribución  $F$  con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad, en relación con lo cual  $m_1$  se denomina número de grados de libertad del numerador, y  $m_2$ , número de grados de libertad del denominador. En particular, si  $x_1, x_2, \dots, x_m$  es una muestra de una totalidad general normal  $(a_1, \sigma^2)$ , mientras que  $y_1, y_2, \dots, y_{m_2}$  es una muestra de la totalidad general normal  $(a_2, \sigma^2)$ , entonces la estadística

$$\frac{\frac{1}{m_1-1} \sum_{i=1}^{m_1} (x_i - \bar{x})^2}{\frac{1}{m_2-1} \sum_{i=1}^{m_2} (y_i - \bar{y})^2},$$

donde  $\bar{x} = \frac{1}{m_1} \sum x_i$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{m_2} \sum y_i$  tiene distribución  $F$  con  $(m_1-1, m_2-1)$ , grados de libertad.

4. Si  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son unas magnitudes aleatorias independientes, con la particularidad de que  $\xi_2$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $m_2$  grados de libertad, mientras que  $\xi_1$  tiene distribución  $\chi^2$  no central con  $m_1$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $m$ , entonces  $\xi = \frac{\xi_1/m_1}{\xi_2/m_2}$  tiene distribución  $F$  no central con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad y parámetro de no centralidad  $m$ .

6.2.14. Distribución logarítmica normal. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución logarítmica normal de parámetro  $(m, \sigma^2)$ , si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 14.)

2. Los momentos:  $M\xi^k = \exp\left\{\frac{1}{2}k^2\sigma^2 + km\right\}$ ;  $D\xi = e^{\sigma^4 + m} [e^{\sigma^4} - 1]$ .

3. Si  $\eta$  tiene la distribución normal  $(0, 1)$ , entonces  $\xi = \exp\{\sigma^2\eta + m\}$  tendrá distribución logarítmica normal de parámetros  $(m, \sigma^2)$ .

La distribución logarítmica normal es de amplio uso en la física estadística, la geología estadística, la estadística económica, la biología, etc.

4. La distribución logarítmica normal puede obtenerse como un caso particular de la así llamada distribución de Kapteyn cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{[G(x) - m]^2}{2\sigma^2}\right\} \left|\frac{dG(x)}{dx}\right|,$$

donde  $G(x)$  es una función monótona derivable. Si  $\xi$  tiene distribución de Kapteyn  $(m, \sigma^2, G(x))$ , entonces  $\eta = G(\xi)$  tiene una distribución

normal (0, 1). La distribución de Kapteyn se obtiene como resultado de la aplicación del teorema del límite central al esquema de adición del tipo  $x_{l+1} = x_l + z_{l+1} g(x_l)$ , donde  $x_l$  son magnitudes aleatorias

independientes,  $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{du}{g(u)}$ .

6.2.15. Distribución logística. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución logística de parámetros  $(m, \sigma^2)$ , si

$$f(x) = \frac{\pi \exp\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)\right]}{\sigma \sqrt{3} \left\{1 + \exp\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{(x-m)}{\sigma}\right]\right\}^2}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

(Véase la fig. 15.)

2. La función característica es

$$\varphi(t) = e^{itm} \Gamma\left(1 - i \frac{\sigma \sqrt{3}}{\pi} t\right) \Gamma\left(1 + i \frac{\sigma \sqrt{3}}{\pi} t\right).$$

Los momentos:  $M_{\xi}^k = m$ ;  $D_{\xi}^2 = \sigma^2$ .

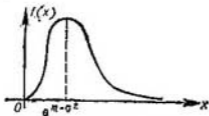


Fig. 14. Densidad de la distribución logarítmica normal

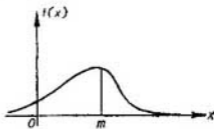


Fig. 15. Densidad de la distribución logística

3. La función de distribución se diferencia poco de la función normal de distribución y a la par con la última se utiliza, por ejemplo, en las investigaciones médico-biológicas para analizar la eficacia de diferentes medicamentos, venenos, etc.

6.2.16. Distribución de Pareto. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Pareto de parámetros  $(x_0, \alpha)$  ( $\alpha > 0, x_0 > 0$ ), si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{x_0} \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, & x > x_0; \\ 0, & x \leq x_0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 16.)

2. Los momentos:  $M_{\xi}^k = \frac{\alpha}{\alpha-k} x_0^k, \quad k < \alpha;$

$$D_{\xi}^2 = \begin{cases} \frac{\alpha}{(\alpha-1)(\alpha-2)} x_0^2, & \alpha > 2; \\ \infty, & \alpha \leq 2. \end{cases}$$

3. La distribución de Pareto es un truncamiento en el intervalo  $(x_0, \infty)$  de una distribución potencial de parámetro  $\alpha$  cuya densidad de probabilidad es

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^{-(\alpha+1)}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

La distribución se encuentra en los problemas de la estadística económica.

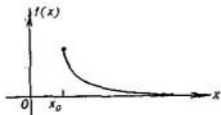


Fig. 16. Densidad de la distribución de Pareto

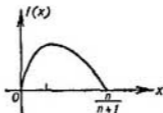


Fig. 17. Densidad de la distribución de Sherman

6.2.17. Distribución de Sherman. 1 Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Sherman con  $n$  grados de libertad (parámetro  $n$ ), si

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{m=1}^n m b_m x^{m-1}, & x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]; \\ 0, & x \notin \left[0, \frac{n}{n+1}\right], \end{cases}$$

donde  $b_m = \sum_{j=0}^r (-1)^{(m+j+1)} C_{n+1}^{j+1} C_{m+j}^j C_n^m [C_{n-j}^{n+1}]^{n-m}$ ,  $r$  es un número entero no negativo que satisface las desigualdades  $\frac{n-r-1}{n+1} \leq x < \frac{n-r}{n+1}$ . (Véase la fig. 17.)

2. Los momentos;  $M\xi = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ ;  $D\xi = \frac{2n^{n+2} + n(n-1)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^{n+2}} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{2(n+1)}$ .

3. Supongamos que en el segmento  $[0, 1]$  están elegidos  $n$  puntos de distribución uniforme. Ordenemos los puntos en el segmento y sea  $\xi_j$  la longitud del  $j$ -ésimo intervalo a la izquierda de  $n+1$  intervalos posibles.

Una magnitud aleatoria  $\xi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \left| \xi_j - \frac{1}{n+1} \right|$  tiene distribución de Sherman con  $n$  grados de libertad.

6.2.18. Distribución  $z$  (distribución de la razón de varianzas de Fisher). 1. Una magnitud aleatoria  $\xi'$  tiene distribución  $z$  (distribución de la razón de varianzas de Fisher) con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad, si

$$f(x) = \frac{2^{m_1/2} m_2^{m_2/2} \Gamma\left(\frac{m_1+m_2}{2}\right) e^{-m_1 x}}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right) (m_2 + m_1 e^{2x})^{\frac{m_1+m_2}{2}}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

(Véase la fig. 18.)

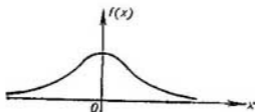


Fig. 18. Densidad de la distribución de la razón de varianzas de Fisher

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{\frac{it}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m_1+it}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2-it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m_2}{2}\right)}.$$

Los momentos:  $M\xi = 0$ ;  $D\xi = \frac{1}{2} \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$ .

3. Si  $\eta$  es una magnitud aleatoria que tiene distribución  $F$  con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad, entonces  $\xi = \frac{1}{2} \ln \eta$  tiene distribución  $z$  con  $(m_1, m_2)$  grados de libertad.

▷ Es de amplio uso en el análisis de varianzas.

6.2.19. Distribución de Weibull—Gnedenko. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Weibull—Gnedenko de parámetros  $(\alpha, \lambda)$  ( $\lambda > 0$ ), si

$$f(x) = \begin{cases} |\alpha| \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(Véase la fig. 19.)

Los momentos:  $M\xi^k = \lambda^{-\frac{k}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{k}{\alpha} + 1\right)$ ;  $D\xi = \lambda^{-\frac{2}{\alpha}} \left\{ \frac{2}{\alpha} \Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \right]^2 \right\}$ .

3. Se pone de manifiesto como la distribución de un máximo. Supongamos que las magnitudes aleatorias  $\xi_h$  son recíprocamente inde-

pendientes y están igualmente distribuidas y, además,  $P(\xi_h \leq x) < 1$  para  $x < \infty$ , Hagamos

$$\xi_n^* = \max[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n].$$

Para que las distribuciones  $F_n(x)$  de las magnitudes aleatorias  $\frac{1}{a_n} \xi_n^*$  converjan, con cierta elección de las constantes  $a_n$ , hacia la distribución  $F(x)$ , no concentrada en 0, es necesario y suficiente que la función  $1 - F(x)$  sea de variación correcta\* con el exponente  $\alpha$  ( $\alpha < 0$ ). En este caso  $F(x) = e^{-\lambda x^\alpha}$ .

La distribución de Weibull—Gnedenko se usa con frecuencia en la teoría de fiabilidad para describir el tiempo de funcionamiento sin fallos de los instrumentos.

6.2.20. Distribución de Burr. 1. Una magnitud aleatoria  $\xi$  tiene distribución de Burr, si su función de distribución  $F(x)$  tiene por expresión

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\left\{-\int_{-\infty}^x g(u) du\right\}},$$

donde la función no negativa  $g(x)$  es tal que el segundo miembro de la igualdad escrita arriba es una función de distribución.

Las distribuciones de Burr tienen magnitudes aleatorias con las funciones de distribución:

$$F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x^\alpha)^\beta}, \quad x \geq 0;$$

$$F(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^\alpha}, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$F(x) = \frac{1}{(1 + \alpha \exp\{-t g(x)\})^\alpha}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

\* La función  $1 - F(x)$  es de variación correcta con el exponente  $\alpha$ , si  $1 - F(x) = x^\alpha L(x)$ , donde  $L(x)$  es una función de variación lenta, es decir, tal que  $\frac{L(tx)}{L(x)} \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$  y cualquier  $x > 0$ .

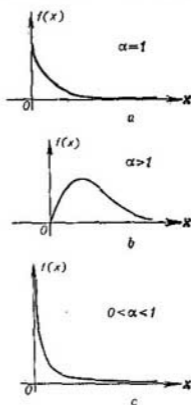


Fig. 19. Densidad de la distribución de Weibull—Gnedenko

$$F(x) = \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-x} \right)^\alpha, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

$$F(x) = \left( x - \frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi x \right)^\alpha, \quad x \in [0, 1].$$

2. Las distribuciones de Burr se emplean, a la par con las de Pearson (pero con menor frecuencia que las últimas), en la estadística para adaptar las curvas a analizar a las densidades de distribución.

### 6.3. Distribuciones de Pearson

6.3.1. Definición. Se llaman de Pearson las distribuciones continuas cuyas densidades de probabilidad son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{a_1 x + a_0}{b_0 + 2b_1 x + b_2 x^2} f(x), \quad (3.1)$$

donde  $a_0, a_1, b_0, b_1, b_2$  son los parámetros de distribución. Las distribuciones de Pearson se determinan por completo con los primeros cuatro momentos.

Sea  $\mu_k$  el  $k$ -ésimo momento central de una magnitud aleatoria que tiene la distribución de Pearson. En este caso, si  $a_1 = 1$ , tenemos

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\mu_3 (\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A}; \\ b_0 &= -\frac{\mu_2 (4\mu_2 \mu_4 - 3\mu_3^2)}{A}; \\ b_1 &= -\frac{\mu_2 (\mu_4 + 3\mu_2^2)}{2A}; \\ b_2 &= -\frac{2\mu_2 \mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3}{A}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

donde  $A = 10\mu_4 \mu_2 - 18\mu_3^2 - 12\mu_2^3$ .

De acuerdo con la distribución de las raíces del trinomio cuadrado  $b_0 + b_1 x + b_2 x^2$  se indican doce tipos de distribuciones de Pearson.

6.3.2. Tipo I\*). 1.  $D < 0, \lambda < 0, b_0 + 2b_1 x + b_2 x^2 = (\alpha + x) \times (-\beta + x) b_2, \alpha, \beta > 0$ .

2. Densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^m \beta^n}{(\alpha + \beta)^{m+n+1} B(m+1, n+1)} (\alpha + x)^m (\beta - x)^n, & x \in [-\alpha, \beta]; \\ 0, & x \notin [-\alpha, \beta] \end{cases}$$

donde  $B(m+1, n+1) = \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}, m > -1, n > -1$ .

3. Si  $\alpha = \beta$  (consecuentemente,  $\lambda = 0$ ) y  $m = n$ , entonces las

\*) Mediante  $D$  se ha designado el discriminante del trinomio cuadrado  $b_0 + 2b_1 x + b_2 x^2, D = b_0 b_2 - b_1^2, \lambda = \frac{b_1^2}{b_0 b_2}$ .



distribuciones correspondientes pertenecen al tipo II. Las distribuciones del tipo II tienen el eje de simetría vertical.

Si  $m = -n$ , la distribución correspondiente es del tipo XII.

4. A las distribuciones de Pearson del tipo I pertenecen las distribuciones beta.

6.3.3. Tipo III. 1.  $D < 0, \lambda = \infty, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = 2(\alpha + x)b_1$ .

2. Densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k^{m+1}}{\Gamma(m+1)} (x+\alpha)^m e^{-k(\alpha+x)}, & x > -\alpha, k > 0; \\ 0, & x \leq -\alpha. \end{cases}$$

3. A las distribuciones de Pearson del tipo III pertenecen las distribuciones gamma.

6.3.4. Tipo IV. 1.  $D > 0, 0 < \lambda < 1, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = (x^2 + \alpha^2) b_2$ .

2. La densidad de probabilidad  $f(x) = c(\alpha^2 + x^2)^{-m} e^{-v \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}}$ ,  $x \in (-\infty, \infty), m \geq \frac{1}{2}$ , donde

$$c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + x^2)^{-m} e^{-v \operatorname{arctg} \frac{x}{\alpha}} dx.$$

6.3.5. Tipo VII. 1.  $D > 0, \lambda = 0, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = (\alpha^2 + x^2) b_2$ .

2. La densidad de probabilidad  $f(x) = \frac{\alpha}{B\left(m - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)} \times$

$\times (\alpha^2 + x^2)^{-m}, x \in (-\infty, \infty), m \geq \frac{1}{2}$ .

3. A la distribución de Pearson del tipo VII pertenece la distribución de Student.

6.3.6. Tipo V. 1.  $D = 0, \lambda = 1, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = b_2(x + \alpha)^2$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma(m-1)} x^{-m} e^{-\frac{\gamma}{x}}, & \gamma > 0, m > 1, x > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

6.3.7. Tipo VI. 1.  $D < 0, \lambda > 1, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = (x + \alpha)(x - \beta) b_2$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha + \beta)^{-(m+n+1)}}{B(-m-n-1, n+1)} (x + \alpha)^m (x - \beta)^n, & x > \beta, m-1 > \\ & > 0, n > -1; \\ 0, & x \leq \beta. \end{cases}$$

6.3.8. Tipo VIII. 1.  $D < 0, \lambda < 0, b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = x(\alpha + x) b_2$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m+1}{\alpha^{m+1}} (x + \alpha)^m, & x \in [-\alpha, 0], -1 < m < 0; \\ 0, & x \in [-\alpha, 0]. \end{cases}$$

6.3.9. Tipo IX. 1.  $D < 0$ ,  $\lambda < 0$ ,  $b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = x(\alpha + x)b_2$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{m+1}{\alpha^{m+1}} (x+\alpha)^m, & x \in [-\alpha, 0], m < -1; \\ 0, & x \in [-\alpha, 0]. \end{cases}$$

6.3.10. Tipo X. 1.  $D = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $b_0 + 2b_1(x) + b_2x^2 = b_0$ ,  $a_1 = 0$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \gamma e^{-\gamma x}, & x > 0, \gamma > 0; \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

3. A la distribución de Pearson del tipo X pertenece la distribución exponencial.

6.3.11. Tipo XI. 1.  $D = 0$ ,  $\lambda$  no está determinado,  $b_0 + 2b_1x + b_2x^2 = b_0$ ,  $a_1 \neq 0$ .

2. La densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

3. A la distribución de Pearson del tipo XI pertenece la distribución normal.

4. La distribución de Pearson se usa ampliamente en la estadística matemática al suavizar las distribuciones de los datos empíricos. Con el fin de determinar la distribución de Pearson que ha de aproximar los datos observados, se calculan los primeros cuatro momentos y de las ecuaciones (3.2) se hallan las estimaciones de los parámetros.

## 6.4. Distribuciones multidimensionales

6.4.1. Distribución polinomial. 1. El vector aleatorio  $k$ -dimensional  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  tiene distribución polinomial con los parámetros  $(n; p_1, p_2, \dots, p_k)$  ( $0 < p_i < 1$ ,  $\sum p_i = 1$ ), si

$P\{\xi = m\} = P\{\xi_1 = m_1, \xi_2 = m_2, \dots, \xi_k = m_k\} =$

$$= \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$$

para  $m = (m_1, m_2, \dots, m_k)$ ,  $\sum_{i=1}^k m_i = n$ .

2. La función característica es

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_k) = \left( \sum_{i=1}^k p_i e^{it_i} \right)^n.$$

Los momentos:  $M\xi = np = n(p_1, p_2, \dots, p_k)$ ,  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = -np_i p_j$ ,  $i \neq j$ ;  $D\xi_i = np_i(1 - p_i)$ .

3. La distribución polinomial es un análogo multidimensional de una distribución binomial. La distribución marginal de cada uno de los componentes del vector  $\xi$  es una distribución binomial.

Si  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r)}$  son unas magnitudes aleatorias  $k$ -dimensionales con los parámetros  $(n_1, p), (n_2, p), \dots, (n_r, p)$ , respectivamente, entonces el vector  $\xi = \sum_{i=1}^r \xi^{(i)}$  tiene distribución polinomial con los parámetros  $(\sum_{i=1}^r n_i p), p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ .

La distribución polinomial sirve de modelo de un experimento aleatorio que representa  $n$  pruebas independientes y el resultado de cada una de dichas pruebas es un suceso de una de las  $k$  clases disjuntas. El símbolo  $p_i$  ( $0 < p_i < 1$ ) significa la probabilidad de que el resultado de cualquier prueba pertenezca a la  $i$ -ésima clase, con la particularidad de que  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ .

6.4.2. Distribución uniforme. 1. Sea  $S$  un conjunto boreliano acotado en  $R^k$ . Designemos con  $\text{mes } S$  la  $k$ -ésima medida de Lebesgue de este conjunto.

Un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  tiene distribución uniforme en  $S$ , si  $\text{mes } S > 0$  y su densidad de probabilidad  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  es igual a

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes } S}, & x \in S; \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

En aquel importante caso particular en que  $S$  es un paralelepípedo  $k$ -dimensional:  $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k]$ , tenemos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\prod_{l=1}^k (b_l - a_l)}, & x \in S; \\ 0, & x \notin S. \end{cases}$$

2. La función característica en el caso de un dominio rectangular tiene la forma

$$\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_k) = \frac{\prod_{l=1}^k (e^{it_l b_l} - e^{it_l a_l})}{\prod_{l=1}^k (b_l - a_l) i^k \prod_{l=1}^k t_l}.$$

6.4.3. Distribución normal bidimensional. Un vector aleatorio bidimensional  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  tiene distribución normal bidimensional, si su función característica  $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2)$  es

$$\varphi(t) = e^{i(m_{11}t_1 + m_{12}t_2)} - \frac{1}{2} (c_{11}t_1^2 + 2c_{12}t_1t_2 + c_{22}t_2^2),$$

y la forma cuadrática  $Q(t) = Q(t_1, t_2) = \sum_{i,j=1}^2 c_{ij}t_i t_j$ ,  $c_{12} = c_{21}$  es no

negativa, es decir,  $Q(t) \geq 0$  para cualesquiera  $t_1, t_2$  reales. Si el rango de la forma cuadrática  $Q(t)$  es igual a 2, es decir, si el determinante de la matriz  $C = (c_{ij}, i, j = 1, 2)$  es distinto de cero, la distribución normal bidimensional lleva el nombre de distribución no degenerada o propia. Si el rango de la forma cuadrática  $Q(t)$  es igual a 0, o bien a 1, la distribución normal bidimensional se denomina degenerada o impropia.

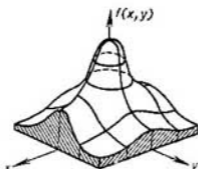


Fig. 20. Densidad de la distribución normal bidimensional no degenerada

2. Si un vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución normal no degenerada su densidad  $f(x) = f(x_1, x_2)$  es igual a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(x_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

donde  $\det C = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = \sigma_1^2\sigma_2^2(1 - \rho^2)$ . (Véase la fig. 20.)

El significado de las magnitudes  $m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2$  y  $\rho$  es el siguiente:  $m_i = M\xi_i$ ,  $\sigma_i^2 = D\xi_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $M\xi_1\xi_2 = M\xi_2\xi_1 = \sigma_1\sigma_2\rho + m_1m_2$ ;

$$\rho = \frac{M(\xi_1 - m_1)(\xi_2 - m_2)}{\sqrt{D\xi_1 D\xi_2}}$$

es el coeficiente de correlación de los componentes  $\xi_1$  y  $\xi_2$ .

Es cómodo escribir la densidad de una distribución normal bidimensional no degenerada en la forma

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2}Q^{-1}(x_1 - m_1, x_2 - m_2)} = \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det C}} e^{-\frac{1}{2}[c_{11}^{-1}(x_1 - m_1)^2 + 2c_{12}^{-1}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) + c_{22}^{-1}(x_2 - m_2)^2]}$$

donde  $Q^{-1}(t_1, t_2)$  es la forma cuadrática inversa,  $c_{ij}^{-1}$  son los elementos de la matriz  $C^{-1}$ .

Las densidades marginales de la distribución normal:

$$f_{\xi_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}}, \quad i = 1, 2.$$

La densidad condicional de la distribución del componente  $\xi_1$ , a condición de que  $\xi_2 = a$ , es

$$f(x_1/\xi_2 = a) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[ x_1 - m_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(a - m_2) \right]^2 \right\};$$

$$M(\xi_1/\xi_2 = a) = m_1 + \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(a - m_2);$$

$$M((\xi_1 - m_1)^2/\xi_2 = a) = \sigma_1^2(1 - \rho^2).$$

La densidad de una distribución normal no degenerada conserva su valor constante en las elipses

$$\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x_1^2 - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] = \lambda^2.$$

llamadas elipses de probabilidades iguales, siendo igual a  $1 - e^{-\lambda^2}$  la probabilidad de que el vector  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  caiga en el interior de tal elipse.

3. Si la distribución normal bidimensional es degenerada, entonces, cuando el rango de la forma cuadrática  $Q(t_1, t_2)$  es nulo, la distribución queda concentrada en el punto  $m = (m_1, m_2)$ , es decir,

$$P\{\xi = m\} = 1.$$

Si el rango de la forma cuadrática  $Q(t_1, t_2)$  es igual a la unidad, la distribución normal está concentrada en la recta

$$t_1(\xi_1 - m_1) + t_2(\xi_2 - m_2) = 0,$$

donde  $t_1$  y  $t_2$  recorren una recta tendida en el propio vector de la matriz  $C$ , que corresponde al valor propio nulo.

6.4.4. Distribución normal multidimensional. 1. Un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_h)$  tiene distribución normal multidimensional, si su función característica  $\varphi(t) = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_h)$  es de la forma

$$\varphi(t) = \exp \left\{ it^*m - \frac{1}{2} t^*Ct \right\},$$

donde  $C$  es una matriz  $k \times k$  simétrica definida de modo no negativo;  $t^*$  es un vector traspuesto,  $t \in R^k$ .

Si el rango de la matriz  $C$  es igual a  $k$ , es decir,  $\det C \neq 0$ , la distribución se denomina no degenerada o propia. El significado del vector  $m = (m_1, \dots, m_h)$  y de la matriz  $C = \{c_{ij}, i, j = \overline{1, k}\}$  es el siguiente:

$$m = (m_1, \dots, m_h) = (M\xi_1, \dots, M\xi_h) = M\bar{\xi};$$

$C = \{c_{ij}, i, j = \overline{1, k}\} = \{M\xi_i - m_i\} (\xi_j - m_j), i, j = \overline{1, k} =$   
 $= M (\xi - m) (\xi - m)^*$  es una matriz covariacional.

Si  $\det C \neq 0$ , entonces  $C^{-1}$  se denomina matriz de precisión.

2. Si un vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución normal no degenerada, su densidad de distribución  $f(x) = f(x_1, \dots, x_k)$  es

$$f(x) = \frac{1}{V(2\pi)^k \det C} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-m)^* C^{-1} (x-m) \right\}.$$

Sea  $\xi^{(1)} = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ,  $\xi^{(2)} = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_k)$ . De acuerdo con tal partición del vector aleatorio  $\xi$  representemos el vector de esperanzas matemáticas  $m$  como  $m^{(1)} = (m_1, \dots, m_r)$ ,  $m^{(2)} = (m_{r+1}, \dots, m_k)$ , con la particularidad de que  $m^{(i)} = M\xi^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$  y la matriz de covariación  $C$  puede representarse en la forma

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  son, respectivamente, las matrices  $r \times r$ ,  $r \times (k-r)$ ,  $(k-r) \times r$ ,  $(k-r) \times (k-r)$  y, además,

$$C_{ij} = M (\xi^{(i)} - m^{(i)}) (\xi^{(j)} - m^{(j)})^*.$$

La distribución marginal del vector  $\xi^{(j)}$  es normal con el vector de esperanzas matemáticas  $m^{(j)}$  y la matriz de covariación  $C_{jj}$ , mientras que la densidad de distribución correspondiente, a condición de que  $\det c_{jj} \neq 0$ , tiene por expresión

$$f^{(j)}(x^{(j)}) = \frac{1}{V(2\pi)^{r_j} \det C_{jj}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^{(j)} - m^{(j)})^* C_{jj}^{-1} (x^{(j)} - m^{(j)}) \right\}.$$

$$r_1 = r, \quad r_2 = k - r.$$

Si un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  tiene distribución normal no degenerada, la densidad condicional de distribución  $f^{(1)}(x^{(1)}/\xi^{(2)} = a^{(2)})$  del vector  $\xi^{(1)}$ , a condición de que  $\xi^{(2)} = a^{(2)}$ , es igual a

$$f^{(1)}(x^{(1)}/\xi^{(2)} = a^{(2)}) = \frac{1}{V(2\pi)^r} \sqrt{\frac{\det C_{22}}{\det C}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x^{(1)} - b^{(1)})^* \times \right.$$

$$\left. \times (C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21})^{-1} (x^{(1)} - b^{(1)}) \right\},$$

donde  $b^{(1)} = m^{(1)} + C_{12} C_{22}^{-1} (a^{(2)} - m^{(2)})$ , siendo

$$M (\xi^{(1)}/\xi^{(2)} = a^{(2)}) = m^{(1)} + C_{12} C_{22}^{-1} (a^{(2)} - m^{(2)});$$

$$M \{(\xi^{(1)} - m^{(1)}) (\xi^{(1)} - m^{(1)})^* / \xi^{(2)} = a^{(2)}\} = C_{11} - C_{12} C_{22}^{-1} C_{21}.$$

3. Si un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  tiene distribución normal degenerada y la matriz de covariación  $C$  es de rango  $r$ ,  $0 \leq r < k$ , entonces existen la matriz  $k \times r$  rectangular  $B$  tal que  $C = BB^*$  y el vector aleatorio  $r$ -dimensional  $\xi_0$  con una esperanza matemática nula y una matriz covariacional unidad tales que  $\xi = m + B\xi_0$ .

4. La distribución normal multidimensional es, a la par con la distribución unidimensional, una de las distribuciones principales de la teoría de probabilidades y de la estadística matemática, lo que, ante todo, está relacionado con el teorema del límite central.

6.4.5. Distribución de Dirichlet. 1. Un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$  tiene distribución de Dirichlet con el vector paramétrico  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ ,  $\alpha_i > 0$ ,  $i = \overline{1, k}$ , si

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2) \dots \Gamma(\alpha_k)} x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}, & x \in S; \\ 0, & x \in S, \end{cases}$$

donde  $S$  es un simplex  $(k-1)$ -dimensional:  $S = \{x \in R^k: \sum_{i=1}^k x_i = 1, x_i \geq 0, i = \overline{1, k}\}$ .

$$2. M\xi = \frac{1}{\alpha_0} \alpha, \text{ donde } \alpha_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i; \text{ cov } \xi_i \xi_j = -\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2 (1 + \alpha_0)}; D\xi_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}.$$

3. La distribución de Dirichlet es un análogo multidimensional de la distribución beta.

6.4.6. Distribución multidimensional de Student. 1. Un vector aleatorio  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$  tiene distribución  $k$ -dimensional de Student (distribución  $t$ ) de  $n$  grados de libertad, con el vector de desplazamiento  $m$  y la matriz de precisión  $T$ , si

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+n}{2}\right) \sqrt{\det T}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{(2\pi)^k}} \left[1 + \frac{1}{n} (x-m)^* T (x-m)\right]^{-\frac{k+n}{2}},$$

donde  $T$  es una matriz simétrica positivamente definida.

2. Los momentos:  $M\xi = m$ ;  $\text{cov}\xi = M(\xi - m)(\xi - m)^* = \frac{n}{n-2} T^{-1}$ ,  $n > 2$ .

3. Si  $\eta$  tiene distribución normal con un vector nulo de las esperanzas matemáticas y una matriz de covariación no degenerada  $C = T^{-1}$ , mientras que  $\zeta$  tiene distribución  $\chi^2$  de  $n$  grados de libertad, entonces el vector  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ , donde  $\xi_i = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\zeta}} \eta_i + m_i$  tiene distribución de Student  $k$ -dimensional de  $n$  grados de libertad, con un vector de desplazamiento  $m$  y matriz de precisión  $T$ .

Si un vector aleatorio  $\xi$  tiene distribución de Student  $k$ -dimensional de  $n$  grados de libertad, con vector de desplazamiento  $m$  y la matriz de precisión  $T$ , entonces la magnitud aleatoria

$$\zeta = \frac{1}{k} (\xi - m)^* T (\xi - m)$$

tiene distribución  $F$  con  $k$  y  $m$  grados de libertad.

6.4.7. Distribución de Wishart. 1. Sea  $\xi$  una matriz  $k \times k$  simétrica o bien (lo que es equivalente) un vector  $\frac{k(k+1)}{2}$ -dimensional.

Designemos mediante  $X$  una matriz  $k \times k$  simétrica positivamente definida. Una matriz aleatoria  $\xi$  tiene distribución no degenerada de Wishart de  $n$  grados de libertad con la matriz de precisión  $T$ , si  $\det T \neq 0$  y

$$f(X) = \frac{(\det T)^{\frac{n}{2}} (\det X)^{\frac{n-k-1}{2}}}{2^{\frac{nk}{2}} \pi^{\frac{k(k-1)}{4}} \prod_{j=1}^k \Gamma\left(\frac{n+1-j}{2}\right)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \text{Sp} TX\right\},$$

donde  $\text{Sp} TX$  es la traza de la matriz  $TX$ , es decir, la suma de sus elementos diagonales.

2. Función característica. Sea  $t$  una matriz simétrica del tipo

$$t = \begin{pmatrix} 2t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} \\ t_{12} & 2t_{22} & \dots & t_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1k} & t_{2k} & \dots & 2t_{kk} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

La función característica de la distribución de Wishart se determina en el conjunto de matrices simétricas del tipo (4.1):

$$\varphi(t) = \left[ \frac{\det T}{\det(T-t)} \right]^{\frac{n}{2}}.$$

3. Sean  $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$  unos vectores independientes igualmente distribuidos con esperanzas matemáticas nulas y una matriz de covarianza no degenerada  $C$ . La matriz aleatoria  $\xi = \sum_{l=1}^n \xi^{(l)} \xi^{(l)*}$  tiene distribución de Wishart de  $n$  grados de libertad con la matriz de precisión  $T = C^{-1}$ . La distribución de Wishart es un análogo multidimensional de la distribución  $\chi^2$ .

## 6.5. Distribuciones estables

6.5.1. Definición. Una función de distribución  $n(x)$  se denomina estable, si para cualesquiera  $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1, b_2$  reales se encontrarán  $a > 0$  y  $b$  tales que se verifique la igualdad

$$F(a_1x + b_1) * F(a_2x + b_2) = F(ax + b), \quad (5.1)$$

donde  $*$  es la operación de convolución.

Si  $\varphi(t)$  es la función característica de una distribución estable, entonces para cualesquiera  $a_1 > 0$  y  $a_2 > 0$  se encontrarán  $b$  y  $a > 0$



tales que

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{a_1}\right)\right) \varphi\left(\frac{t}{a_2}\right) = \varphi\left(\frac{t}{a}\right) e^{-itb}.$$

La importancia de las distribuciones estables está relacionada con el resultado siguiente.

**Teorema.** Sean  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  unas magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas y

$$\eta_n = \frac{1}{\beta_n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \alpha_n, \quad (5.2)$$

donde  $\beta_n \geq 0$  y  $\alpha_n$  son ciertas constantes normalizantes y centralizantes, respectivamente.

Si  $F_n(x)$  es la función de distribución de las magnitudes aleatorias  $\eta_n$ , entonces las distribuciones límites para  $F_n(x)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , las pueden constituir solamente distribuciones estables.

Y viceversa para toda distribución estable  $F(x)$  existe una sucesión de magnitudes aleatorias del tipo (5.2) tal que  $F_n(x)$  converge hacia  $F(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

De aquí, en particular, proviene que las distribuciones estables son divisibles infinitamente.

#### 6.5.2. Caracterización de las distribuciones estables.

**Teorema.** Para que la función de distribución  $\varphi(t)$  sea estable, es necesario y suficiente que el logaritmo de su función característica  $\varphi(t)$  tenga la forma

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t - c|t|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right\}, \quad (5.3)$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, c$  son constantes con la particularidad de que  $-1 < \beta < 1$ ,  $0 < \alpha < 2$ ,  $c \geq 0$  y

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha, & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln |t|, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases} \quad (5.4)$$

El parámetro  $\alpha$  se denomina parámetro de estabilidad o índice característico.

Todas las distribuciones estables cuyo índice característico  $\alpha > 0$  son continuas y sus densidades en cada punto tienen derivadas de cualquier orden.

De (5.3) se deduce que la densidad de probabilidad de una distribución estable tiene por expresión

$$f(x; \alpha, \beta, \gamma, c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \exp \left\{ i\gamma t - c|t|^\alpha \left( 1 + i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t, \alpha) \right) \right\} dt. \quad (5.5)$$

Las densidades de las distribuciones estables no se expresan en términos de las funciones elementales, a excepción de los siguientes casos.

1. Una distribución normal es estable, si el índice característico  $\alpha = 2$ .
2. Una distribución de Cauchy es estable, si el índice característico  $\alpha = 1$ .
3. Una distribución con la densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x^3}} e^{-\frac{1}{2}x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

es estable, si el índice característico  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

4. Una distribución degenerada es estable con el índice característico  $\alpha = 0$ .

Para la densidad  $f(x; \alpha, \beta, \gamma, c)$  de una distribución estable con  $\alpha > 0$ , tienen lugar las igualdades

$$f(x, \alpha, \beta, \gamma, c) = \begin{cases} c^{-\frac{1}{\alpha}} f\left(\frac{x-\gamma}{c} c^{-\frac{1}{2}}; \alpha, \beta, 0, 1\right), & \alpha \neq 1; \\ c^{-1} f\left(\left(\frac{x-\gamma}{c} - \beta \frac{2}{\pi} \ln c\right); 1, \beta, 0, 1\right), & \alpha = 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

Por consiguiente, sin disminuir la generalidad de razonamientos podemos considerar que  $\gamma = 0, c = 1$ . Si  $f(x; \alpha, \beta) = f(x; \alpha, \beta, 0, 1)$ , entonces

$$f(x, \alpha, \beta) = f(-x, \alpha, -\beta). \quad (5.7)$$

6.5.3. Desarrollos asintóticos. Si  $F(x)$  es una distribución estable con el índice característico  $\alpha$ , entonces existe la constante  $c_1 > 0$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (1 - F(x) + F(-x)) = c_1. \quad (5.8)$$

Toda ley estable con el índice característico  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 2$ ) tiene momentos absolutos finitos de cualquier orden  $p$  ( $0 < p < \alpha$ ).

Sea  $f(x; \alpha, \beta)$  una densidad de distribución estable.

Si  $0 < \alpha < 1$  y  $x > 0$ , tenemos

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} \left[ \frac{k\pi}{2} \alpha (\beta + 1) \right] \frac{\Gamma(k\alpha + 1)}{k!} x^{-k\alpha}. \quad (5.9)$$

En el caso de que  $\alpha > 1$ , la serie en el segundo miembro de (5.9) diverge. Si es que  $1 < \alpha < 2, x > 0$ , entonces

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\alpha}\right)}{\alpha k!} x^k \cos \frac{k\pi}{2} \left( 1 + \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{2-\alpha}{\alpha} \beta \right). \quad (5.10)$$

Cuando  $\alpha < 1$ , la serie en el segundo miembro de (5.9) diverge.

Si  $\alpha = 1$ ,  $x > 0$ , entonces para todo  $N$  tenemos

$$f\left(x + \frac{2\beta}{\pi} \ln x, 1, \beta\right) = \frac{1}{\pi x} \sum_{k=0}^N \frac{b_k}{k!} x^{-k} + O(x^{-N-2}),$$

donde  $b_k = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k \left(t + i\beta - \frac{2\beta}{\pi} \ln t\right)^k dt.$

## FLUCTUACIONES ALEATORIAS

## 7.1. Procesos de regeneración

7.1.1. Definición. Teoremas fundamentales. Las sumas sucesivas

$$\zeta_n = \sum_{h=0}^n \xi_h, \quad n \geq 0, \quad \zeta_0 = \xi_0 = 0, \quad (1.1)$$

de magnitudes aleatorias independientes no negativas o igualmente distribuidas con la función de distribución  $F(x) = P\{\xi_h \leq x\}$  forman los momentos (puntos) de regeneración (conmutación, aparición de cierto suceso, etc.).

Se denomina proceso de regeneración a

$$v(t) = \max \{n: \zeta_n \leq t\}, \quad (1.2)$$

definida para todo  $t \geq 0$ . De suerte que

$$v(t) = n \text{ para } \zeta_n \leq t < \zeta_{n+1}, \quad n \geq 0, \quad (1.3)$$

o, de otra manera,

$$v(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(\zeta_n \leq t). \quad (1.4)$$

Las trayectorias del proceso de regeneración son escalonadas, continuas a la derecha y tienen saltos iguales a la unidad en los puntos de regeneración  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ .

El proceso de regeneración  $v(\tau)$ , parado en el instante de tiempo  $\tau$ , distribuido según la ley exponencial de parámetro  $s$  ( $0 < s < 1$ ), tiene distribución geométrica de parámetro  $f(s) = M e^{-s \xi_1}$ :

$$P\{v(\tau) = n\} = f^n(s) (1 - f(s)). \quad (1.5)$$

La función generadora del proceso de restablecimiento

$$M_z^{v(\tau)} = s \int_0^{\infty} e^{-st} M_z^{v(t)} dt \quad (1.6)$$

puede ser representada mediante la fórmula

$$M_z^{v(\tau)} = \frac{1 - f(s)}{1 - z f(s)}. \quad (1.7)$$

Para los momentos factoriales

$$M_v(\tau)^{[n]} = s \int_0^{\infty} e^{-st} M_v(t)^{[n]} dt \quad (1.8)$$

tiene lugar la fórmula

$$M_v(\tau)^{[n]} = n! \left[ \frac{f(s)}{1-f(s)} \right]^n, \quad n \geq 1. \quad (1.9)$$

En particular,

$$M_v(\tau) = s \int_0^{\infty} e^{-st} M_v(t) dt = \frac{f(s)}{1-f(s)}. \quad (1.10)$$

La función  $N(t) = M_v(t) + 1$  se llama función de regeneración. La función de regeneración  $N(t)$  es finita para todo  $t > 0$  y puede ser representada mediante las distribuciones de sumas en la forma (véase (1.4))

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{\xi_n \leq t\}. \quad (1.11)$$

La función de regeneración satisface la ecuación integral de regeneración

$$N(t) = 1 + \int_0^t N(t-x) dF(x), \quad t > 0. \quad (1.12)$$

Siendo  $M\xi_1 < \infty$ , el comportamiento asintótico de la función de regeneración se determina por la correlación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{M\xi_1}. \quad (1.13)$$

**Teorema.** La ecuación de regeneración

$$U(t) = g(t) + \int_0^t U(t-x) dF(x), \quad t > 0, \quad (1.14)$$

en la cual  $g(t)$  está acotada en cualquier intervalo finito, tiene en el semieje  $[0, +\infty]$  la única solución  $U(t)$  que puede ser representada así:

$$U(t) = \int_0^t g(t-x) dN(x). \quad (1.15)$$

**Teorema de regeneración.** Si la distribución de las magnitudes  $\xi_h$  no es aritmética entonces para todos los  $h > 0$  se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [N(t+h) - N(t)] = h/M\xi_1. \quad (1.16)$$

Si, en cambio, las magnitudes  $\xi_h$  tienen distribución aritmética, entonces

(1.16) se verifica para  $h$ , múltiplos del paso de distribución de  $\xi_h$ . Se conoce una forma equivalente del teorema de regeneración.

**Teorema (de regeneración nodal).** Para la función  $g(t)$ , que en el semieje  $[0, +\infty)$  es directamente integrable según Riemann [67], en el caso de una distribución de aritmética de  $\xi_h$  se cumple la correlación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g(t-x) dN(x) = \frac{1}{M\xi_1} \int_0^{\infty} g(t) dt; \quad (1.17)$$

si la distribución de  $\xi_h$  es aritmética de paso  $d$ , se cumple la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{t+nd} g(t+nd-x) dN(x) = \frac{d}{M\xi_1} \sum_{k=0}^{\infty} g(t+kd). \quad (1.18)$$

**EJEMPLO 2.** Un proceso de regeneración con la distribución exponencial de intervalos entre los saltos  $P(\xi_h \leq t) = 1 - e^{-at}$ ,  $t \geq 0$ , es un proceso de Poisson cuya función de regeneración es  $N(t) = at = 1$ ,  $t \geq 0$ .

**EJEMPLO 2.** Un proceso de regeneración con retardo

$$P(\xi_0 \leq t) = \frac{1}{M\xi_1} \int_0^t [1 - F(x)] dx \quad (1.19)$$

se denomina proceso de regeneración estacionario. La función de regeneración del proceso de regeneración estacionario es  $N(t) = \frac{t}{M\xi_1}$ .

**7.1.2. Complementos y precisiones.** 1. Si los intervalos entre los momentos de regeneración de  $\xi_h$  tienen la densidad uniformemente continua  $p(t)$ , y la función  $q(t) = \sup_{s \leq t} p(x)$  es integrable en el semieje  $[0, +\infty)$ , entonces la función de regeneración  $N(t)$  tiene la derivada  $N'(t)$  acotada y uniformemente continua, para la cual

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N'(t) = 1/M\xi_1. \quad (1.20)$$

2. Para la distribución no aritmética  $F(t)$  con la varianza finita  $D\xi_h = \sigma^2 < \infty$  se cumple la correlación

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [N(t) - t/M\xi_1] = \left[ \frac{\sigma}{M\xi_1} \right]^2 + \frac{1}{2}. \quad (1.21)$$

3. Para el proceso de regeneración tiene lugar la ley reforzada de los grandes números:

$$P \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} v(t) = 1/M\xi_1 \right) = 1. \quad (1.22)$$

4. Si las magnitudes  $\xi_h$  tienen distribución estable de parámetro  $\alpha > 1$ , y si  $Me^{-\lambda\xi_h} = e^{-c\lambda^\alpha}$  ( $c > 0$ ), entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{c}. \quad (1.23)$$

5. Si las magnitudes  $\xi_k$  tienen una función característica integrable  $f(s) = M e^{i s \xi_k}$  y  $f(s) - 1 \sim c s \log s$ , para  $s \rightarrow 0$ , entonces

$$N(t) \sim \frac{t}{c \log t} \text{ para } t \rightarrow \infty. \quad (1.24)$$

6. Sea  $\eta_k, k \geq 1$ , una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas con  $M e^{i \lambda \eta_k} = \varphi(\lambda)$ . El proceso general de regeneración se da por la correlación

$$v_0(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \eta_k, \quad (1.25)$$

donde  $v(t)$  es el proceso de regeneración que se determina por los momentos de regeneración  $\zeta_n = \sum_{k=0}^n \xi_k$  ( $n > 0$ ) con  $M e^{i s \xi_k} = f(s)$ .

La función característica del proceso general de regeneración, parado en el momento  $\tau$  distribuido según la ley exponencial de parámetro  $s$  ( $0 < s < 1$ ), tiene la forma

$$M e^{i \lambda v_0(\tau)} = s \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{i \lambda v_0(t)} dt \quad (1.26)$$

y se determina por la correlación

$$M e^{i \lambda v_0(\tau)} = \frac{1 - f(s)}{1 - \varphi(\lambda) f(s)}. \quad (1.27)$$

En particular, cuando  $M |\eta_k| < \infty$

$$M v_0(t) = M \eta_k M v(t); \quad (1.28)$$

cuando  $M \xi_k < \infty$ ,

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} v_0(t)/v(t) = M \eta_k) = 1. \quad (1.29)$$

7.1.3. Los procesos reglados de regeneración se determinan por las siguientes correlaciones: el anticipo o tiempo de espera restante del momento de regeneración

$$\gamma_t^+ = \zeta_{v(t)+1} - t, \quad t \geq 0; \quad (1.30)$$

el retraso o bien el tiempo pasado desde el momento de regeneración

$$\gamma_t^- = t - \zeta_{v(t)}, \quad t \geq 0. \quad (1.31)$$

Los procesos  $\gamma_t^+$  y  $\gamma_t^-$  son reglados a trozos. Entre dos puntos de regeneración contiguos  $\zeta_n$  y  $\zeta_{n+1}$  el proceso  $\gamma_t^+$  decrece linealmente desde  $\xi_{n+1}$  hasta cero y el proceso  $\gamma_t^-$  crece linealmente de cero hasta  $\xi_{n+1}$ .

La suma  $\gamma_t = \gamma_t^+ + \gamma_t^- = \zeta_{v(t)+1}$  es la longitud del intervalo entre los momentos de regeneración contiguos que cubre el punto  $t$ . Hemos de notar que la distribución de  $\zeta_{v(t)+1}$  no coincide con la de  $\xi_k$ , cuando  $k$  es fijado (véase (1.40)).

A título de correlaciones de partida para el estudio de los procesos reglados de regeneración pueden adoptarse las siguientes correlaciones estocásticas

$$\gamma_t^+ \doteq \gamma_{t-\xi_1}^+, \quad t \geq 0; \quad \gamma_t^- = -t, \quad t < 0; \quad (1.32)$$

$$\gamma_t^- \doteq \chi(\xi_1 \leq t) \gamma_{t-\xi_1}^- + \chi(\xi_1 > t) t, \quad t \geq 0. \quad (1.33)$$

La función generadora conjunta para  $\gamma_t^+$  y  $\gamma_t^-$  se da mediante la fórmula

$$M e^{-\lambda \gamma_t^+ - \mu \gamma_t^-} = \frac{s}{s + \mu - \lambda} \frac{M e^{-\lambda \xi_1} - M e^{-(\mu+s)\xi_1}}{1 - M e^{-s\xi_1}}. \quad (1.34)$$

Las funciones generadoras de los procesos reglados de regeneración se determinan por las fórmulas

$$M e^{-\lambda \gamma_t^+} = s \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{-\lambda \gamma_t^+} dt = \frac{s}{s - \lambda} \frac{M e^{-\lambda \xi_1} - M e^{-s\xi_1}}{1 - M e^{-s\xi_1}} \quad (1.35)$$

y

$$M e^{-\lambda \gamma_t^-} = s \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{-\lambda \gamma_t^-} dt = \frac{s}{s + \lambda} \frac{1 - M e^{-(s+\lambda)\xi_1}}{1 - M e^{-s\xi_1}}. \quad (1.36)$$

**Teorema.** Cuando  $M \xi_h < \infty$ , en el caso de una distribución no aritmética de las magnitudes  $\xi_h$  existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t^+ > x, \gamma_t^- > y) = \frac{1}{M \xi_1} \int_{x+y}^{\infty} [1 - F(u)] du; \quad (1.37)$$

en caso de que  $\xi_h$  sean números enteros, existe

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t^+ = k, \gamma_t^- = r) = \frac{1}{M \xi_1} P(\xi_1 = k + r), \quad (1.38)$$

cuando  $t$  recorre una serie natural de números.

**Corolario 1.** Las distribuciones límites de  $\gamma_t^+$  y  $\gamma_t^-$  para  $t \rightarrow \infty$  coinciden con la distribución del retardo estacionario:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t^+ \leq x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t^- \leq x) = \frac{1}{M \xi_1} \int_0^x (1 - F(y)) dy. \quad (1.39)$$

**Corolario 2.**

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\gamma_t^+ + \gamma_t^- \leq x) = \frac{1}{M \xi_1} \int_0^x y dF(y). \quad (1.40)$$

En particular,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M[\gamma_t^+ + \gamma_t^-] = 2M \xi_1. \quad (1.41)$$



EJEMPLO 3. Si  $P(\xi_n \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}$ , entonces también

$$P(\gamma_n^+ \leq x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad (1.42)$$

EJEMPLO 4. Si  $P(\xi_0 \leq x) = \frac{1}{M\xi_1} \int_0^x [1 - F(y)] dy$ , entonces

$$P(\gamma_n^+ \leq x) = \frac{1}{M\xi_1} \int_0^x [1 - F(y)] dy, \quad (1.43)$$

lo que explica el carácter estacionario del proceso de regeneración con el retardo estacionario  $\xi_0$ .

## 7.2. Clasificación de las fluctuaciones aleatorias en una recta

7.2.1. Criterio de reversibilidad. La sucesión de las sumas

$$\zeta_n = \sum_{h=1}^n \xi_h, \quad n \geq 0, \quad \zeta_0 = 0, \quad (2.1)$$

de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas  $\xi_h$  con la función de distribución  $F(x)$  ( $0 < F(0) < 1$ ) determina la fluctuación aleatoria en una recta real.

Las magnitudes  $\xi_h$  se denominan pasos (saltos) de la fluctuación, las sumas  $\zeta_n$  determinan la posición de la fluctuación en el instante  $n$  (realizados  $n$  pasos).

Se llama función de regeneración de una fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , la función de intervalos

$$N(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\zeta_n \in A), \quad (2.2)$$

donde  $A$  es un intervalo en la recta real.

Si  $F$  es una distribución aritmética de paso  $d$ , siempre se supondrá que el intervalo  $A$  contiene al menos un punto del tipo  $nd$ .

**Teorema 1.** Existe una alternativa: o bien  $N(A) < \infty$  para todos los intervalos finitos, o bien  $N(A) = \infty$  para todos los intervalos.

**Definición.** Una fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , se llama **irreversible**, si  $N(A) < \infty$  para todos los intervalos finitos y es **reversible**, si  $N(A) = \infty$  para todos los intervalos.

Introduzcamos una magnitud aleatoria  $v_A$  que caracteriza el número de caídas de la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , en el intervalo  $A$ :

$$v_A = \sum_{n=0}^{\infty} \chi(\zeta_n \in A). \quad (2.3)$$

**Teorema 2.** Para una fluctuación aleatoria irreversible el número de caídas en cada intervalo finito es finito con la probabilidad 1, y la esperanza matemática del número de caídas en el intervalo  $A$  es  $Mv_A = N(A)$ .

Para una fluctuación aleatoria reversible el número de caídas en cada intervalo finito es igual al infinito con la probabilidad 1.

**Criterio general de reversibilidad de la fluctuación aleatoria.**

**Teorema 3.** Una fluctuación aleatoria con los saltos  $\xi_h$  es irreversible, cuando, y sólo cuando,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 1} \int_C \operatorname{Re} \frac{1}{1 - s M e^{i \lambda \xi_h}} d\lambda < \infty. \quad (2.4)$$

El criterio (2.4) también conserva su rigor para las fluctuaciones aleatorias en un espacio euclidiano de dimensiones finitas, es decir, cuando  $\xi_h = (\xi_{h1}, \dots, \xi_{hm})$  son vectores aleatorios  $m$ -dimensionales.

En este caso,  $\lambda \xi_h = \sum_{r=1}^m \lambda_r \xi_{hr}$  es un producto escalar de los vectores  $\lambda$  y  $\xi_h$ .  $C$  es el contorno que contiene el origen de coordenadas.

En particular, una fluctuación aleatoria bidimensional es reversible, si  $M \xi_h = 0$  y  $M \xi_h^2 < \infty$ .

Una fluctuación aleatoria en el espacio euclidiano tridimensional (como también en el espacio  $m$ -dimensional, cuando  $m > 3$ ) es irreversible.

**Teorema 4.** Una fluctuación aleatoria unidimensional con los saltos  $\xi_h$  y  $M |\xi_h| < \infty$  es reversible, cuando, y sólo cuando,  $M \xi_h = 0$ .

**7.2.2. Tipos de fluctuaciones aleatorias.** Introduzcamos las magnitudes aleatorias

$$\zeta^+ = \sup_{n \geq 0} \zeta_n, \quad \zeta^- = \inf_{n \geq 0} \zeta_n. \quad (2.5)$$

**Teorema 5.** Existen solamente tres tipos de fluctuaciones aleatorias,

1. Oscilante:  $P\{\zeta^+ = \infty\} = P\{\zeta^- = -\infty\} = 1$ .

2. Que se aleja a  $-\infty$ :  $P\{\zeta^- = -\infty\} = 1$ ,  $P\{\zeta^+ < \infty\} = 1$ .

3. Que se aleja a  $+\infty$ :  $P\{\zeta^+ = \infty\} = 1$ ,  $P\{\zeta^- > -\infty\} = 1$ .

Las fluctuaciones aleatorias que se alejan a  $-\infty$ , o bien a  $+\infty$ , son, evidentemente, irreversibles.

Entre las fluctuaciones aleatorias oscilantes hay tanto reversibles, como irreversibles. Por ejemplo, una fluctuación aleatoria con distribución de Cauchy de los saltos es reversible y oscilante; una fluctuación aleatoria con la distribución estable y simétrica de los saltos de parámetro  $\alpha < 1$  es irreversible y oscilante.

Las identidades de factorización del p. 7.5 nos proporcionan el siguiente criterio para las fluctuaciones aleatorias que se alejan a  $-\infty$ .

**Teorema 6.** Para que  $P(\sup_{n \geq 0} \zeta_n < \infty) = 1$ , es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n > 0) < \infty. \quad (2.6)$$

Con ello,

$$P(\sup_{n \geq 0} \zeta_n = 0) = \exp \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n > 0) \right]. \quad (2.7)$$

El criterio análogo tiene lugar para las fluctuaciones aleatorias que se alejan a  $+\infty$ .

Ha de notarse que siempre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n = 0) < \infty. \quad (2.8)$$

Por esta razón, (2.6) es también equivalente a una de las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n \geq 0) < \infty \\ P(\sup_{n \geq 1} \zeta_n < 0) > 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.9)$$

### 7.3. Funcionales en la fluctuación aleatoria

7.3.1. Magnitudes en escalera. Los puntos en escalera superiores rigurosos de una fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , se determinan por las correlaciones

$$\tau_+^{(1)} = \min \{n \geq 1 : \zeta_n > 0\} \quad (3.1)$$

y

$$\tau_+^{(2)} = \zeta_{\tau_+^{(1)}}. \quad (3.1')$$

La magnitud aleatoria  $\tau_+^{(1)}$  es el momento de la primera entrada de la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , en el semieje  $(0, +\infty)$ , mientras que  $\tau_+^{(2)}$  representa en sí la posición de la fluctuación aleatoria en el momento de la primera entrada en el semieje  $(0, +\infty)$ , o, en otras palabras, la magnitud del primer antilpo de nivel nulo.

Una fluctuación aleatoria  $\zeta_n^{(1)} = \zeta_{\tau_+^{(1)}+n} - \zeta_{\tau_+^{(1)}}$ ,  $n \geq 0$ , es equivalente de modo estocástico a la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ . Los puntos en escalera superiores rigurosos  $\tau_+^{(2)} = \min \{n \geq 1 : \zeta_n^{(1)} > 0\}$  y  $\tau_+^{(3)} = \zeta_{\tau_+^{(2)}}^{(1)}$  de la fluctuación  $\zeta_n^{(1)}$ ,  $n \geq 0$ , son los segundos puntos en escalera de la fluctuación  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ . En este caso los pares de magnitudes aleatorias  $(\tau_+^{(1)}, \tau_+^{(2)})$  y  $(\tau_+^{(2)}, \tau_+^{(3)})$  son independientes e igualmente distribuidos. De forma análoga pueden ser determinados  $(\tau_+^{(k)}, \tau_+^{(k+1)})$  para todo  $k \geq 1$  entero.

Las sucesiones  $\{\tau_+^{(k)}, k \geq 1\}$  y  $\{\tau_+^{(k)}, k \geq 1\}$  determinan los procesos de regeneración encajados en la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ .

Los procesos de regeneración encajados se interrumpen para aquellas fluctuaciones aleatorias que se alejan a  $-\infty$ . La probabilidad de la interrupción del proceso en un paso finito es igual al defecto de la magnitud  $\tau_+$ :

$$P(\tau_+ = \infty) = P(\sup_{n \geq 0} \zeta_n = 0) = \exp \left\{ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n > 0) \right\}. \quad (3.2)$$

Si  $P(\sup_{n \geq 0} \zeta_n = \infty) = 1$ , entonces  $\tau_+$  es una magnitud aleatoria propia y

$$M\tau_+ = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n \leq 0). \quad (3.3)$$

Correlaciones análogas tienen lugar para los momentos en escalera inferiores rigurosos

$$\tau_- = \min \{n \geq 1 : \zeta_n < 0\}, \quad (3.4)$$

a saber,

$$P(\tau_- = \infty) = P(\inf_{n \geq 0} \zeta_n = 0) = \exp \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n < 0) \right] \quad (3.5)$$

y

$$M\tau_- = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n \geq 0). \quad (3.6)$$

De este modo, tienen lugar las correlaciones

$$\left. \begin{aligned} M\tau_+ &= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n = 0) \right] / P(\tau_- = \infty); \\ M\tau_- &= \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P(\zeta_n = 0) \right] / P(\tau_+ = \infty), \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Existe una alternativa: uno de los momentos en escalera  $\tau_+$  o  $\tau_-$  es una magnitud aleatoria impropia, la fluctuación se aleja a  $-\infty$  o a  $+\infty$  y, en este caso,  $M\tau_- < \infty$  o  $M\tau_+ < \infty$ , o bien  $M\tau_+ = M\tau_- = \infty$  (para las fluctuaciones oscilantes).

Para las magnitudes en escalera  $\tau_+$  y  $\tau_-$  con  $M\tau_+ < \infty$  tiene lugar la identidad de Wald:

$$M\tau_+ = M\gamma + M\bar{\xi}_1, \quad (3.8)$$

con la particularidad de que, si  $M\tau_+ < \infty$ , entonces  $0 \leq M\bar{\xi}_1 < \infty$ .

**EJEMPLO 1.** Una fluctuación aleatoria en el esquema de Bernoulli se determina mediante los saltos  $\xi_k = \pm 1$  con las probabilidades respectivas  $p$  y  $q = 1 - p$ . Cuando  $p > q$ , la fluctuación aleatoria de Bernoulli se aleja a  $+\infty$ , y  $M\tau_+ = 1/(p - q)$ ,  $P(\tau_- = \infty) = 1 - q/p$ . Cuando  $p < q$ , la fluctuación se aleja a  $-\infty$  y  $M\tau_- = \frac{1}{q - p}$ ,  $P(\tau_+ = \infty) = 1 - p/q$ . Cuando  $p = q = \frac{1}{2}$  la fluctuación aleatoria en el esquema de Bernoulli es oscilante y reversible con  $M\tau_+ = M\tau_- = \infty$ .

7.3.2. **Funcionales superiores.** Las funcionales superiores de una fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$  se determinan mediante las correlacio-

$$\bar{\zeta}_n = \max_{0 \leq h \leq n} \zeta_h, \quad n \geq 0, \quad \bar{\zeta}_0 = 0; \quad (3.9)$$

$$\theta_n = \min \{k : \zeta_k = \bar{\zeta}_n\}, \quad n \geq 0, \quad \theta_0 = 0; \quad (3.10)$$

$$v_n = \sum_{h=1}^n \chi(\zeta_h > 0), \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

**Teorema.** *Tienen lugar las siguientes correlaciones:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P(\bar{\zeta}_n = 0) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} P(\zeta_n \leq 0); \quad (3.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P(v_n = n) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} P(\zeta_n > 0); \quad (3.13)$$

$$P(\theta_n = k) = P(\theta_k = k) P(\bar{\zeta}_{n-k} = 0). \quad (3.14)$$

Además, las magnitudes aleatorias  $\theta_n$  (el número del primer máximo) y  $v_n$  (el número de términos positivos de la sucesión  $\zeta_h$  ( $1 \leq h \leq n$ )) son de igual distribución.

Si, para todo  $n$ , la distribución de saltos de  $\zeta_k$  es continua y simétrica:  $P(\zeta_n > 0) = P(\zeta_n < 0) = \frac{1}{2}$ , las distribuciones de las magnitudes  $\tau_+$ ,  $\bar{\zeta}_n$  y  $\theta_n$  no dependen de cómo está distribuida  $\zeta_k$ :

$$\left. \begin{aligned} Mz^{\tau_+} &= 1 - \sqrt{1-z}; \\ P(\tau_+ = n) &= \frac{P(\bar{\zeta}_n = 0)}{2n-1}; \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$$P(\theta_n = n) = P(\bar{\zeta}_n = 0) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (3.16)$$

Con la ayuda de la fórmula de Stirling se determina el comportamiento asintótico de probabilidades (3.15) y (3.16):

$$P(\theta_n = n) = P(\bar{\zeta}_n = 0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}; \quad (3.17)$$

y

$$P(\theta_n = k) \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}}. \quad (3.18)$$

La última correlación representa en sí la ley local de arco seno. En el caso general tiene lugar la siguiente ley de arco seno.

**Teorema.** Si es convergente la serie

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} - P(\xi_n > 0) \right] < \infty, \quad (3.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta_n < xn) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(v_n < xn) - \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}. \quad (3.20)$$

La condición (3.19) se cumple obviamente para las magnitudes aleatorias simétricas  $\xi_n$ , así como para  $M\xi_n = 0$  y  $D\xi_n < \infty$ .

**EJEMPLO 2.** En la teoría de los sistemas de servicio un papel de importancia particular al proceso de espera  $W_n$ ,  $n \geq 0$ , el cual se da por la correlación:

$$W_{n+1} = \max(0, W_n + \xi_n), \quad n \geq 0,$$

para un valor prefijado (o distribución prefijada) de  $W_0$  y una sucesión dada de magnitudes aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 0$ .

Si las magnitudes aleatorias de la sucesión  $\xi_n$ ,  $n \geq 0$ , son independientes y están igualmente distribuidas y si, además,  $W_0 = \xi_0 = 0$ , entonces las magnitudes aleatorias  $W_n$  y  $\tau_n = \max_{k=1}^n \xi_k$  tienen una misma distribución.

#### 7.4. Problema de arruinamiento para fluctuaciones aleatorias semicontinuas

Diferentes situaciones prácticas conducen a los problemas de arruinamiento, los cuales en términos de las fluctuaciones aleatorias  $\xi_n$ ,  $n \geq 0$ , se enuncian del modo siguiente. Se tienen dos pantallas absorbentes: una superior en el punto  $x > 0$  y la otra inferior, en el punto  $-y$  ( $y > 0$ );  $T = x + y$ .

Determinemos los momentos de salida de la fluctuación aleatoria  $\xi_n$ ,  $n \geq 0$ ,  $\xi_0 = 0$ , del segmento  $[-y, x]$  (momentos de arruinamiento) a través de los niveles inferior y superior:

$$\left. \begin{aligned} \tau_y &= \min \{n : \xi_n \leq -y\}; \\ \tau^x &= \min \{n : \xi_n \geq x\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Las probabilidades de salida de la fluctuación aleatoria  $\xi_{n+1}$ ,  $n \geq 0$  (probabilidades de arruinamiento) a través de los niveles inferior y superior se determinan del modo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} Q_T(x) &= P\{\xi_n < x, 0 \leq n \leq \tau_{T-x}\}; \\ Q^T(x) &= P\{\xi_n > x-T, 0 \leq n \leq \tau^x\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Las funciones generadoras de los momentos de arruinamiento

$$\left. \begin{aligned} B_T(x, z) &= M[z^{\tau_{T-x}} \chi(\xi_n < x, 0 \leq n \leq \tau_{T-x})]; \\ B^T(x, z) &= M[z^{\tau^x} \chi(\xi_n > x-T, 0 \leq n \leq \tau^x)]. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Supongamos que la distribución de valores de los saltos de  $\xi$  es en retículo y semicontinua inferiormente, es decir,  $P(\xi \geq -1) = 1$  y  $Mz^k = p(z)$ .

El potencial  $\{R_k, k \geq 0\}$  en el semieje  $k \geq 0$  de una fluctuación aleatoria  $\zeta_n, n \geq 0$ , con la función generadora de saltos  $p(z)$  se da por la correlación

$$r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k = [p(z) - 1]^{-1}. \quad (4.4)$$

La resolvente  $\{R_k(\lambda), k \geq 0\}$  en el semieje  $k \geq 0$  de una fluctuación aleatoria  $\zeta_n, n \geq 0$ , con la función generadora de saltos  $p(z)$  se da mediante la correlación

$$r_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k R_k(\lambda) = [\lambda p(z) - 1]^{-1}. \quad (4.5)$$

**Teorema.** Para las probabilidades de arruinamiento (4.2) tiene lugar la fórmula

$$Q_T(x) = 1 - Q^T(x) = R_x/R_T, \quad 0 \leq x \leq T. \quad (4.6)$$

Para las funciones generadoras de los momentos de arruinamiento (4.3) se verifican las siguientes fórmulas

$$B_T(x, \lambda) = R_x(\lambda)/R_T(\lambda); \quad (4.7)$$

$$B^T(x, \lambda) = [1 - (\lambda - 1) - \sum_{k=1}^T R_k(\lambda)] [R_x(\lambda)/R_T(\lambda)] + (\lambda - 1) \sum_{k=1}^x R_k(\lambda). \quad (4.8)$$

Observemos que para  $M\xi < 0$  el potencial puede ser profijado por la distribución del máximo  $\zeta = \max_{n \geq 0} \zeta_n$ :

$$R_k = P(\max_{n \geq 0} \zeta_n < k) / P(\max_{n \geq 0} \zeta_n = 0) P(\xi = -1). \quad (4.9)$$

## 7.5. Identidades de factorización

**7.5.1. Identidades de factorización principales.** Sea dada una sucesión  $\xi_k, k \geq 1$ , de magnitudes aleatorias independientes o igualmente distribuidas con las función característica  $\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda \xi_k}$ .

Una sucesión de las sumas  $\zeta_n, n \geq 0, \zeta_0 = 0$ , define una fluctuación aleatoria en el eje numérico.

En la teoría de fluctuaciones aleatorias un papel importante desempeñan las llamadas identidades de factorización para la función  $1 - z\varphi(\lambda)$  del tipo

$$1 - z\varphi(\lambda) = \psi_+(z, \lambda) \psi_-(z, \lambda), \quad \text{Im } \lambda = 0, \quad (5.1)$$

donde los factores de factorización  $\psi_{\pm}(z, \lambda)$  son analíticos en los dominios  $\text{Im } \lambda > 0$  y  $\text{Im } \lambda < 0$ , siendo continuos y acotados en los semiplanos cerrados  $\text{Im } \lambda \geq 0$  y  $\text{Im } \lambda \leq 0$ , respectivamente.

La función  $\psi_+(z, \lambda)$  ( $\psi_-(z, \lambda)$ ) se llama **componente positivo (negativo) de factorización**.

El problema de factorización, es decir, la representación de una función característica en la forma (5.1) constituye una de las variantes del problema de Cauchy—Riemann en la teoría de los problemas de frontera para funciones analíticas. La identidad de factorización principal proviene con facilidad del desarrollo

$$1 - z\varphi(\lambda) = \exp \ln(1 - z\varphi(\lambda)) = \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} \varphi^h(\lambda) \right\}. \quad (5.2)$$

**Teorema 1.** Cuando  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } \lambda = 0$ , la función  $1 - z\varphi(\lambda)$  puede ser representada en la forma

$$1 - z\varphi(\lambda) = \varphi_+(z, \lambda) \varphi_-(z, \lambda) \varphi_0(z), \quad (5.3)$$

donde

$$\left. \begin{aligned} \varphi_+(z, \lambda) &= \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} M [e^{i\lambda \zeta_h} \chi(\zeta_h > 0)] \right\}; \\ \varphi_-(z, \lambda) &= \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} M [e^{i\lambda \zeta_h} \chi(\zeta_h < 0)] \right\}; \\ \varphi_0(z) &= \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} P(\zeta_h = 0) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Las funciones  $\varphi_+(z, \lambda)$  y  $\varphi_-(z, \lambda)$  son, respectivamente, los componentes positivo y negativo de factorización y satisfacen adicionalmente las siguientes condiciones:

$$\inf_{\substack{\text{Im } \lambda > 0 \\ < 0}} |\varphi_{\pm}(z, \lambda)| > 0, \quad \varphi_{\pm}(\pm i, \infty) = 1. \quad (5.5)$$

Los componentes de factorización  $\varphi_{\pm}(z, \lambda)$  y  $\varphi_0(z)$  tienen una interpretación probabilística en términos de las funcionales de frontera de la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ .

Los momentos rigurosos en escalera se introducen de la manera siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \tau_+ &= \text{mín} \{k \geq 1 : \zeta_k > 0\}; \\ \tau_- &= \text{mín} \{k \geq 1 : \zeta_k < 0\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Las magnitudes en escalera se determinan por las correlaciones

$$\left. \begin{aligned} \gamma_+ &= \zeta_{\tau_+}; \\ \gamma_- &= \zeta_{\tau_-}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

La magnitud  $\tau_+$  se llama tiempo de la primera obtención (entrada) del semieje positivo  $(0, +\infty)$ .



Análogamente,  $\tau_-$  es el tiempo de la primera obtención del semleje negativo  $(-\infty, 0)$ .

Una magnitud en escalera  $\gamma_+$  ( $\gamma_-$ ) se denomina primera suma positiva (negativa) o punto de entrada en el semleje  $(0, +\infty)$   $(-\infty, 0)$ .

Observemos que la magnitud aleatoria  $\tau_+$  está definida solamente en aquellas sucesiones de sumas  $\zeta_n$ ,  $n \geq 1$ , para las cuales  $\xi = \sup_{n \geq 1} \zeta_n > 0$ . De lo contrario, cuando  $\xi \leq 0$ , suponemos que  $\tau_+ = \infty$ .

Por analogía,  $\tau_-$  es una magnitud aleatoria impropia, si  $P(\xi = \inf_{n \leq 1} \zeta_n > 0) > 0$ .

**Teorema 2.** Cuando  $|z| \leq 1$ ,  $\text{Im } \lambda = 0$ , se verifica la siguiente identidad de factorización

$$1 - z\varphi(\lambda) = (1 - M[e^{i\lambda\gamma_+ z} \chi(\tau_+ < \infty)]) \times \\ \times (1 - M[e^{i\lambda\gamma_- z} \chi(\tau_- < \infty)]) \varphi_0(z) \quad (5.8)$$

Aquí, la función  $\varphi_0(z)$  está definida en (5.4).

Determinaremos las magnitudes en escalera engendradas por la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , mediante las correlaciones

$$\left. \begin{aligned} \tau_+^0 &= \min\{k \geq 1 : \zeta_k \geq 0\}; \\ \tau_-^0 &= \min\{k \geq 1 : \zeta_k \leq 0\} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$y \quad \gamma_{\pm}^0 = \zeta_{\tau_{\pm}^0}. \quad (5.10)$$

**Teorema 3.** Cuando  $|z| \leq 1$ , se verifican las igualdades

$$1 - M[e^{i\lambda\gamma_+^0 z} \tau_+^0 \chi(\tau_+^0 < \infty)] = \\ = \varphi_0(z) \{1 - M[e^{i\lambda\gamma_+ z} \chi(\tau_+ < \infty)]\}; \quad (5.11)$$

$$1 - M[e^{i\lambda\gamma_-^0 z} \tau_-^0 \chi(\tau_-^0 < \infty)] = \\ = \varphi_0(z) \{1 - M[e^{-i\lambda\gamma_- z} \chi(\tau_- < \infty)]\}. \quad (5.12)$$

En este caso

$$\varphi_0(z) = 1 - M[z \tau_+^0 \chi(\gamma_+^0 = 0)] = 1 - M[z \tau_-^0 \chi(\gamma_-^0 = 0)]. \quad (5.13)$$

Los teoremas 1-3 permiten obtener toda una serie de correlaciones para las funcionales de frontera de la sucesión de sumas  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ .

**Corolario 1.** Cuando  $|z| \leq 1$ , tenemos

$$1 - M[e^{i\lambda\gamma_+ z} \tau_+ z \tau_+^0 \chi(\tau_+ < \infty)] = \\ = \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} M[e^{i\lambda\zeta_h} \chi(\zeta_h > 0)] \right\}; \quad (5.14)$$

$$1 - M[e^{i\lambda\gamma_- z} \tau_- z \tau_-^0 \chi(\tau_- < \infty)] = \\ = \exp \left\{ - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{h} M[e^{i\lambda\zeta_h} \chi(\zeta_h < 0)] \right\}. \quad (5.15)$$

**Corolario 2.** Cuando  $\text{Im } \lambda = 0$ , tenemos

$$1 - \varphi(\lambda) = [1 - M(e^{i\lambda\gamma_+} \chi(\tau_+ < \infty))] [1 - M(e^{i\lambda\gamma_0} \chi(\tau_0 < \infty))]. \quad (5.16)$$

La distribución del máximo  $\zeta = \max_{n \geq 0} \zeta_n$  de la sucesión de sumas  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , se determina también por los componentes de factorización.

**Teorema 4.** Si  $p = P(\tau_+ < \infty) < 1$ , entonces cuando  $\text{Im } \lambda \geq 0$ ,

$$Me^{i\lambda\zeta} = (1 - p) \{1 - M[e^{i\lambda\gamma_+} \chi(\tau_+ < \infty)]\}^{-1}, \quad (5.17)$$

o

$$Me^{i\lambda\zeta} = (1 - p_0) \{1 - M[e^{i\lambda\gamma_0} \chi(\tau_0 < \infty)]\}^{-1}, \quad (5.18)$$

donde  $p_0 = P(\tau_0^2 < \infty)$ .

La función generadora de la distribución de máximos  $\bar{\zeta}_n = \max(0, \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)$  se determina del modo siguiente.

**Identidad de Pollaczek-Spitzer.** Cuando  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } \lambda \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n Me^{i\lambda \bar{\zeta}_n} &= \frac{1}{1-z} \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{k} M[(e^{i\lambda \zeta} - 1) \chi(\zeta_n > 0)] = \\ &= \exp \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{k} Me^{i\lambda \max(0, \zeta_n)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

**7.5.2. Ejemplos de fórmulas explícitas.** Existe una clase de distribuciones para las cuales los componentes de las identidades de factorización tienen expresiones explícitas analíticas.

**EJEMPLO 1.** Las distribuciones de las magnitudes en escalera  $\gamma_+$  y  $\gamma_0^2$  y del máximo  $\zeta = \max_{n \geq 0} \zeta_n$  tienen expresiones analíticas explícitas sencillas en un caso importante para las aplicaciones prácticas (en la teoría de los sistemas de servicio, en los problemas de arruinamiento, etc.), a saber, en el caso de distribuciones semicontinuas de los valores de saltos, cuando, por ejemplo, la cola derecha de las distribuciones de los saltos es exponencial:

$$1 - \Phi(x) = P(\xi \geq x) = Ce^{-ax} \quad (C > 0, a > 0), \quad x > 0. \quad (5.20)$$

Cuando  $x < 0$ , la distribución  $P(\xi < x) = \Phi(x)$  es arbitraria. En este caso las magnitudes  $\gamma_+$  y  $\tau_+$  son independientes y

$$P(\gamma_+ < x) = p(1 - e^{-ax}), \quad p = P(\tau_+ < \infty). \quad (5.21)$$

Además,

$$P(\zeta < x) = 1 - pe^{-a(1-p)x}, \quad 1 - p = P(\zeta = 0). \quad (5.22)$$

Si existe  $M\xi = 0$ , entonces  $p = P(\tau_+ < \infty) = 1$ , pero  $P(\tau_+ < \infty) = 1 - aM\xi < 1$  y, en este caso,

$$P(x) = P(\gamma_0^2 \leq x) = \Phi(x) + a \int_{-\infty}^x \Phi(y) dy, \quad x \leq 0. \quad (5.23)$$

y se verifica la fórmula de Juchin—Pollaczek

$$P(\min_{n \geq 0} \zeta_n \leq x) = (1 - aM\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} P^{n*}(x), \quad x \leq 0. \quad (5.24)$$

Si  $M\zeta < 0$ , entonces  $p = P(\tau_+ < \infty) < 1$  (pero  $P(\tau_- < \infty) = 1$ ). La constante  $p$  se determina en este caso por la igualdad

$$p = 1 - \frac{\mu_0}{a}, \quad (5.25)$$

donde  $\mu_0$  es la única raíz positiva de la ecuación  $\Phi(-i\mu_0) = 1$ .

La distribución  $\gamma_0^e$  se determina según la fórmula (5.23).

Las fórmulas citadas en el ejemplo quedan en vigor también cuando el valor de los saltos puede ser representado como la diferencia entre dos magnitudes aleatorias independientes no negativas  $\xi = \xi_+ - \xi_-$  con  $P(\xi_+ > x) = e^{-ax}$ ,  $x \geq 0$  y  $P(\xi_- < x) = \Phi_-(x)$ ,  $x < 0$ . Aquí, para  $x > 0$  tenemos

$$\Phi(x) = P(\xi < x) = 1 - Ce^{-ax}, \quad C = \int_0^{\infty} e^{ax} d\Phi_-(x), \quad (5.26)$$

y cuando  $x \leq 0$ ,

$$\Phi(x) = P(\xi < x) = e^{-ax} \int_x^{\infty} e^{-ay} d\Phi_-(y). \quad (5.27)$$

En este caso la magnitud en escalera  $\gamma_0^e$  tiene la densidad:

$$\frac{d}{dx} P(\gamma_0^e < x) = a\Phi_-(x).$$

Resultados análogos toman lugar para las distribuciones en retículo con distribución geométrica de los saltos positivos:

$$P(\xi \geq k) = C \frac{q^k}{1-q}, \quad (C > 0, q \geq 0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

(para  $q = 0$  suponemos que  $q^0 = 1$ ).

EJEMPLO 2 Una fluctuación aleatoria exponencial se da por la distribución exponencial bilateral de valores de los saltos:

$$\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda \xi} = \frac{ib}{b+i\lambda} \frac{a}{a-i\lambda}. \quad (5.29)$$

Entonces las expresiones explícitas para los factores de factorización  $\varphi_{\pm}(z, \lambda)$  (véase el teorema 1) se determinan según las fórmulas (para  $b \leq a$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_+(z, \lambda) &= 1 - \frac{u(z)}{a-i\lambda}; \\ \varphi_-(z, \lambda) &= 1 - \frac{u(z)}{b+i\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

$$2u(z) = a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4abz} \quad (5.31)$$

Del teorema 2 provienen las expresiones para funciones generadoras de los momentos en escalera:

$$\left. \begin{aligned} M[z^{\tau_+} \chi(\tau_0^0 < \infty)] &= \frac{u(z)}{a}; \\ M[z^{\tau_-} \chi(\tau_0^0 < \infty)] &= \frac{u(z)}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Cuando  $b < a$ , el defecto de la magnitud aleatoria  $\tau_+$  es igual a  $1 - b/a = P(\tau_+ = \infty)$ .

Las distribuciones de las magnitudes en escalera  $\gamma_{\pm}$  son exponenciales con las densidades respectivas  $be^{-ax}$  y  $ae^{-bx}$ .

La distribución del máximo (para  $b < a$ ) es también exponencial:

$$P(\max_{n \geq 0} \zeta_n \leq x) = 1 - \frac{b}{a} e^{-(a-b)x}. \quad (5.33)$$

**EJEMPLO 3.** Una fluctuación aleatoria binomial se determina por la distribución binomial del valor de los saltos:  $P(\xi_k = +1) = p$ ,  $P(\xi_k = -1) = q$ ,  $p + q = 1$ ,  $\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda \xi_k} = p e^{i\lambda} + q e^{-i\lambda}$ .

Los factores de factorización se determinan según las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \varphi_+(z, \lambda) &= 1 - e^{i\lambda} u_+(z); \\ \varphi_-(z, \lambda) &= 1 - e^{i\lambda} u_-(z); \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

$$u_+(z) = [1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}] / 2qz, \quad (5.35)$$

$$u_-(z) = [1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}] / 2pz;$$

$$\varphi_0(z) = \frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 - 4pqz^2}]. \quad (5.36)$$

**7.5.3. Funcionales de frontera.** Las funcionales de frontera superiores en una fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , relacionadas con la llegada al nivel positivo, se determinan del modo siguiente.

El momento de la primera llegada al nivel positivo  $x > 0$ :

$$\tau_x = \min \{k \geq 1 : \zeta_k \geq x\}. \quad (5.37)$$

El valor del primer anticipo respecto al nivel positivo  $x > 0$ :

$$\gamma_x = \zeta_{\tau_x} - x. \quad (5.38)$$

**Teorema 5.** Cuando  $|z| < 1$ ,  $\text{Im } \mu \geq 0$ ,  $\text{Im } \mu > 0$ , se tiene

$$1 - \frac{\lambda - \mu}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{i\lambda x} d_x M [z^{\tau_x} e^{i\mu \gamma_x} \chi(\tau_x < \infty)] \frac{\varphi_+(z, \mu)}{\varphi_+(z, \lambda)}. \quad (5.39)$$

En este caso  $\tau_{+0} = \tau_+$ ,  $\gamma_{+0} = \gamma_+$ .

Si la función característica  $\varphi(\lambda) = M e^{i\lambda \xi_k}$  del valor de los saltos es analítica en cierta banda  $-\lambda_0 < \text{Im } \lambda < 0$  y  $\varphi(-i\lambda_0) > 1$ , entonces tiene lugar la identidad de Wald para  $x > 0$ .

$$M [z^{\tau_x} e^{i\lambda_0 \gamma_x} \chi(\tau_x < \infty)] = e^{-\lambda_0 x}, \quad (5.40)$$

donde  $\lambda(z)$  es la raíz mayor de la ecuación

$$1 - z f(-\lambda, z) = 0. \quad (5.41)$$

La identidad de Wald subsiste en una situación más general para el momento de salida de la fluctuación aleatoria  $\zeta_n$ ,  $n \geq 0$ , del intervalo finito  $(-a, b)$ :  $\tau_b^a = \min\{n : \zeta_n \in (-a, b)\}$  y para la posición del punto en el momento de salida  $\zeta_{\tau_b^a}$  en la siguiente forma:

$$M\{[f(\lambda)]^{-\tau_b^a} e^{-\lambda \zeta_{\tau_b^a}}\} = 1.$$

Esta identidad se utiliza en el análisis sucesivo para estimar la distribución de  $\tau_b^a$ .

Para la distribución semicontinua del valor de los saltos que tiene cola exponencial o geométrica:  $P(\xi \geq x) = C e^{-ax}$  ( $C > 0$ ,  $a > 0$ ,  $x > 0$ ) o (en el caso de retículo)  $P(\xi \geq k) = C q^{k-1}$ ,  $C > 0$ ,  $q > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , las magnitudes aleatorias  $\tau_x$  y  $\gamma_x$  son independientes y

$$P(\gamma_x \geq l / \tau_x < \infty) = e^{-al}, \quad (5.42)$$

o, en el caso de retículo,

$$P(\gamma_x \geq k / \tau_x < \infty) = q^k, \quad (5.43)$$

De la identidad de Wald (5.40) se deduce

$$M\{z^{\tau_x} \chi(\tau_x < \infty)\} = \frac{a - \lambda(z)}{a} e^{-\lambda(z)x}, \quad (5.44)$$

o, en el caso de retículo,

$$M\{z^{\tau_x} \chi(\tau_x < \infty)\} = \frac{1 - q e^{\lambda(z)}}{1 - q} e^{-\lambda(z)x}. \quad (5.45)$$

Como corolario, de las fórmulas (5.44), (5.45) se desprende:

$$P(\tau_x = n) = \frac{x}{n} p_n(x) + \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \left[ \frac{x}{n} p_n(x) \right], \quad (5.46)$$

y en el caso de retículo,

$$P(\tau_x = n) = \frac{x}{n} P(\zeta_n = x) + \frac{q}{1-q} \left[ \frac{x}{n} P(\zeta_n = x) - \frac{x-1}{n} P(\zeta_n = x-1) \right]. \quad (5.47)$$

Aquí,  $p_n(x) = \frac{d}{dx} P(\zeta_n < x)$  es la densidad de distribución de la suma  $\zeta_n$  para  $x > 0$ .

Para una fluctuación aleatoria semicontinua en retículo con  $q=0$ , es decir, con  $P(\xi > 1) = 0$  tenemos

$$P(\tau_x = n) = \frac{x}{n} P(\zeta_n = x). \quad (5.48)$$

## CADENAS DE MÁRKOV

## 8.1. Definiciones. Propiedades generales

**8.1.1. Definición de la cadena de Márkov.** Una de las generalizaciones más importantes del concepto de sucesión de las magnitudes aleatorias independientes es la noción de sucesión de las magnitudes asociadas en la cadena de Márkov.

Sea dado el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . La aplicación medible  $\xi: (\Omega, \mathfrak{F}) \rightarrow (X, \mathfrak{B})$ , donde  $(X, \mathfrak{B})$  es cierto espacio medible, se llama elemento aleatorio en  $(X, \mathfrak{B})$ .

La sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  de elementos aleatorios en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  se denomina cadena de Márkov, si para cualesquiera  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n = 1, 2, \dots$  se verifica con la probabilidad 1

$$P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_{n-1}\}.$$

El espacio  $(X, \mathfrak{B})$  lleva el nombre de **espacio fásico** de la cadena.

Toda sucesión de los elementos (aleatorios o no aleatorios)  $\{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}$  del espacio  $(X, \mathfrak{B})$  puede considerarse como el movimiento de cierto sistema (de un punto o de una partícula) en el espacio fásico: del estado inicial  $\xi_0$  en el momento de tiempo 1 el sistema pasa al estado  $\xi_1$ , luego, en el momento de tiempo 2, al estado  $\xi_2$ , etc. De este modo, el concepto de cadena de Márkov destaca en la totalidad de toda clase de sistemas móviles los así llamados **sistemas sin efecto residual** o **sistemas sin memoria**. En el caso determinista éstos son aquellos sistemas, para los cuales el estado en el momento de tiempo  $n$  se determina unívocamente por el estado de dicho sistema en el momento de tiempo  $n - 1$ , independientemente del carácter del movimiento hasta el momento dado. A diferencia de los sistemas deterministas, los sistemas estocásticos sin efecto residual poseen la propiedad de que por el estado del sistema en el momento de tiempo  $n - 1$  se determina unívocamente no el estado del sistema en el momento de tiempo  $n$ , sino sólo la probabilidad con la cual el sistema se encuentra en este momento de tiempo en uno u otro conjunto de estados.

**EJEMPLO 1.** Una sucesión de los elementos aleatorios independientes  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  forma una cadena de Márkov, ya que

$$P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_{n-1}\} = P\{\xi_n \in \Gamma\},$$

**EJEMPLO 2. Fluctuaciones aleatorias.** Sean  $X$  un grupo conmutativo aditivo y  $\mathfrak{B}$ , cierta  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos  $X$ , concor-

dada con la operación de adición en  $X$ , es decir, si  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , entonces  $\Gamma + x = \{x + z, z \in \Gamma\} \in \mathfrak{B}$  para cualquier  $x \in X$ . Supongamos que en  $(X, \mathfrak{B})$  está dada una sucesión de los elementos aleatorios independientes  $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ . La sucesión  $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  será la cadena de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ , pues para todos los  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n = 1, 2, \dots$

$$P\{\xi_n \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = P\{\xi_{n-1} + \eta_n \in \Gamma | \xi_{n-1}\}.$$

La cadena de esta índole se denomina fluctuación aleatoria en  $X$ .

Sea, por ejemplo,  $X$  una totalidad de todos los vectores del espacio euclidiano  $m$ -dimensional  $R^m$  cuyas coordenadas en cierta base fijada  $e_1, e_2, \dots, e_m$  son de valores enteros; y sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de todos los subconjuntos de  $X$ . Si los vectores aleatorios  $\eta_1, \eta_2, \dots$  con sus valores en  $X$  son independientes y están igualmente distribuidos, la fluctuación  $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  se llamará fluctuación aleatoria por un retículo de valores enteros en  $R^m$ . Aquí,  $\eta_0$  es un vector aleatorio arbitrario que no depende de la sucesión  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$  y que toma sus valores en  $X$ . En particular, si los vectores  $\eta_k, k = 1, 2, \dots$  toman los valores  $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_m$

con la probabilidad  $\frac{1}{2m}$  para cada uno de ellos, entonces la fluctuación se efectúa de un modo tal que una partícula (un sistema) durante la unidad de tiempo pasa, con iguales probabilidades, del punto dado a uno de los puntos contiguos (contiguos respecto del punto  $x \in X$  se llaman los puntos del tipo  $x \pm e_1, x \pm e_2, \dots, x \pm e_m$ ). Tal fluctuación se llama fluctuación simétrica más simple por un retículo de valores enteros en  $R^m$ .

Otro ejemplo de fluctuación aleatoria se obtendrá, si ponemos  $X = R^m, \mathfrak{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $R^m$  y  $\{\eta_k, k = 1, 2, \dots\}$  son vectores aleatorios independientes en  $R^m$  igualmente distribuidos.

**EJEMPLO 3. Fluctuaciones aleatorias con fronteras.** a) Supongamos de nuevo que  $X$  es un grupo conmutativo aditivo y la  $\mathfrak{B}$   $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos  $X$  concordada con la operación de adición en  $X$  (véase el ejemplo 2). Para el conjunto arbitrario  $D \in \mathfrak{B}$  designaremos mediante  $\mathfrak{B}_D$  la traza de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  en el conjunto  $D$ , es decir, la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos del tipo  $\Gamma \cap D, \Gamma \in \mathfrak{B}$ . Supongamos que para cierto conjunto fijado  $D \in \mathfrak{B}$  está dada la aplicación medible  $\varphi: (X \setminus D, \mathfrak{B}_{X \setminus D}) \rightarrow (D, \mathfrak{B}_D)$ , en tanto que para cierto subconjunto  $D' \subset D, D' \in \mathfrak{B}$ , la aplicación medible  $\psi: (D', \mathfrak{B}_{D'}) \rightarrow (D, \mathfrak{B}_D)$ . Sea  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$  una sucesión de elementos aleatorios independientes e igualmente distribuidos en  $(X, \mathfrak{B})$ , y sea  $\eta_0$  un elemento aleatorio en  $(D, \mathfrak{B}_D)$  que no depende de la sucesión  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ .

$$\text{Hagamos } \xi_0 = \eta_0, \xi_{n+1} = \chi_{D'}(\xi_n) \psi(\xi_n) + \chi_{D \setminus D'}(\xi_n) [(\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_D \times \\ \times (\xi_n + \eta_{n+1}) + \varphi(\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_{X \setminus D}(\xi_n + \eta_{n+1})], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

donde  $\chi_\Gamma(x)$  es el indicador del conjunto  $\Gamma \subset X$ , es decir, una función igual a la unidad para  $x \in \Gamma$ , e igual a cero para  $x \notin \Gamma$ . En este caso la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  forma una cadena de Márkov en  $(D, \mathfrak{B}_D)$ , llamada fluctuación aleatoria con absorción. El

movimiento de una partícula en esta fluctuación puede describirse del modo siguiente. Si en cierto momento de tiempo la partícula ha caído en un punto  $x \in D'$ , entonces en el siguiente instante «salta» al punto  $\psi(x) \in D$ . Si en el momento de tiempo  $n$  la magnitud  $\xi_n = x \in D \setminus D'$ , entonces en el momento de tiempo  $n+1$  la partícula llegará al punto  $x + \eta_{n+1}$ , a condición de que  $x + \eta_{n+1} \in D$ ; de lo contrario la partícula pasará al punto  $\varphi(x + \eta_{n+1})$ .

Consideremos algunos casos particulares de este modelo. Supongamos que  $X$  es un retículo de valores enteros en una recta,  $D$  es el conjunto de todos los números enteros no negativos,  $D'$  es un conjunto vacío,  $\varphi(x) = 0$  para todos los  $x \in X \setminus D$  y  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ , una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas, cada una de las cuales con la probabilidad  $\frac{1}{2}$  toma los valores  $+1$  y  $-1$ . En este caso, si  $\eta_0$  es una magnitud aleatoria no negativa de valores enteros que no depende de la sucesión  $\{\eta_n, n \geq 1\}$ , entonces la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , donde, de conformidad con la fórmula (1.1), en la situación que se considera  $\xi_0 = \eta_0$ ,  $\xi_{n+1} = (\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_D(\xi_n + \eta_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , forma una cadena de Márkov llamada fluctuación más simple con pantalla reflectora de retardo en el cero. Con tal tipo de fluctuación en todos los puntos  $x > 0$  la partícula fluctuante se porta igual que en la fluctuación simétrica más simple, es decir, de  $x$  ella pasa a uno de los puntos  $x+1$  y  $x-1$  con la probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Al llegar al punto  $x = 0$ , la partícula puede «encontrarse» en éste cierto tiempo aleatorio que tiene distribución geométrica y, a continuación, irse al punto  $x = 1$ .

Con el fin de obtener una fluctuación más simple con aplicación en el cero sin retardo, se deben elegir  $X, D, \varphi$  y  $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  los mismos que en el ejemplo anterior. A título de  $D'$  tomemos el conjunto compuesto por un solo punto  $x = 0$  ( $D' = \{0\}$ ) y sea  $\psi(0) = 1$ . En este caso  $\xi_0 = \eta_0$ ,  $\xi_{n+1} = \chi_{\{0\}}(\xi_n) + \chi_{D \setminus \{0\}}(\xi_n) (\xi_n + \eta_{n+1})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esto significa que al caer en el punto  $x = 0$ , la partícula fluctuante saldrá de éste haciendo un paso más y llegará al punto  $x = 1$ . En todos los demás puntos ( $x > 0$ ) el comportamiento de la partícula es el mismo que en el ejemplo antecedente.

Análogamente pueden constituirse también las fluctuaciones aleatorias con dos pantallas reflectoras. Sean, por ejemplo,  $a$  y  $b$  dos números enteros,  $a < b$ , y supongamos que  $D$  significa la totalidad de todos los números enteros en el segmento  $[a, b]$ ,  $D' = \{b\}$ ,  $\psi(b) = b - 1$ ,  $\varphi(x) = a$  para todo  $x < a$  entero y  $\varphi(x) = b$  para todo  $x > b$  entero, la sucesión  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$  es la misma que en el ejemplo anterior,  $\eta_0$  es una magnitud aleatoria que no depende de la sucesión  $\{\eta_n, n \geq 1\}$  y de cuyos valores sirven los números enteros en el segmento  $[a, b]$ . En este caso  $\xi_0 = \eta_0$ ,  $\xi_{n+1} = \chi_{\{b\}}(\xi_n) (b-1) + \chi_{[a, b]}(\xi_n) [(\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_{[a, b]}(\xi_n + \eta_{n+1}) + a \chi_{[a-1]}(\xi_n + \eta_{n+1})]$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , es decir, la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  es la fluctuación aleatoria más simple, para la cual el punto  $a$  sirve de pantalla reflectora de retardo, mientras que en el punto  $b$  se realiza la aplicación sin retardo.

He aquí un ejemplo más de una fluctuación aleatoria multidimensional con aplicación. Supongamos que  $X = R^m$ ,  $\mathfrak{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $R^m$ ;  $e_1, e_2, \dots, e_m$  es una base



fijada en  $R^m$ . Designaremos mediante  $x^i$  la  $i$ -ésima coordenada del vector  $x \in R^m$ , de suerte que  $x = \sum_{i=1}^m x^i e_i$ . Pongamos  $D = \{x : x \in R^m, x^1 \geq 0\}$ ,  $\varphi(x) = -x^1 e_1 + \sum_{i=2}^m x^i e_i$  para todo  $x \in R^m \setminus D$ ,  $D' = \emptyset$  ( $\emptyset$  es un conjunto vacío). Supongamos, además, que están dados una sucesión de vectores aleatorios independientes e igualmente distribuidos en  $R^m$  ( $\eta_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), y un vector aleatorio  $\eta_0 \in D$ , no dependiente de dicha sucesión. En este caso, si

$$\xi_0 = \eta_0, \quad \xi_{n+1} = (\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_D(\xi_n + \eta_{n+1}) + \varphi(\xi_n + \eta_{n+1}) \chi_{R^m \setminus D}(\xi_n + \eta_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  representa en sí una cadena de Márkov en el semiespacio  $(D, \mathfrak{B}_D)$ . Este es un ejemplo de fluctuación aleatoria, cuando la reflexión se efectúa según la ley de reflexión de un rayo luminoso en el hiperplano  $x^1 = 0$ .

b) Sea  $(X, \mathfrak{B})$  un grupo conmutativo aditivo con  $\sigma$ -álgebra, igual que en el ejemplo 2. Según el conjunto dado  $D_0 \in \mathfrak{B}$  y la sucesión  $\{\eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  de elementos aleatorios independientes en  $(X, \mathfrak{B})$  construyamos una nueva sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  por la fórmula  $\xi_0 = \eta_0$ ,  $\xi_{n+1} = \xi_n \chi_{D_0}(\xi_n) + (\xi_n + \eta_{n+1}) \times \chi_{X \setminus D_0}(\xi_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esta sucesión forma una cadena de Márkov en  $(X, \mathfrak{B})$ . Se llama fluctuación aleatoria con absorción en el conjunto  $D_0$ . Con dicha fluctuación una partícula, que en cierto momento de tiempo  $n$  se encuentra en el punto  $x \notin D_0$ , en el momento de tiempo que sigue se desplaza al punto  $x + \eta_{n+1}$ . Si la partícula ha caído en algún punto del conjunto  $D_0$ , queda en este para siempre.

**EJEMPLO 4. Fluctuación más simple con probabilidades variables.** Sean  $X$  una totalidad de todos los números no negativos y enteros,  $\mathfrak{B}$  una  $\sigma$ -álgebra de todos los subconjuntos de  $X$ . Los puntos  $x \in X$  se interpretarán como el estado de cierto sistema. Supongamos que en los momentos de tiempo  $0, 1, 2, \dots$  este sistema cambia sus estados de una manera tal que encontrándose en el momento de tiempo  $n$  en el estado  $x \geq 0$ , en el momento de tiempo  $n+1$  llega a uno de los estados  $x-1, x, x+1$  con las probabilidades  $q_x, r_x, p_x$ , respectivamente,  $p_x + q_x + r_x = 1$ . Si  $x = 0$ , el paso es sólo posible a los estados  $0, 1$  con las probabilidades  $r_0$  y  $p_0$ , respectivamente,  $r_0 + p_0 = 1$ . Supongamos también que los pasos indicados se realizan en el momento de tiempo  $n+1$ , independientemente (en el sentido teórico-probabilístico) del movimiento del sistema hasta el momento  $n$ . Esto significa que si  $\xi_n$  es el estado del sistema en el momento de tiempo  $n$ , entonces para  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$  se verifica

$$P\{\xi_{n+1} \in \Gamma | \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\} = P\{\xi_{n+1} \in \Gamma | \xi_n\}.$$

En otras palabras, la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  forma una cadena de Márkov que se llamará fluctuación más simple con probabilidades variables.

Hablando en rigor, la cadena de Márkov en este ejemplo no puede considerarse prefijada, puesto que a priori no se sabe si podrán pro-

lijarse el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y las magnitudes aleatorias  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ , definidos en  $\Omega$  de tal modo que se cumplan todas las condiciones impuestas sobre  $\xi_n$ . Más abajo será enunciado el teorema general (véase el teorema 2) que muestra en particular, que la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ , que determina una fluctuación más simple con probabilidades variables, puede ser dada en cierto espacio probabilístico.

**EJEMPLO 5. Sistemas de servicio de masas.** Examinemos cierto sistema de servicio que cuenta con  $m$  puestos de servicio. Supongamos que en momentos aleatorios de tiempo (de valores enteros) llegan al sistema demandas de servicio las cuales empiezan a atenderse inmediatamente, si hay puestos libres. En el caso de ausencia de puestos libres los pedidos recibidos forman cola. Cada demanda se atiende durante cierto tiempo aleatorio, después de lo cual abandona de inmediato el sistema. Supongamos que se han cumplido las siguientes condiciones:

a) en todo momento de tiempo puede llegar con la probabilidad  $p$  sólo una demanda de servicio, independientemente del número de pedidos recibidos hasta el momento dado;

b) si cierta demanda es atendida en el momento de tiempo  $n$ , entonces con la probabilidad  $q$  su servicio puede darse por terminado en el momento de tiempo  $n + 1$ , independientemente de cantidad de tiempo consumido para el servicio hasta este último momento;

c) el servicio en cada uno de  $m$  puestos no depende del servicio en los puestos restantes y, además, tampoco depende del flujo entrante de demandas.

Designemos mediante  $\xi_n$  el número de todas las demandas en el sistema dado de servicio en el momento de tiempo  $n$  (incluyendo las que se atienden y las que forman cola). En este caso  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  es una cadena de Márkov, para la cual con todo  $k \in [1, m]$

$$P\{\xi_{n+1} = k - j / \xi_n = k\} = (1 - p) C_k^j q^j (1 - q)^{k-j} + \\ + p C_k^{j+1} q^{j+1} (1 - q)^{k-j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k, \\ P\{\xi_{n+1} = k + 1 / \xi_n = k\} = p(1 - q)^k.$$

Observemos que  $C_k^{k+1} = 0$ , de suerte que  $P\{\xi_{n+1} = 0 / \xi_n = k\} = (1 - p) q^k$ .

Cuando  $k = 0$ ,

$$P\{\xi_{n+1} = 0 / \xi_n = 0\} = 1 - p, \quad P\{\xi_{n+1} = 1 / \xi_n = 0\} = p.$$

Y, por fin, cuando  $k > m$ ,

$$P\{\xi_{n+1} = k - j / \xi_n = k\} = (1 - p) C_m^j q^j (1 - q)^{m-j} + \\ + p C_m^{j+1} q^{j+1} (1 - q)^{m-j-1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \\ P\{\xi_{n+1} = k + 1 / \xi_n = k\} = p(1 - q)^m$$

En todos estos casos, siendo  $r > 1$ , tenemos

$$P\{\xi_{n+1} = k + r / \xi_n = k\} = 0.$$

Si  $m = 1$ , es decir, si en el sistema hay un solo puesto para el servicio, la cadena  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  coincide con la del ejem-

plo 4, para la cual  $r_0 = 1 - p$ ,  $p_0 = p$ , y con  $x > 0$

$$p_x = p(1 - q), \quad q_x = q(1 - p), \quad r_x = (1 - p)(1 - q) + pq.$$

**8.1.2. Criterios para distinguir las cadenas de Márkov.** Sea dada la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  de elementos aleatorios en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  (el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  se considera fijado). Designemos mediante  $\mathfrak{F}_n$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos, respecto a la cual son medibles los elementos aleatorios  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , y mediante  $\mathfrak{F}^n$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos, respecto a la cual son medibles los elementos aleatorios  $\xi_n, \xi_{n+1}, \dots$ . En otras palabras,  $\mathfrak{F}_n$  es la  $\sigma$ -álgebra de todos los sucesos relacionados con la evolución de la sucesión hasta el momento  $n$  inclusive, en tanto que  $\mathfrak{F}^n$  es la  $\sigma$ -álgebra de todos los sucesos relacionados con la evolución de la sucesión después del momento  $n$ , incluyendo el propio momento de tiempo  $n$ . La  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_n$  se genera por los sucesos del tipo  $\{\xi_k \in \Gamma\}$  para todos los  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . Análogamente, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^n$  se genera por los sucesos  $\{\xi_k \in \Gamma\}$ , cuando  $k \geq n$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .

La definición de la cadena de Márkov significa, de este modo, que para todos los  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , con la probabilidad 1, tenemos

$$P\{\xi_{n+1} \in \Gamma / \mathfrak{F}_n\} = P\{\xi_{n+1} \in \Gamma / \xi_n\}.$$

**Teorema 1.** Sea  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  una sucesión de elementos aleatorios en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Las afirmaciones a seguir son equivalentes:

A) la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  en una cadena de Márkov;  
 B) para cualesquiera  $n = 0, 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , con la probabilidad 1, tenemos

$$P\{\xi_{n+m} \in \Gamma / \mathfrak{F}_n\} = P\{\xi_{n+m} \in \Gamma / \xi_n\};$$

C) para cualesquiera  $A \in \mathfrak{F}_{n-1}$ ,  $B \in \mathfrak{F}^{n+1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), con la probabilidad 1, tenemos

$$P\{A \cap B / \xi_n\} = P\{A / \xi_n\} P\{B / \xi_n\};$$

D) para toda magnitud aleatoria acotada  $\mathfrak{F}^{n+1}$ -medible  $\eta$ , con la probabilidad 1, tenemos

$$M\{\eta / \mathfrak{F}_n\} = M\{\eta / \xi_n\}.$$

Si convenimos en considerar el momento de tiempo  $n$  «presente», entonces  $\mathfrak{F}_{n-1}$  será «el pasado», mientras que  $\mathfrak{F}^{n+1}$  es «el futuro». La afirmación C) significa, de este modo, que para la cadena de Márkov con «el presente» conocido, «el pasado» y «el futuro» son condicionalmente independientes.

**8.1.3. Ecuación de Chapman—Kolmogórov.** Sea  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  una cadena de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  y  $0 \leq k < m < n$ . En este caso, en virtud de las propiedades de las probabilidades condicionales y de la propiedad de Márkov, con la probabilidad 1, tenemos

$$P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_0\} = M\{P\{\xi_n \in \Gamma / \xi_m\} / \xi_0\}.$$

Esta correlación lleva el nombre de ecuación de Chapman — Kolmogórov y es, de hecho, el corolario de la fórmula para la probabilidad total y de la propiedad markoviana.

Examinemos la probabilidad condicional  $P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k\}$ ,  $0 \leq k < n$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . Para  $k, n, \Gamma$  fijados esta probabilidad representa en sí una función  $\mathfrak{B}$ -medible de  $\xi_k$ . Sin embargo, en el caso general, no se puede afirmar que para  $k, n, \omega$  fijados la función  $P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k\}$  será la medida en  $\mathfrak{B}$ .

En efecto, de las propiedades de las probabilidades condicionales se deduce que para toda sucesión  $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$  de conjuntos disjuntos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$ , con la probabilidad 1, se cumple

$$P\left\{\xi_n \in \bigcup_{r=1}^{\infty} \Gamma_r/\xi_k\right\} = \sum_{r=1}^{\infty} P\{\xi_n \in \Gamma_r/\xi_k\}.$$

Con ello, el conjunto de aquellos  $\omega$ , para los cuales esta igualdad no se verifica, depende de la sucesión  $\{\Gamma_r, r = 1, 2, \dots\}$ . Para otra sucesión este conjunto exclusivo será de otra índole, razón por la cual no podemos afirmar que para casi todos los  $\omega$  la probabilidad condicional  $P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k\}$  es una medida en  $\mathfrak{B}$ .

No obstante, en varios casos tal afirmación resulta ser justa. A saber, si  $X$  es un espacio separable métrico completo y  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $X$ , entonces existe una función  $P(k, x, n, \Gamma)$ ,  $0 \leq k < n$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , tal que para cualesquiera  $k, n$  y  $\Gamma$ , con la probabilidad 1,

$$P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k\} = P(k, \xi_k, n, \Gamma)$$

y en este caso  $P(k, x, n, \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible para  $k, n, \Gamma$  fijados; cuando están fijados  $k, x, n$ ,  $P(k, x, n, \Gamma)$  es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$ . Es evidente que para  $k = n$  ha de ser  $P(n, x, n, \Gamma) = \chi_{\Gamma}(x)$ , donde  $\chi_{\Gamma}(x)$  es el indicador del conjunto  $\Gamma$ .

Si para la cadena dada  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  tal función  $P(k, x, n, \Gamma)$  existe, se denomina **probabilidad de paso**. En términos de las probabilidades de paso la ecuación de Chapman — Kolmogórov puede ser escrita así:

$$P(k, \xi_k, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, \xi_k, m, dy).$$

Esta igualdad se cumple con la probabilidad 1. En muchos casos se cumple una igualdad más fuerte

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(m, y, n, \Gamma) P(k, x, m, dy)$$

para todos los  $0 \leq k \leq m \leq n$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , la cual se llama también ecuación de Chapman—Kolmogórov para las probabilidades de paso. La probabilidad de paso  $P(k, x, n, \Gamma)$  puede interpretarse como una probabilidad condicional  $P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k = x\}$ .

Ha de notarse que las probabilidades de paso del tipo  $P\{\xi_n \in \Gamma/\xi_k = x\}$  para la sucesión aleatoria dada  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  pueden satisfacer la ecuación de Chapman—Kolmogórov sin que esta sucesión sea una cadena de Márkov.

**EJEMPLO 6.** En una urna hay cuatro bolas, numeradas con las cifras de 1 hasta 4. Se saca al azar una bola de la urna, se nota el número y ésta se retorna a la urna. Supongamos que esta labor dura tanto

tiempo como se quiera. Designaremos con  $\eta_n$  el número de la bola sacada al realizar el  $n$ -ésimo paso. Supongamos que para  $j = 1, 2, 3$  el símbolo  $A_j^{(n)}$  significa un suceso consistente en que  $\eta_n = j$ , o bien  $\eta_n = 4$ . Pongamos  $\xi_{2(m-1)+j}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , igual a 1 ó a 0, según se realizó o no el suceso  $A_j^{(m)}$ . Entonces, para  $x_1, x_2, x_3$ , cada uno de los cuales es igual a 0, o bien a 1, tenemos

$$P(\xi_n = x_1) = P(\xi_n = x_2 / \xi_m = x_3) = \frac{1}{2}, \quad n > m.$$

Por esta razón, para  $k < m < n$  tenemos

$$\frac{1}{2} = P(\xi_n = x_2 / \xi_k = x_1) = P(\xi_n = x_2 / \xi_m = 0) P(\xi_m = 0 / \xi_k = x_1) + \\ + P(\xi_n = x_2 / \xi_m = 1) P(\xi_m = 1 / \xi_k = x_1),$$

es decir, en el caso dado la ecuación de Chapman — Kolmogórov para las probabilidades condicionales queda cumplida. Sin embargo,

$$P(\xi_{3m+3} = 1 / \xi_{2m+2} = 1, \xi_{3m+1} = 1), \quad m = 1, 2, \dots$$

y, por ello, la sucesión  $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$  no es cadena de Márkov.

8.1.4. Construcción de la cadena de Márkov según la probabilidad de paso. Sea  $(X, \mathfrak{B})$  cierto espacio medible. Supongamos que para todos los  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $k, n$  enteros de tal índole que  $0 \leq k < n$ , está dada una función numérica  $P(k, x, n, \Gamma)$  que satisface las condiciones:

- a) es  $\mathfrak{B}$ -medible para  $k, n, \Gamma$  fijados
- b) es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$ ; para  $k, x, n$  fijados;
- c) para todos los  $0 \leq k < m < n$ ,  $x \in X$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  está cumplida la correlación

$$P(k, x, n, \Gamma) = \int_X P(k, x, m, dy) P(m, y, n, \Gamma).$$

Se pregunta si existe o no en cierto espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  la cadena de Márkov  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  para la cual  $P(k, x, n, \Gamma)$  sería la probabilidad de paso, es decir, con la probabilidad 1 se verificaría

$$P(\xi_n \in \Gamma / \xi_k = P(k, \xi_k, n, \Gamma).$$

A esta pregunta nos responde el siguiente teorema.

**Teorema 2.** Si la función  $P(k, x, n, \Gamma)$  satisface las condiciones a) — c), entonces existe un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y una sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  de elementos aleatorios pertenecientes a  $(X, \mathfrak{B})$  tales que la sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  es una cadena de Márkov con la probabilidad de paso  $P(k, x, n, \Gamma)$ .

El espacio probabilístico citado en el teorema 2 puede ser construido de la manera siguiente. Hagamos  $\Omega = X^\infty$ ,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\infty$ . Esto significa que los elementos del conjunto  $\Omega$  son toda una serie de sucesiones del tipo  $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ , donde  $x_i \in X$ ,  $\mathfrak{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos  $\Omega$  que contienen todos los conjuntos del tipo

$$\{\omega : x_0 \in \Gamma_0, x_1 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n\} \quad (1.2)$$

para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$  cualesquiera.

Ahora, sea  $\mu$  una medida probabilística arbitraria en  $\mathfrak{B}$ . En los conjuntos del tipo (1.2) definamos una función numérica  $P$  mediante la fórmula

$$P(\omega: x_0 \in \Gamma_0, x_1 \in \Gamma_1, \dots, x_n \in \Gamma_n) = \\ = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(0, x_0, 1, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(1, x_1, 2, dx_2) \dots \times \\ \times \int_{\Gamma_n} P(n-1, x_{n-1}, n, dx_n).$$

Esta función se prolonga hasta la medida probabilística  $P$  en el espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{F})$ . Pongamos, para  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\xi_n = \xi_n(\omega)$   $x_n = x_n$ , si  $\omega = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ . En este caso en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  la sucesión  $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  de elementos aleatorios en  $(X, \mathfrak{B})$  forma una cadena de Márkov, para la cual la función dada  $P(k, x, n, \Gamma)$  es la probabilidad de paso. Con ello, el estado inicial  $\xi_0$  tiene la distribución  $\mu$ , llamada distribución inicial de la cadena.

Es evidente que según la función  $P(k, x, n, \Gamma)$  la cadena de Márkov puede ser construida de manera no unívoca: hay arbitrariedad en la elección del espacio probabilístico y de la distribución inicial. Sin embargo, si para dos cadenas en un mismo espacio fásico:  $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  dada en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y  $(\xi'_n, n = 0, 1, 2, \dots)$ , dada en el espacio probabilístico  $(\Omega', \mathfrak{F}', P')$ , coinciden las probabilidades de paso y las distribuciones iniciales, entonces tales cadenas se denominan estocásticas equivalentes en el sentido de que para cualesquiera  $n = 0, 1, 2, \dots$  y el juego arbitrario  $\{\Gamma_i, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$  de conjuntos medibles del espacio fásico resulta cumplida la igualdad

$$P(\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n) = P'(\xi'_0 \in \Gamma_0, \xi'_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi'_n \in \Gamma_n).$$

Esto significa que la cadena de Márkov en el sentido indicado se determina unívocamente mediante su probabilidad de paso y la distribución inicial.

8.1.5. Otra definición de la cadena de Márkov. Supongamos que en un espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  se han dado el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  y la cadena de Márkov  $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  definida en éste último. Supongamos también que la probabilidad de paso de esta cadena satisface las condiciones a)–c) del p. 8.1.4. Entonces, para cualesquiera  $k \geq 0$  y  $x \in X$ , en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^k$  generada por los elementos aleatorios  $\xi_h, \xi_{h+1}, \dots$  estén definidas las medidas probabilísticas  $P_{hx}$  tales que con la probabilidad 1 para  $A \in \mathfrak{F}^k$  se cumple  $P_k \xi_h(A) = P\{A/\mathfrak{F}^k\}$  (recordemos que  $\mathfrak{F}^k$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los elementos aleatorios  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ ). De este modo,  $P_{hx}(A)$ ,  $A \in \mathfrak{F}^k$ , fija la probabilidad condicional del suceso  $A$  a condición de que  $\xi_h = x$ . En particular, la probabilidad de paso de la cadena se determina en términos de las medidas  $P_{hx}$  según la fórmula

$$P(k, x, n, \Gamma) = P_{hx}(\xi_n \in \Gamma), \quad 0 \leq k < n, \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

A veces, por cadena de Márkov se entiende la siguiente totalidad de objetos:

1) el espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{F})$ ;

2) la sucesión  $\{\xi_n = \xi_n(\omega), n = 0, 1, 2, \dots\}$  de las aplicaciones, medibles para todo  $n$ , del espacio  $(\Omega, \mathfrak{F})$  en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ ;

3) la familia de las medidas probabilísticas  $P_{kx}$  ( $k$  son números enteros no negativos,  $x \in X$ ), dadas en las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}^k \subset \mathfrak{F}$ , si están cumplidas las siguientes condiciones:

- a) para  $k, n$  y  $\Gamma$  fijados,  $0 \leq k < n$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , la función  $P(k, x, n, \Gamma) = P_{kx}(\xi_n \in \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible;
- b)  $P_{kx}(\xi_k \in \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$ ;
- c) para cualesquiera  $x \in X$ ,  $0 \leq k < n$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se tiene

$$P_{kx}(\xi_{n+1} \in \Gamma / \mathfrak{F}_n) = P_{n\xi_n}(\xi_{n+1} \in \Gamma)$$

con la  $P_{kx}$ -probabilidad igual a 1.

Si la cadena de Márkov está dada en el sentido de esta definición, entonces al poner para cualquier medida probabilística  $\mu$ , dada en  $(X, \mathfrak{B})$ ,

$$P_\mu^{(k)}(A) = \int_X P_{kx}(A) \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{F}^k, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

obtendremos la sucesión  $\xi_k, \xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots$  de elementos aleatorios en  $(X, \mathfrak{B})$ , prefijada en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}^k, P_\mu^{(k)})$  que forma una cadena de Márkov en el sentido de la definición citada al principio del p. 8.1.

De este modo, la cadena de Márkov en el sentido de la última definición es toda una familia de cadenas de Márkov (en el sentido de la primera definición) que «tienen comienzo» en el momento de tiempo  $k$  en el punto  $x$ .

La función  $P(k, x, n, \Gamma)$ , definida en la condición a), se denomina probabilidad de paso de la cadena.

Dos cadenas de Márkov (en el sentido de la última definición) prefijadas en un mismo espacio fásico, se llaman equivalentes, si sus probabilidades de paso coinciden. Si, basándonos en las cadenas equivalentes, construimos las cadenas de Márkov en el sentido de la primera definición con la distribución inicial y el momento inicial iguales, éstas serán estocásticas equivalentes.

Observemos que según la función  $P(k, x, n, \Gamma)$ , que satisface las condiciones del teorema 2, siempre podemos construir una cadena de Márkov en el sentido de la última definición.

## 8.2. Cadenas homogéneas de Márkov

8.2.1. Definición de la cadena homogénea de Márkov. Sea dado el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Una cadena de Márkov  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso  $P(k, x, n, \Gamma)$  se llama homogénea, si  $P(k, x, n, \Gamma)$  es una función de  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n - k$ ,  $0 \leq k < n$ . Designemos con  $P(n, x, \Gamma)$ ,  $n > 0$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , una función para la cual

$$P(k, x, n, \Gamma) = P(n - k, x, \Gamma).$$

Cuando  $n = 0$ , será natural hacer  $P(0, x, \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$ . La función  $P(n, x, \Gamma)$  se denomina probabilidad de paso de la cadena homogé-

nea. De acuerdo con el p. 8.14, ella satisface las condiciones:

a) la función  $P(n, x, \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible para  $n$  y  $\Gamma$  fijados,  $n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma \in \mathfrak{B}$ ;

b) para  $n$  y  $x, n = 0, 1, 2, \dots, x \in X$  fijados, la función  $P(n, x, \Gamma)$  es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$ ;

c') para cualesquiera  $0 \leq k < m < n$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , con la probabilidad 1, se cumple la correlación

$$P(n-k, \xi_h, \Gamma) = \int_X P(n-m, y, \Gamma) P(m-k, \xi_h, dy).$$

En adelante supondremos en todo lugar que la probabilidad de paso de la cadena homogénea de Márkov satisface las condiciones a), b) y la condición siguiente, algo más fuerte que c'):

c) para cualesquiera  $m > 0, n > 0, x \in X$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  queda cumplida la correlación

$$P(m+n, x, \Gamma) = \int_X P(m, x, dy) P(n, y, \Gamma).$$

llamada ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Hagamos  $P(x, \Gamma) = P(1, x, \Gamma)$ . La función  $P(x, \Gamma)$  se llama probabilidad de paso por 1 paso. De la ecuación de Chapman—Kolmogórov se deduce que la probabilidad de paso por  $n$  pasos, esto es, la función  $P(n, x, \Gamma)$ , se expresa en términos de  $P(x, \Gamma)$  con ayuda de las correlaciones recurrentes

$$\begin{aligned} P(n+1, x, \Gamma) &= \int_X P(n, y, \Gamma) P(x, dy) = \\ &= \int_X P(y, \Gamma) P(n, x, dy), \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

Por eso, conociendo la distribución inicial  $\mu$  de la cadena homogénea (es decir, la medida  $\mu(\Gamma) = P(\xi_0 \in \Gamma)$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ ) y la probabilidad de paso por 1 paso, se puede, en principio, determinar la probabilidad de un suceso arbitrario relacionado con la evolución de la cadena en consideración, es decir, de un suceso arbitrario de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^0$  generada por los elementos  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$ . A saber, para los sucesos del tipo

$$\begin{aligned} A &= \{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\}, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}, \end{aligned}$$

tenemos

$$P(A) = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(x_0, dx_1) \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) P(x_{n-1}, \Gamma_n).$$

Como los sucesos del tipo indicado forman un álgebra, y  $\mathfrak{F}^0$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima generada por la primera, la probabilidad de un suceso arbitrario de  $\mathfrak{F}^0$  se restablece unívocamente según las probabilidades de toda clase de sucesos del tipo  $A$ .

De aquí se deduce que todas las cadenas homogéneas de Márkov en un mismo espacio fásico (quizás, en diferentes espacios probabilísti-



cos) cuyas distribuciones iniciales y probabilidades de paso por 1 paso coinciden, son estocásticas equivalentes. Esto significa que todas las probabilidades de los sucesos de tipo del suceso  $A$  para todas las cadenas de este género son las mismas.

La probabilidad de paso por 1 paso  $P(x, \Gamma)$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , satisface las siguientes condiciones:

A) para  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  fijado la función  $P(x, \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible respecto de  $x$ ;

B) para  $x \in X$  fijado la función es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$ .

Si en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  está dada una función  $P(x, \Gamma)$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , que satisface las condiciones A) y B), podemos construir una cadena homogénea de Márkov, para la cual esta función sería probabilidad de paso por 1 paso. Por supuesto, existe no una sola cadena con la probabilidad de paso por 1 paso dada. Sin embargo, todas ellas se diferencian una de la otra (con exactitud salvo la equivalencia estocástica) solamente por la distribución inicial.

8.2.2. Otra definición de la cadena homogénea de Márkov. Al estudiar las cadenas homogéneas de Márkov resulta cómodo no fijar la distribución inicial, sino que considerar una familia entera de cadenas homogéneas que «tienen comienzo» en un punto arbitrario no aleatorio de un espacio fásico. Sea  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  una cadena homogénea de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  dada en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ . Para todo  $x \in X$  se puede construir una familia de medidas  $P_x$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^0$  generada por los elementos aleatorios  $\xi_0, \xi_1, \dots$ , al prefijarlas en los sucesos del tipo  $A_n(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = \{\xi_0 \in \Gamma_0, \xi_1 \in \Gamma_1, \dots, \xi_n \in \Gamma_n\}$  mediante la fórmula

$$P_x(A_n(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n)) = \\ = \chi_{\Gamma_0}(x) \int_{\Gamma_1} P(x, dx_1) \dots \int_{\Gamma_{n-1}} P(x_{n-2}, dx_{n-1}) P(x_{n-1}, \Gamma_n),$$

y, a continuación, al prolongar  $P_x$  hasta la medida en  $\mathfrak{F}^0$ . Si  $A \in \mathfrak{F}^0$ , entonces, con la probabilidad 1,  $P_{\xi_0}(A) = P(A/\xi_0)$ . Por esto,  $P_x(A)$ ,  $A \in \mathfrak{F}^0$ ,  $x \in X$ , se interpretará, naturalmente, como una probabilidad condicional del suceso  $A$  a condición de que  $\xi_0 = x$ . Si  $\xi_0$  tiene la distribución  $\mu$ , la contracción de la medida  $P$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^0$  ( $\mathfrak{F}^0 \subset \mathfrak{F}$ ) coincide con la medida

$$P_\mu(A) = \int_X \mu(dx) P_x(A), \quad A \in \mathfrak{F}^0.$$

La familia de medidas  $\{P_x, x \in X\}$  construida en  $\mathfrak{F}^0$  posee las siguientes propiedades:

- 1) para  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n = 0, 1, 2, \dots$ , fijados la función  $P(n, x, \Gamma) = P_x(\xi_n \in \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible;
- 2)  $P_x(\xi_0 \in \Gamma) = \chi_\Gamma(x)$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ ;
- 3) para cualesquiera  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $n, m = 0, 1, 2, \dots$ , con la  $P_x$ -probabilidad 1, se cumple la correlación

$$P_x(\xi_{n+m} \in \Gamma) = P_{\xi_n}(\xi_m \in \Gamma).$$

Aquí,  $\mathfrak{F}_n$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima, respecto a la cual son medibles los elementos  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ .

A veces, por cadena homogénea de Márkov se entiende una totalidad de objetos:

a) la sucesión  $\{\xi_n = \xi_n(\omega), n = 0, 1, 2, \dots\}$  de las aplicaciones medibles del espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{F})$  en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ ;

b) la familia de las medidas probabilísticas  $\{P_x, x \in X\}$ , dadas en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^0$  generada por los elementos aleatorios  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots$  siempre que están cumplidas las condiciones 1) —3).

Con tal definición la cadena homogénea de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  se designará por  $(\xi_n, P_x)$ . De hecho, ésta es una familia entera de cadenas homogéneas de Márkov tal como se entiende en la definición original. Con objeto de obtener una cadena homogénea de Márkov con la distribución inicial fijada  $\mu$ , es necesario considerar la sucesión  $(\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots)$  en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}^0, P_\mu)$ , donde

$$P_\mu(A) = \int_X \mu(dx) P_{x_1}(A), \quad A \in \mathfrak{F}^0.$$

Dos cadenas homogéneas de Márkov,  $(\xi_n, P_x)$  y  $(\xi'_n, P'_x)$ , en el mismo espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  (quizás, en diferentes espacios probabilísticos) son equivalentes, si para todos los  $x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P_x(\xi_1 \in \Gamma) = P'_x(\xi'_1 \in \Gamma).$$

Si construimos, según las cadenas equivalentes de Márkov, unas cadenas de Márkov en el sentido de la definición original con una misma distribución inicial, ellas serán estocásticas equivalentes.

Hemos de notar que según la función  $P(x, \Gamma)$ , que satisfaco las condiciones A) y B) del p. 8.2.1, siempre podemos construir la cadena de Márkov  $(\xi_n, P_x)$ , para la cual  $P_x(\xi_1 \in \Gamma) = P(x, \Gamma)$ . Con ello, esta cadena es la única con exactitud salvo la equivalencia.

8.2.3. Corolarios de la propiedad de Márkov. Sea  $(\xi_n, P_x)$  una cadena homogénea de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  en el sentido de la definición dada en el p. 8.2.2. Definiremos en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}^0$ , generada por los elementos aleatorios  $\xi_0, \xi_1, \dots$ , una familia de los operadores  $\theta_k, k = 0, 1, 2, \dots$ , que aplican  $\mathfrak{F}^0$  en  $\mathfrak{F}^0$  de la manera siguiente. Para los sucesos del tipo  $(\xi_n \in \Gamma), n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma \in \mathfrak{B}$ , hagamos

$$\theta_k(\xi_n \in \Gamma) = (\xi_{n+k} \in \Gamma).$$

Exigiremos, además, que los operadores  $\theta_k$  conserven todas las operaciones teóricas de multiplicación, es decir, que para todos los  $A_j \in \mathfrak{F}^0$  se cumplan las correlaciones

$$\theta_k(\bigcup_j A_j) = \bigcup_j \theta_k A_j, \quad \theta_k(\bigcap_j A_j) = \bigcap_j \theta_k A_j,$$

$$\theta_k(A_j \setminus A_l) = \theta_k A_j \setminus \theta_k A_l.$$

De este modo los operadores  $\theta_k$  quedan definidos.

Si  $A \in \mathfrak{F}^0$ , entonces  $\theta_k A \in \mathfrak{F}^k$ , donde  $\mathfrak{F}^k$  es la  $\sigma$ -álgebra, generada por los elementos  $\xi_k, \xi_{k+1}, \dots$ . De las propiedades que caracterizan las cadenas de Márkov y de la homogeneidad se deduce que para todos los  $A \in \mathfrak{F}^0, x \in X, k = 0, 1, 2, \dots$  con la  $P_x$ -probabili-

dad 1 se cumple

$$P_x \{ \theta_k A / \mathfrak{F}_k \} = P_{\xi_k} (A), \quad (2.1)$$

donde  $\mathfrak{F}_k$  es la  $\sigma$ -álgebra generada por los elementos  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$ . Hablando de modo más general decimos que si  $B \in \mathfrak{F}_k$ ,  $A \in \mathfrak{F}^0$ , entonces para todos los  $x \in X$  queda cumplida la igualdad

$$P_x (B \cap \theta_k A) = \int_B P_{\xi_k} (A) P_x (d\omega). \quad (2.2)$$

Los operadores  $\theta_k$  pueden ser aplicados también a las magnitudes aleatorias. Para  $\xi$ , que es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}^0$ -medible, hagamos  $\eta = \theta_k \xi$ , si para todos los  $a$  reales

$$\theta_k \{ \xi = a \} = \{ \eta = a \}.$$

Si  $\xi$  es  $\mathfrak{F}^0$ -medible,  $\theta_k \xi$  será también  $\mathfrak{F}^k$ -medible. De las igualdades (2.1) y (2.2) se desprenden las correlaciones

$$M_x \{ \theta_k \xi / \mathfrak{F}_k \} = M_{\xi_k} \xi;$$

$$M_x \{ \eta \theta_k \xi \} = M_x \{ \eta M_{\xi_k} \xi \},$$

donde  $\xi$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}^0$ -medible,  $\eta$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}_k$ -medible,  $M_x$  es el signo de la esperanza matemática según la medida  $P_x$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . La primera de estas igualdades se cumple con la  $P_x$ -probabilidad 1, cuando sugerimos la exigencia natural de la sumabilidad de la magnitud  $\xi$  según la medida  $P_x$ . Para que se cumpla la segunda igualdad es suficiente exigir que las magnitudes  $\xi$  y  $\eta \theta_k \xi$  sean  $P_x$ -sumables.

Si  $\xi$  y  $\eta$  son no negativas, las dos igualdades son válidas sin restricciones complementarias.

**8.2.4. Propiedad rigurosa de Márkov.** Sea  $(\xi_n, P_x)$  una cadena homogénea de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{F})$ . Si  $\xi_n$  se interpreta como la posición de una partícula en movimiento en el momento de tiempo  $n$ , entonces la fórmula (2.1) nos muestra que en todo momento fijado de tiempo el movimiento comienza desde el principio.

Resulta que tal propiedad la poseen también algunos otros momentos de tiempo. Supongamos, como antes, que  $\mathfrak{F}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , significa la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos generada por los elementos  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k$  y  $\mathfrak{F}^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos generada por los elementos aleatorios  $\xi_k, \xi_{k+1}, \dots$ . Una magnitud aleatoria no negativa de valor entero  $\tau$ , que es, en el caso general, impropia (es decir, para ciertos  $\omega$  resulta posible que  $\tau(\omega) = \infty + \infty$ ), se denomina momento de Márkov, si para cualquier  $n = 0, 1, 2, \dots$  el suceso  $\{ \tau \leq n \}$  es  $\mathfrak{F}_n$ -medible. Quiero decir que con el fin de saber, si se ha realizado o no el suceso  $\{ \tau \leq n \}$ , hace falta «observar» la evolución de la cadena sólo hasta el momento de tiempo  $n$  inclusive. Ha de notarse que el requisito  $\{ \tau \leq n \} \in \mathfrak{F}_n$  para todo  $n$  es equivalente a la exigencia de que para cualquier  $n$  sea  $\{ \tau > n \} \in \mathfrak{F}_n$ , o a la exigencia de que para toda  $\mathfrak{F}_n$  sea  $\{ \tau = n \} \in \mathfrak{F}_n$ .

Sea  $\tau$  un momento de Márkov para la cadena homogénea de Márkov  $(\xi_n, P_x)$ . Designemos con  $\mathfrak{F}_\tau$  la totalidad de todos los sucesos  $A \in \mathfrak{F}^0$ , para los cuales  $A \cap \{ \tau \leq n \} \in \mathfrak{F}_n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$  cualquiera. En este caso  $\mathfrak{F}_\tau$  es la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos. La  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_\tau$  está compuesta de aquellos sucesos, para los cuales podemos saber,

si se han realizado o no, al observar la evolución de la cadena sólo hasta el momento aleatorio de tiempo  $\tau$ .

Como el ejemplo más simple de momento de Márkov  $\tau$  puede servir el momento de tiempo fijado (no aleatorio)  $n$ . Para este momento  $\mathfrak{F}_\tau$  coincide con  $\mathfrak{F}_n$ .

Otro ejemplo lo representan los momentos de la primera llegada a ciertos conjuntos. Sea  $\Gamma$  cierto conjunto medible de un espacio fásico. Hagamos  $\tau = \inf \{k : \xi_k \in \Gamma\}$ , con la particularidad de que si para  $\omega$  dado  $\xi_n(\omega) \in \Gamma$  con cualquier  $k = 0, 1, 2, \dots$ , suponemos, entonces,  $\tau(\omega) = +\infty$ . En este caso  $\tau$  es un momento de Márkov y se denomina momento de la primera llegada al conjunto  $\Gamma$ .

Observemos que si  $\tau$  es un momento de Márkov para la cadena homogénea de Márkov  $(\xi_n, P_x)$ , entonces la magnitud  $\tau$  es  $\mathfrak{F}_\tau$ -medible. Si, además,  $\tau < +\infty$  casi por cierto respecto de  $P_x$  para todo  $x \in X$ , entonces el elemento aleatorio  $\xi_\tau$  es también  $\mathfrak{F}_\tau$ -medible. Aquí,  $\xi_\tau = \xi_{\tau(\omega)}(\omega) = \xi_n(\omega)$  para  $\omega \in \{\tau = n\}$ .

Toda cadena homogénea de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  posee en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  la siguiente propiedad rigurosa de Márkov:

para todo momento de Márkov  $\tau$  y cualesquiera  $n \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$  enteros se cumple la correlación

$$P_x \{ \xi_{n+\tau} \in \Gamma / \mathfrak{F}_\tau \} = P(n, \xi_\tau, \Gamma)$$

casi por cierto respecto de la medida  $P_x$  en el conjunto  $\{\tau < +\infty\}$ . Aquí,  $P(n, x, \Gamma)$  es la probabilidad de paso de la cadena por  $n$  pasos, es decir,  $P(n, x, \Gamma) = P_x \{ \xi_n \in \Gamma \}$ .

La propiedad rigurosa de Márkov muestra que, siendo fijado el estado de  $\xi_\tau$  en el momento de Márkov  $\tau$ , la sucesión  $\{\xi_{n+\tau}, n = 0, 1, \dots\}$  representa en sí una cadena homogénea de Márkov con el estado inicial  $\xi_\tau$  cuyas probabilidades de paso son iguales a las de la cadena de partida y que no dependen de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_\tau$ . En otras palabras, si  $\tau$  es el momento de Márkov para la cadena  $(\xi_k, P_x)$  y  $\tau < +\infty$ , entonces la partícula que se halla en el momento de tiempo  $n$  en el estado  $\xi_n$  empieza a moverse de nuevo en el momento de tiempo  $\tau$ .

Sea dada la cadena homogénea de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  y sea  $\tau$  un momento de Márkov. Hagamos para todo  $A \in \mathfrak{B}^0$

$$\theta_\tau A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\tau = n\} \cap \theta_n A$$

y para toda magnitud aleatoria  $\xi_\tau$ -medible

$$\theta_\tau \xi = \theta_n \xi(\omega),$$

si  $\tau(\omega) = n$ . Entonces:

a) para todo  $A \in \mathfrak{B}^0$  y  $x \in X$

$$P_x \{ \theta_\tau A / \mathfrak{F}_\tau \} = P_{\xi_\tau}(A)$$

casi por cierto respecto de  $P_x$  en el conjunto  $\{\tau < +\infty\}$ ;

b) para cualesquiera  $A \in \mathfrak{B}^0, B \in \mathfrak{F}_\tau$  y  $x \in X$

$$P_x \{ B \cap \theta_\tau A \} = \int_B P_{\xi_\tau}(A) P_x(d\omega);$$

c) si  $\eta$  es una magnitud aleatoria  $P_x$ -sumable y  $\mathfrak{F}$ -medible, entonces

$$M_x \{ \theta_\tau \eta / \mathfrak{F}_\tau \} = M_{z_\tau} \eta$$

casi por cierto respecto de  $P_x$  en el conjunto  $\{ \tau < +\infty \}$ ;

d) si  $\eta$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}^0$ -medible, y  $\zeta$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}_\tau$ -medible, entonces para todo  $x \in X$

$$M_x \{ \zeta \theta_\tau \eta \} = M_x \{ \zeta M_{z_\tau} \eta \}$$

bajo el supuesto de que las magnitudes  $\eta$  y  $\zeta \theta_\tau \eta$  son sumables según la medida  $P_x$ ,  $x \in X$ .

Si  $\eta$  y  $\zeta$  son no negativas, c) y d) se cumplen sin restricciones complementarias.

**8.2.5. Operadores relacionados con la cadena de Márkov.** Sea  $(\xi_n, P_x)$  una cadena homogénea de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso por 1 paso  $P(x, \Gamma)$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . Designemos mediante  $\mathfrak{A}$  el espacio de Banach de todas las funciones numérico-aditivas reales de una variación (de cargas) acotada, definidas en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  con la norma igual a la variación de la carga, y mediante  $\mathfrak{M}$ , el espacio de Banach de todas las funciones reales  $\mathfrak{B}$ -medibles definidas en  $X$  con la norma igual al supremo del módulo de la función. El núcleo  $P(x, \Gamma)$  genera los operadores en los espacios  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{M}$  que actúan de acuerdo con las fórmulas

$$\begin{aligned} \varphi P(\Gamma) &= \int_X P(x, \Gamma) \varphi(dx), \quad \varphi \in \mathfrak{A}, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}; \\ Pf(x) &= \int_X f(y) P(x, dy), \quad f \in \mathfrak{M}, \quad x \in X. \end{aligned}$$

Estos dos operadores son lineales, continuos y tienen normas no superiores a la unidad. Son, además, positivos en el sentido de que  $\mu P \geq 0$  para  $\mu \geq 0$  y  $Pf \geq 0$  para  $f \geq 0$ . Para  $\varphi \in \mathfrak{A}$  y  $f \in \mathfrak{M}$ , hagamos

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_X f(x) \varphi(dx).$$

En este caso para todas las  $\varphi \in \mathfrak{A}$  y  $f \in \mathfrak{M}$  se tiene  $\langle \varphi P, f \rangle = \langle \varphi, Pf \rangle$ .

Designemos por  $P^n$  el  $n$ -ésimo grado del operador  $P$ . De la ecuación de Chapman-Kolmogórov se deducen las correlaciones:

$$P^n f(x) = \int_X f(y) P^n(x, dy) = M_x f(\xi_n), \quad n=1, 2, \dots, x \in X, f \in \mathfrak{M}$$

$$\begin{aligned} \varphi P^n(\Gamma) &= \int_X P^n(x, \Gamma) \varphi(dx) = \\ &= \int_X \varphi(dx) P_x(\xi_n \in \Gamma), \quad n=1, 2, \dots, \Gamma \in \mathfrak{B}, \quad \varphi \in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\varphi P^n, f) &= (\varphi, P^n f) = \int_X \varphi(dx) \int_X P(n, x, dy) f(y) = \\
 &= \int_X \varphi(dx) M_x f(\xi_n).
 \end{aligned}$$

Cuando  $n = 0$ , es natural considerar que  $P^0 = I$ , donde  $I$  es un operador idéntico.

Está claro que el operador  $P$  puede aplicarse, además, a las funciones  $\mathfrak{B}$ -medibles no acotadas, así como también a las cargas de una variación no acotada, con tal de que tengan sentido las integrales que definen este operador.

La función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x)$ ,  $x \in X$ , se denomina superarmónica (subarmónica), si para todo  $x \in X$  se verifica  $Pf(x) \leq f(x)$  ( $Pf(x) \geq f(x)$ ). Si para todo  $x \in X$  tiene lugar la igualdad  $f(x) = Pf(x)$ , entonces  $f(x)$  se llama armónica. Una función superarmónica no negativa se llama excesiva.

La carga  $\varphi$  (de una variación no acotada, en el caso general) se denomina invariante, si  $\varphi P = \varphi$ . Una medida invariante finita  $\mu$  (es decir, la carga invariante no negativa de una variación acotada) se denomina estacionaria. Una medida estacionaria siempre puede ser normada y considerada probabilística. Si para la cadena dada  $(\xi_n, P_n)$  existe una medida estacionaria  $\mu$ , entonces, al tomar la medida a título de distribución inicial, es decir, al poner  $P\{\xi_0 \in \Gamma\} = \mu(\Gamma)$ , tendremos

$$\begin{aligned}
 P_\mu\{\xi_n \in \Gamma\} &= \int_X \mu(dx) P_x\{\xi_n \in \Gamma\} = \mu P^n(\Gamma) = \\
 &= \mu(\Gamma), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \Gamma \in \mathfrak{B}.
 \end{aligned}$$

Quiere decir que la distribución del elemento  $\xi_n$  según la medida  $P_\mu$  no varía con el tiempo. Más aún, para  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ ,  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k \in \mathfrak{B}$ ,  $r > 0$  tenemos

$$\begin{aligned}
 P_\mu\{\xi_{n_1+r} \in \Gamma_1, \xi_{n_2+r} \in \Gamma_2, \dots, \xi_{n_k+r} \in \Gamma_k\} &= \\
 &= \int_X \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(n_1+r, x_0, dx_1) \int_{\Gamma_2} P(n_2-n_1, x_1, dx_2) \dots \\
 \dots \int_{\Gamma_k} P(n_k-n_{k-1}, x_{k-1}, dx_k) &= \int_X \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(n_1, x_0, dx_1) \times \\
 \times \int_{\Gamma_2} P(n_2-n_1, x_1, dx_2) \dots \int_{\Gamma_k} P(n_k-n_{k-1}, x_{k-1}, dx_k) &= \\
 &= P_\mu\{\xi_{n_1} \in \Gamma_1, \xi_{n_2} \in \Gamma_2, \dots, \xi_{n_k} \in \Gamma_k\}, \quad k = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Esto significa que una sucesión  $\{\xi_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$ , definida en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}^0, P_\mu)$ , es una sucesión estacionaria.

Así pues, si para la cadena dada existe una medida estacionaria, entonces, al tomar ésta última a título de distribución inicial, obtenemos una cadena estacionaria de Márkov.

Determinemos el operador  $G = \sum_{n=1}^{\infty} P^n$ . Se llama potencial de la cadena. Es evidente que este operador no es aplicable a cualquier función  $\mathfrak{B}$ -medible (por ejemplo, para  $f(x) \equiv 1$ ,  $Gf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x) \equiv +\infty$ ). En particular, puede resultar que el dominio de su definición conste de una sola función  $f(x) \equiv 0$ .

Para  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  pongamos

$$G(x, \Gamma) = G\chi_{\Gamma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n \chi_{\Gamma}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, x, \Gamma).$$

Cuando  $x \in X$  es fijado,  $G(x, \cdot)$  es una medida en  $\mathfrak{B}$  y, quizás, es idénticamente igual al infinito. La función  $G(x, \Gamma)$  se denomina núcleo del potencial. Si para cierta función  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x)$ ,  $x \in \bar{X}$ , se tiene que  $G|f|(x) < \infty$ , entonces

$$Gf(x) = \int_{\bar{X}} f(y) G(x, dy).$$

El núcleo de un potencial posee un sencillo significado probabilístico. Puesto que  $P(n, x, \Gamma) = M_x \chi_{\Gamma}(\xi_n)$ , entonces

$$G(x, \Gamma) = M_x \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\Gamma}(\xi_n),$$

donde  $G(x, \Gamma)$  es el número medio de los momentos de tiempo, cuando el sistema se encontraba en los estados del conjunto  $\Gamma$  a condición de que en el momento inicial se encontraba en el estado  $x$ .

Supongamos que  $f(x) \geq 0$  y  $\varphi(x) = Gf(x) < +\infty$ ,  $x \in X$ . Entonces  $(P - I)\varphi = -f$ , donde  $I$  es un operador idéntico. La última igualdad significa que el operador  $G$  es en cierto sentido inverso al operador  $I - P$ . De esta igualdad se deduce también que el potencial de una función no negativa es excesivo. Y viceversa, si  $f(x)$ ,  $x \in X$ , es una función excesiva, entonces  $f(x) = G\varphi(x) + h(x)$ , donde  $\varphi(x) \geq 0$  y  $h(x)$  es una función armónica, es decir,  $h = Ph$ . Esta afirmación es el análogo del conocido teorema de Riesz de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

**EJEMPLO 1** Supongamos que  $X$  es un retículo de valores enteros en una recta y  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de todos los subconjuntos de  $X$ . Supongamos también que se ha dado una sucesión  $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$  de magnitudes aleatorias independientes o igualmente distribuidas que tienen sus valores en  $X$ . Si  $\eta_0$  es una magnitud aleatoria de valores enteros no dependiente de la sucesión  $\{\eta_n, n \geq 1\}$ , entonces la sucesión  $\{\xi_n = \eta_0 + \eta_1 + \dots + \eta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  forma una cadena homogénea de Márkov (una fluctuación aleatoria por el retículo de valores enteros). Hagamos

$$\varphi(\theta) = M_x e^{i\theta \eta_1}, \quad \theta \in R^1.$$

Para la probabilidad de paso por  $n$  pasos tenemos la fórmula

$$P(n, x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(y-x)} \varphi^n(\theta) d\theta, \quad n=0, 1, 2, \dots, x, y \in X.$$

Observemos que como la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  consta de todos los subconjuntos de  $X$ , será suficiente conocer  $P(n, x, y)$  para todos los  $x, y \in X$ , ya que para  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  tenemos

$$P(n, x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} P(n, x, y).$$

Supongamos ahora que  $\varphi(\theta)$  se reduce a la unidad solamente en los puntos múltiplos de  $2\pi$  y que existe la esperanza matemática de la magnitud  $\eta_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  con la particularidad de que  $a = M\eta_k \neq 0$ . En este caso para el núcleo del potencial resulta ser válida la fórmula

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(n, x, y) = \frac{1}{2|a|} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta(x-y)}}{1-\varphi(\theta)} d\theta = \\ &= \frac{1}{2|a|} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\varphi_c(\theta)) \cos \theta(x-y) - \varphi_s(\theta) \sin \theta(x-y)}{|1-\varphi(\theta)|^2} \times \\ &\qquad \qquad \qquad \times d\theta, \quad x, y \in X, \end{aligned}$$

donde  $\varphi_c(\theta) = \operatorname{Re} \varphi(\theta)$ ,  $\varphi_s(\theta) = \operatorname{Im} \varphi(\theta)$ . En particular, si las magnitudes  $\eta_k$ ,  $k=1, 2, \dots$  toman solamente dos valores,  $+1$  y  $-1$ , con las probabilidades  $p$  y  $q$ , respectivamente,  $p+q=1$ ,  $p-q=a > 0$ , entonces

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{cuando } y \geq x, \\ \frac{1}{a} \left( \frac{1-a}{1+a} \right)^{x-y} & \text{cuando } y \leq x. \end{cases}$$

**8.2.6. Representación probabilística de la solución del problema de Dirichlet.** Sea  $P(x, \Gamma)$  la probabilidad de paso por 1 paso de cierta cadena homogénea de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ . Una función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x)$ , definida en  $X$ , se llamará armónica en el conjunto  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , si para todos los  $x \in \Gamma$  queda cumplida la igualdad  $f(x) = Pf(x)$ .

El problema que viene abajo es análogo al problema de Dirichlet de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Supongamos que se tienen un conjunto  $D \in \mathfrak{B}$  y una función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $g(x)$  definida en el conjunto  $X \setminus D$ . Hállese una función  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x)$  tal que en el conjunto  $D$  sea armónica, mientras que fuera de  $D$  coincida con la función dada  $g(x)$ .

No será difícil escribir la solución de este problema en términos probabilísticos. Sea  $\tau$  el momento de la primera caída en el conjunto  $X \setminus D$  para una cadena de Márkov con la probabilidad de paso por 1 paso  $P(x, \Gamma) : \tau = \inf \{n : n \geq 0, \xi_n \notin D\}$ , con la particularidad



de que si para cierto  $\omega \xi_n(\omega) \in D$  con cualquier  $n = 0, 1, 2, \dots$ , se supone que  $\tau(\omega) = +\infty$ . Para todos los  $x \in X$  hacemos  $f(x) = M_x g(\xi_\tau)$ . Con ello, si  $\tau = +\infty$ , convenimos en considerar que  $g(\xi_\tau) = 0$ . Es fácil de ver que para  $x \in D$ ,  $f(x) = g(x)$ . Tampoco es difícil de comprobar que  $f(x)$  es armónica en el conjunto  $D$ .

En el caso general la solución de tal problema no es única.

**8.2.7. Funcionales de la cadena de Márkov.** Sea  $(\xi_n, P_x)$  una cadena homogénea de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$ . Para la función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $v(x)$ ,  $x \in X$ , ponemos

$$\eta_n = \sum_{k=0}^n v(\xi_k).$$

Una magnitud aleatoria  $\eta_n$  representa en sí la funcional de la cadena de Márkov  $(\xi_n, P_x)$ . Esto significa que  $\eta_n$  es  $\mathfrak{F}_n$ -medible.

La distribución de la magnitud  $\eta_n$  se considera definida, si se conoce la función

$$u_n(x, \Gamma; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} M_x (e^{i\lambda \eta_n} / \xi_n \in \Gamma) P(n, x, \Gamma) \theta^n,$$

donde  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ ;  $\theta$  y  $\lambda$  son números reales, con la particularidad de que  $0 \leq \theta < 1$ .

Se puede demostrar que la función  $u_0$  es la única solución de dos ecuaciones integrales:

$$u_0(x, \Gamma; \lambda) = P_0(x, \Gamma) + \int_X (1 - e^{-i\lambda v(y)}) u_0(y, \Gamma; \lambda) P_0(x, dy);$$

$$u_0(x, \Gamma; \lambda) = P_0(x, \Gamma) + \int_X (1 - e^{i\lambda v(y)}) P_0(y, \Gamma) u_0(x, dy; \lambda),$$

donde se ha puesto

$$P_0(x, \Gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n P(n, x, \Gamma), \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B} \quad 0 \leq \theta < 1.$$

Tales ecuaciones pueden ser útiles al estudiar el comportamiento límite de las magnitudes  $\eta_n$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ . En particular, puede resultar que

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} v(\xi_n) < \infty.$$

Sorá así, cuando, por ejemplo,

$$\int_X |v(y)| G(x, dy) < \infty,$$

Aquí,  $G(x, \Gamma)$  es el núcleo del potencial de la cadena. En este caso, al poner

$$u(x; \lambda) = M_x e^{i\lambda \eta},$$

obtendremos una ecuación integral para la función  $u(x; \lambda)$ :

$$u(x; \lambda) = e^{i\lambda v(x)} \int_X P(x, dy) u(y; \lambda);$$

$$u(x; \lambda) = 1 + \int_X (1 - e^{-i\lambda v(y)}) u(y; \lambda) G(x, dy), \quad (2.3)$$

donde  $P(x, \Gamma)$  es la probabilidad de paso por 1 paso.

REEMPLAZO 2. Supongamos que  $X$  es numerable y sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de todos los subconjuntos de  $X$ . Hagamos para cierto  $y_0 \in X$

$$v(y) = \begin{cases} 1, & \text{cuando } y = y_0; \\ 0, & \text{cuando } y \neq y_0. \end{cases}$$

Entonces, la magnitud  $\eta_{y_0} = \sum_{n=0}^{\infty} v(\xi_n)$  es el número de aquellos momentos de tiempo, cuando la cadena se encuentra en el estado  $y_0$  en el transcurso de tiempo de 0 hasta  $+\infty$ . Bajo el supuesto de que  $G(y_0, y_0) < \infty$ , la ecuación (2.3) adquiere la forma

$$u(x; \lambda) = 1 + (1 - e^{-i\lambda}) u(y_0; \lambda) G(x, y_0).$$

De esta ecuación hallamos

$$u(x; \lambda) = 1 - \frac{c}{d} + \frac{c}{d} \frac{1}{1 - d(1 - e^{-i\lambda})},$$

donde  $c = G(x, y_0)$ ,  $d = G(y_0, y_0)$ ,  $c \leq d$ . De aquí

$$P_x\{\eta_{y_0} = 0\} = 1 - \frac{c}{d};$$

$$P_x\{\eta_{y_0} = n\} = \frac{c}{d} \frac{(d-1)^{n-1}}{d^n}, \quad n = 1, 2, \dots, x \in X,$$

es decir, la magnitud  $\eta_{y_0}$  está distribuida según una ley geométrica y en este caso  $M_x \eta_{y_0} = G(x, y_0)$ .

8.2.8. Teoremas del límite para las cadenas de Márkov. Sea dada una cadena homogénea de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ .

Un problema de importancia consiste en el estudio del comportamiento límite de las probabilidades  $P(n, x, \Gamma)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . En el punto 8.3 este problema será considerado detalladamente para el caso en el que el conjunto  $X$  sea numerable o finito. Aquí se aducen los resultados principales para el caso general, cuando se cumple la así llamada condición de Döblin, que en lo sucesivo se denominará condición (D). He aquí su enunciacón.

Condición (D). Existen en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  una medida finita  $\varphi$  ( $\varphi(X) > 0$ ), un número entero  $k_0 \geq 1$  y un número positivo  $\varepsilon$  tales que para todos los  $x \in X$  y cualquier  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  para el cual  $\varphi(\Gamma) < \varepsilon$ , queda cumplida la desigualdad

$$P(k_0, x, \Gamma) < 1 - \varepsilon.$$

Aduzcamos algunos ejemplos de las cadenas de Márkov que satisfacen la condición (D).

a) Para la cadena de Márkov con un conjunto finito de estados, al hacer  $\varphi(\Gamma)$  igual al número de puntos en el conjunto  $\Gamma$ , tendremos  $\Gamma = \emptyset$ , siempre que  $\varphi(\Gamma) < 1$ . Así pues, para  $\varphi(\Gamma) < 1$ ,  $P(n, x, \Gamma) = 0$  y la condición (D) queda cumplida. De este modo, la condición (D) no impone ningunas restricciones sobre las cadenas finitas de Márkov.

Si el conjunto de estados es numerable, la condición (D) se considera cumplida, por ejemplo, en aquel caso cuando la serie  $\sum_{y \in X} P(x, y)$  converge uniformemente respecto de  $x \in X$ . Aquí,  $P(x, y)$  es la probabilidad de paso por 1 paso desde el estado  $x$  al estado  $y$ . Sin embargo, el requisito de que dicha serie converja uniformemente es mucho más fuerte que la condición (D).

b) Sean  $X$  un conjunto boreliano en  $R^m$  y  $\mathfrak{B}$ , una  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $X$ . Supongamos que existe una función boreliana de dos variables  $p(x, y)$ ,  $x, y \in X$ , tal que

$$P(x, \Gamma) = \int_{\Gamma} p(x, y) dy, \quad x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

Es evidente que debo ser  $p(x, y) \geq 0$  y

$$\int_X p(x, y) dy = 1.$$

En este caso la condición (D) queda cumplida, si, por ejemplo, mes  $X < \infty$  y la función  $p(x, y)$  es acotada o es uniformemente (con relación a  $x$ ) integrable respecto de  $y$ . No obstante, aquí también ambas condiciones son más fuertes que la condición (D), ya que de ellas se deduce que uniformemente con relación a  $x$   $P(x, \Gamma) \rightarrow 0$ , cuando mes  $\Gamma \rightarrow 0$ , mientras que la condición (D) sólo requiere que para mes  $\Gamma$  no grandes la función  $P(x, \Gamma)$  sea menor que la unidad uniformemente con relación a  $x$ .

El conjunto  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se denomina siguiente tras el estado  $x_0$ , si para todos los  $n = 1, 2, \dots$   $P(n, x_0, \Gamma) = 1$ . De la condición (D) se infiere que si el conjunto  $\Gamma$  es siguiente tras el estado  $x_0$ , entonces  $\varphi(\Gamma) > \varepsilon$ . Si el conjunto  $\Gamma$  es siguiente tras todo estado que entra en él, se denominará invariante. Un conjunto invariante que no contiene ningunos subconjuntos invariantes de la  $\varphi$ -medida inferior, se llama mínimo. Todo conjunto que sigue tras cierto estado contiene un conjunto invariante mínimo. Dos conjuntos invariantes mínimos o bien no se intersecan o bien difieren uno del otro sólo en el conjunto de la  $\varphi$ -medida 0.

Sean  $K^1, K^2, \dots, K^N$  tales conjuntos invariantes mínimos que  $K^i \cap K^j = \emptyset$  para  $i \neq j$ ,  $\varphi(K^j) > \varepsilon$  y supongamos que un conjunto invariante arbitrario se diferencia de cierto  $K^j$  sólo en el conjunto de la  $\varphi$ -medida 0. Evidentemente,  $1 \leq N \leq \frac{\varphi(x)}{\varepsilon}$ . Observemos que si en cierto momento de tiempo el sistema cae en el conjunto  $K^j$ , éste quedará en él para siempre. Más aún, resulta válida la siguiente afirmación.

**Teorema 1.** Si se cumple la condición (D), existen tales constantes  $C$  y  $\rho$ ,  $C > 0$ ,  $0 < \rho < 1$ , que

$$1 - P(n, x \bigcup_{j=1}^N K^j) \leq C\rho^n, \quad n=1, 2, \dots, x \in X.$$

De este teorema y del teorema de Borel — Cantelli se deduce que, cualquiera que sea el estado inicial del sistema, realizados un número finito de pasos, el sistema se encontrará con la probabilidad 1 en uno de los conjuntos  $K^j$ . Designemos mediante  $F^j(x)$  la probabilidad de que el sistema, al salir del estado  $x$ , alcance en algún momento el conjunto  $K^j$ :

$$F^j(x) = P_x \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z_n \in K^j\} \right).$$

Ya que, al caer en  $K^j$ , el sistema queda en él para siempre, entonces

$$F^j(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, K^j).$$

Si  $x \in K^j$ , se tiene  $F^j(x) = 1$ . Además, para todos los  $x \in X$

$$\sum_{j=1}^N F^j(x) = 1.$$

Ahora, del conjunto  $K$  se puede excluir tal subconjunto  $\bar{K}^j$ , perteneciente a él, de  $\mathfrak{F}$ -medida nula (quizás, vacío) que  $P(x, \bar{K}^j) = 0$  para todos los  $x \in K^j \setminus \bar{K}^j$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, \bar{K}^j) = 0$  uniformemente

respecto de  $x \in X$  y con ello, el conjunto  $K^j \setminus \bar{K}^j$  puede ser dividido en  $d_j$  ( $1 \leq d_j < \infty$ ) subconjuntos disjuntos  $K_i^j$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2, \dots, \dots, d_j - 1$ , para los cuales  $P(x, K_i^j) = 1$  con  $x \in K_{i-1}^j$ ,  $i = 1, 2, \dots, d_j$  (por  $K_{d_j}^j$  se entiende  $K_0^j$ ). Convergamos en considerar

que  $\bar{K}^j$  ya se ha excluido de  $K^j$ , de suerte que  $\bigcup_{i=0}^{d_j-1} K_i^j = K^j$ . Los conjun-

tos  $K^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$  se llaman clases ergódicas, y los  $K_i^j$ ,  $i = 0, 1, \dots, d_j - 1$ , subclases cíclicas de la clase  $K^j$ . Si, en cierto paso, el sistema llega a la clase  $K^j$ , entonces, cuando  $d_j > 1$ , en todos los momentos posteriores de tiempo se moverá cíclicamente por las subclases de esta clase. Si  $d_j = 1$ , la clase  $K^j$  se llama *aperiódica*.

Atribuyamos al conjunto  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  el nombre de conjunto de estados no reales, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, \Gamma) = 0$  para todos los  $x \in X$ .

Así pues, el conjunto de estados  $X$  de una cadena de Márkov, que satisface la condición (D), puede ser dividido en cierto número de clases ergódicas  $K^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , y en un conjunto de estados no

reales  $X \setminus \bigcup_{j=1}^N K^j$ . Además, toda clase ergódica puede dividirse en cierto número de subclases cíclicas.

Hagamos para  $x \in X$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i = 0, 1, \dots, d_j - 1$

$$F_i^j(x) = P_x \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_{nd_j} \in K_i^j) \right).$$

Si, para cierto  $n$ ,  $\xi_{nd_j} \in K_i^j$ , lo mismo será válido también para todos los  $k \geq n$ . De aquí

$$F_i^j(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(nd_j, x, K_i^j).$$

Es evidente que  $F_i^j(x) = 1$  para todos los  $x \in K_i^j$ . Y, además, para todos los  $x \in X$

$$\sum_{i=0}^{d_j-1} F_i^j(x) = F^j(x).$$

Enunciemos ahora el teorema principal del comportamiento límite de las probabilidades  $P(n, x, \mathcal{A})$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.** *Supongamos cumplida la condición (D). En este caso existe tal sistema de las medidas probabilísticas  $\pi_i^j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $i = 0, 1, \dots, d_j - 1$ , fijadas en  $\mathfrak{B}$ , que para todos los  $x \in X$ ,  $\Gamma \subset \bar{K}^j$  (por supuesto,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ )*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nd_j + m, x, \Gamma) = \sum_{r=0}^{d_j-1} F_r^j(x) \pi_{r+m}^j(\Gamma),$$

donde el índice  $r + m$  se considera en relación con el módulo  $d_j$ . Con ello, si  $\varphi(\Gamma \cap K_i^j) > 0$ ,  $\pi_i^j(K_i^j) = 1$  y  $\pi_i^j(\Gamma) > 0$ . La tendencia al límite en esta correlación es uniforme según  $x$  y  $\Gamma$ .

En particular, si  $x \in K_i^j$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(nd_j + m, x, \Gamma) = \pi_r^j(\Gamma)$  cuando  $r \equiv i + m \pmod{d_j}$ . (Hemos de notar que  $P(nd_j + m, x, \Gamma) = P(nd_j + m, x, \Gamma \cap K_i^j)$  para  $x \in K_i^j$  y  $r \equiv i + m \pmod{d_j}$ ).

De este teorema se deduce la convergencia de las medias según Cesaro. A saber, uniformemente respecto de  $x \in X$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(k, x, \Gamma) = \sum_{j=1}^N F^j(x) \pi^j(\Gamma),$$

donde

$$\pi^j(\Gamma) = \frac{1}{d_j} \sum_{i=0}^{d_j-1} \pi_i^j(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathfrak{B}$$

de modo que  $\pi^j$  es una medida probabilística en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$ , con la particularidad de que  $\pi^j(K^j) = 1$  y  $\pi^j(\Gamma) > 0$ , si  $\varphi(\Gamma \cap K^j) > 0$ .

Designemos

$$\mu_x(\Gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P(k, x, \Gamma) \quad (2.4)$$

Para cada  $x \in X$ , la función  $\mu_x$  es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$ , puesto que  $F^j(x) \geq 0$  y  $\sum_{j=1}^N F^j(x) = 1$ . Si  $x \in K^j$ , entonces  $\mu_x$  coincide con la medida  $\pi^j$ . Si  $\Gamma$  es un conjunto de estados no reales, entonces  $\mu_x(\Gamma) = 0$ .

**Teorema 3.** Al cumplirse la condición (D), para todo  $x \in X$  la medida  $\mu_x$  es estacionaria (véase el p. 8.2.5). Y, viceversa, toda distribución estacionaria puede escribirse en la forma  $\sum_{j=1}^N \rho_j \pi^j$ , donde los números  $\rho_j$  son no negativos y en la suma hacen la unidad.

**Corolarios.** 1) El límite en la correlación (2.4) no depende de  $x$ , cuando y sólo cuando, se tiene una sola clase ergódica. 2) El límite  $P(n, x, \Gamma)$  existe para  $n \rightarrow \infty$ , cuando y sólo cuando, ni una de las clases ergódicas no contiene subclases cíclicas, es decir,  $d_j = 1$  para todos los  $j$ .

Supongamos ahora que en  $X$  está dada una función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $v(x)$ . El teorema que sigue es análogo de la ley de los grandes números para la sucesión  $\{v(\xi_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$ .

**Teorema 4.** Si está cumplida la condición (D) y  $v(x), x \in X$ , es tal que

$$\int_{K^j} |v(y)| \pi^j(dy) < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

entonces para toda medida probabilística  $\mu$  en  $\mathfrak{B}$  con la  $P_\mu$ -probabilidad 1 existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^n v(\xi_h)$  y éste es igual a  $\int_{K^j} v(y) \times \pi^j(dy)$  para  $\xi_0(\omega) \in K^j$ , donde  $P_\mu(\cdot) = \int_X P_x(\cdot) \mu(dx)$ . En particular, si se tiene solamente una clase ergódica, es decir,  $N = 1$ , entonces

$$P_\mu \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^n v(\xi_h) = \int_X v(y) \pi(dy) \right\} = 1,$$

donde  $\pi$  es la única distribución estacionaria. (Observemos que  $\int_X v(y) \pi(dy) = M_\pi v(\xi_h)$ , donde  $M_\pi(\cdot)$  es la media en la medida  $P_\pi$ ).

El siguiente teorema describe las fluctuaciones de la magnitud  $\frac{1}{n} \sum_{h=0}^n v(\xi_h)$  alrededor del valor límite.

**Teorema 5.** Supongamos que para la cadena dada de Márkov se cumple la condición (D), existe solamente una clase ergódica y ésta es aperiódica. Designemos mediante  $\pi$  la única distribución estacionaria de la cadena. Sea dada una función real  $\mathfrak{B}$ -medible  $v(x)$ ,  $x \in X$ , para la cual con cierto  $\delta > 0$

$$\int_X |v(x)|^{2+\delta} \pi(dx) < \infty.$$

Entonces existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_\pi \left\{ \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (v(\xi_k) - M_\pi v(\xi_k)) \right]^2 \right\} = \sigma^2,$$

y si es que  $\sigma^2 > 0$ , entonces para cualquier distribución inicial  $\mu$  se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_\mu \left\{ \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (v(\xi_k) - M_\pi v(\xi_k)) < \alpha \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta \end{aligned}$$

uniformemente respecto de  $\alpha \in R^1$ .

### 8.3. Cadenas de Márkov con el conjunto discreto de estados

**8.3.1. Matrices de las probabilidades de paso.** Examinemos las cadenas homogéneas de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  bajo el supuesto de que  $X$  es numerable o finito y  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de todos los subconjuntos de  $X$ . Las cadenas de este tipo se determinan por las probabilidades de paso por 1 paso en los conjuntos de un punto  $P(x, y) = P_x(\xi_1 = y)$ ,  $x, y \in X$ , pues para  $\Gamma \subset X$  arbitrario tenemos  $P(x, \Gamma) = P_x(\{\xi_1 \in \Gamma\}) = \sum_{y \in \Gamma} P(x, y)$ . Los números  $P(x, y)$ ,

$x, y \in X$ , forman una matriz  $P$ , quizás infinita, en la  $x$ -ésima fila de la cual se encuentran las probabilidades de paso por 1 paso del estado  $x$  a los estados de toda clase  $y \in X$ , mientras que en la columna  $y$  se hallan las probabilidades de paso por 1 paso de toda clase de los estados  $x \in X$  al estado  $y$ . Los elementos de la matriz son no negativos y su suma a lo largo de una línea es igual a 1. Las matrices de este tipo se llaman estocásticas. Toda matriz estocástica determina una única, con la exactitud salvo la equivalencia, cadena homogénea de Márkov para la cual las probabilidades de paso por 1 paso coinciden con los elementos de dicha matriz.

Las probabilidades de paso por  $n$  pasos  $P(n, x, y)$  también forman una matriz estocástica y ésta es igual al  $n$ -ésimo grado de la matriz  $P$ , según se deduce de la ecuación de Chapman—Kolmogórov

$$P(n, x, y) = \sum_{z_1, \dots, z_{n-1} \in X} P(x, z_1) P(z_1, z_2) \dots P(z_{n-1}, y),$$

donde  $x, y \in X, n = 2, 3, \dots$ . Cuando  $n = 0$ , es natural considerar que la función  $P(0, x, y) = 1$  para  $x = y$  y  $P(0, x, y) = 0$  para  $x \neq y$ , de modo que las probabilidades de paso por  $0$  pasos forman la matriz unidad  $I$ .

Cuando  $X$  es finito, para las probabilidades de paso por  $n$  pasos es válida la siguiente fórmula:

$$P(n, x, y) = \sum_{h=1}^r \frac{1}{(m_h - 1)!} \frac{d^{m_h - 1}}{d\lambda^{m_h - 1}} \left[ \frac{\lambda^n M_{xy}(\lambda)}{\Psi_h(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_h}, \quad (3.1)$$

donde  $v = 0, 1, 2, \dots, x, y \in X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  son diferentes raíces de la ecuación  $\det(\lambda I - P) = 0, m_1, m_2, \dots, m_r$ , sus respectivas multiplicidades,  $M_{xy}(\lambda)$  es el complemento algebraico del elemento de la  $y$ -ésima fila y de la  $x$ -ésima columna de la matriz  $\lambda I - P$ ,

$\Psi_h(\lambda) = (\lambda - \lambda_h)^{-m_h} \det(\lambda I - P)$ .

**8.3.2. Clasificación de los estados.** El estado  $y \in X$  es accesible desde el estado  $x \in X$ , si para cierto  $n = 0, 1, 2, \dots P(n, x, y) > 0$ . Si  $y$  es accesible desde  $x$ , y  $x$  es accesible desde  $y$ , entonces los estados  $x$  e  $y$  se llaman comunicantes. De esta manera en el conjunto  $X$  se introduce una «relación» que posee las propiedades de simetría, reflexividad y transitividad. Por consiguiente, el conjunto  $X$  se puede dividir en las clases disjuntas de los estados comunicantes entre sí. Con ello, ningunos dos estados de las diferentes clases no se comunican, sin embargo, para los estados de la clase dada pueden ser accesibles los estados de las otras clases. En otras palabras, de un estado dado el sistema puede pasar con probabilidad positiva a cualquier otro estado de la misma clase. Además, la salida de la clase dada de estados es posible, pero el sistema ya no puede retornar a la clase de partida.

Una cadena de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  se llama irreducible, si todo par de estados  $x, y \in X$  son estados comunicantes. En otras palabras, todos los estados de la cadena irreducible forman una clase de estados comunicantes.

El estado  $x$  se denomina real, si todo estado accesible desde  $x$ , se comunica con  $x$ . De lo contrario, se llama no real. Para un estado no real  $x$  existe por lo menos un estado  $y$ , que es accesible desde  $x$ , pero  $x$  no es accesible desde  $y$ .

No es difícil convencerse de que desde un estado real son accesibles solamente estados reales. De aquí se deduce que en toda clase de estados comunicantes o bien todos los estados son reales, o bien todos son no reales.

En un conjunto de clases de estados comunicantes en las cuales se divide el espacio de todos los estados posibles de la cadena dada, puede introducirse un orden parcial con ayuda de la siguiente correlación. Se dice que una clase  $X_\beta$  sigue tras la clase  $X_\alpha$ , si por lo menos para un solo  $x \in X_\alpha$  existe tal  $y \in X_\beta$ , que  $y$  es accesible desde  $x$ . (De aquí se deduce, entre otras cosas, que desde cualquier estado  $x \in X_\alpha$  es accesible cualquier estado  $y \in X_\beta$ , siempre que  $X_\beta$  siga tras  $X_\alpha$ ). Tal relación entre las clases posee las propiedades de reflexividad y transitividad, pero carece de simetría, por lo que genera un orden parcial en el conjunto de clases. Es evidente que sólo las clases de estados reales (si existen) poseen la propiedad de que no son seguidas por ninguna otra clase. Si para la cadena dada el número de



clases de los estados comunicantes es finito, existe obligatoriamente aunque no sea más que una sola clase de estados reales. En el caso general puede ocurrir que no haya ni una sola clase de estados reales.

Si el estado inicial de una cadena se encuentra en alguna clase de estados reales, el sistema nunca saldrá de esta clase. Por esta razón, si todas las clases constan de estados reales, la cadena se descompone, de hecho, en varias cadenas correspondientes a cada una de estas clases.

**8.3.3. Periodicidad.** Designemos mediante  $d(x)$ ,  $x \in X$ , el máximo común divisor de aquellos números, para los cuales  $P(n, x, x) > 0$ . Si  $P(n, x, x) = 0$  para todos los  $n = 1, 2, \dots$ , consideraremos  $d(x) = \infty$ . Se puede mostrar que en toda clase de estados comunicantes  $d(x)$  es constante. El valor general  $d = d(x)$  para  $x$  de la clase dada se denomina período de esta clase. Una clase se llama aperiódica, si su período  $d = 1$ . Cuando  $d > 1$ , la clase es periódica. De conformidad con esto, una cadena irreducible se llama periódica o no periódica en función de si su período es mayor que la unidad o igual a ésta.

El teorema que sigue muestra cómo se realiza el movimiento en una clase periódica de estados comunicantes.

**Teorema 1.** Toda clase  $K$  de estados comunicantes de período  $d$  ( $d < \infty$ ) se puede dividir en  $d$  subconjuntos disjuntos de a dos  $K_0, K_1, \dots, K_{d-1}$  de tal modo que por un paso desde  $K_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, \dots, d-2$ , el sistema pueda pasar sólo a los estados del conjunto  $K_{i+1}$ , y desde  $K_{d-1}$ , sólo a los estados del conjunto  $K_0$ . Con ello, si  $x \in K_i$ ,  $y \in K_r$ , entonces existe tal  $n_0 = n_0(x, y)$  que para cualesquiera  $n > n_0$

$$P(nd + r - i, x, y) > 0.$$

En particular, para todos los  $n > n_0 = n_0(x, x)$  se tiene  $P(nd, x, x) > 0$ .

Los conjuntos  $K_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$ , se llaman subclases de la clase periódica de los estados comunicantes.

**EJEMPLO.** Sea  $X$  un retículo de valores enteros, en una recta y supongamos que el sistema se desplaza de tal manera que desde el estado  $x \in X$ , por un paso, son sólo posibles los pasos el estado  $x + 1$  con la probabilidad  $p$  y al estado  $x - 1$  con la probabilidad  $q$ ,  $p + q = 1$ ,  $p, q > 0$ . Tal cadena es irreducible y periódica de período 2. Las subclases  $K_0$  y  $K_1$  son, respectivamente, las totalidades de los números pares o impares.

**8.3.4. Reversibilidad.** Sea  $\tau_y$  el momento en que, pasado el cero, se alcanza por primera vez el estado  $y \in X$ , es decir,  $\tau_y = \inf \{n : n = 1, 2, \dots, \xi_n = y\}$ , con la particularidad de que en el caso cuando  $\xi_n \neq y$  para todos los  $n = 1, 2, \dots$  suponemos  $\tau_y = +\infty$ . Hagamos  $f(0, x, y) = 0$  y  $f(n, x, y) = P_x(\tau_y = n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x, y \in X$ . Designemos

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n, x, y) = P_x(\tau_y < \infty).$$

$F(x, y)$  es la probabilidad de que el sistema, al salir del estado  $x$ , llega en algún momento al estado  $y$ ; cuando  $x = y$ ,  $F(x, x)$  es la probabilidad de que el sistema, al salir del estado  $x$ , regresará en algún momento a este estado.

El estado  $x$  se llama reversible, si  $F(x, x) = 1$ , o irreversible, si  $F(x, x) < 1$ .

La ligazón entre las probabilidades de paso y las probabilidades de la primera llegada se da mediante la fórmula

$$P(n, x, y) = \sum_{k=0}^n f(k, x, y) P(n-k, y, y),$$

$$n=1, 2, \dots, x, y \in X.$$

Al suponer para  $\lambda \in [0, 1]$

$$P_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n P(n, x, y), \quad F_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n f(n, x, y),$$

de la fórmula antecedente obtenemos las correlaciones

$$P_\lambda(x, x) = \frac{1}{1 - F_\lambda(x, x)}, \quad P_\lambda(x, y) = F_\lambda(x, y) P_\lambda(y, y), \quad x \neq y.$$

Estas fórmulas conducen al siguiente resultado.

**Teorema 2.** *El estado  $x$  es reversible, cuando y sólo cuando,*

$$G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, x, x) = \infty,$$

*y es irreversible, cuando*

$$G(x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, x, x) < \infty.$$

*En el caso irreversible*

$$G(x, x) = \frac{1}{1 - F(x, x)}.$$

Se puede demostrar también que los estados comunicantes son reversibles o irreversibles a la vez, de modo que la propiedad de reversibilidad es propia para la clase de estados comunicantes.

El teorema que sigue proporciona el criterio de reversibilidad de una cadena irreducible de Márkov en términos de las funciones excesivas.

**Teorema 3.** *Una cadena irreducible de Márkov es reversible en aquel y sólo en aquel caso, cuando toda función excesiva es constante.*

Para precisar, si una cadena es irreducible y reversible, entonces la única función excesiva (con la exactitud salvo un factor constante no negativo) es una función idénticamente igual a la unidad. Esto significa que el sistema de desigualdades

$$\varphi(x) \geq \sum_{y \in X} P(x, y) \varphi(y), \quad x \in X,$$

no tiene soluciones no negativas que sean diferentes de las soluciones del tipo  $\varphi(x) = \text{const.}$

Y, viceversa, si una cadena (no forzosamente irreducible) tiene por lo menos un estado irreversible, siempre existe una función exce-

siva no constante, por ejemplo

$$\tau(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = x_0; \\ F(y, x_0), & \text{si } y \neq x_0, \end{cases}$$

donde  $x_0$  es un estado irreversible fijado.

8.3.5. Propiedades de los estados reversibles. Designemos mediante  $q(x, y)$ ,  $x, y \in X$ , la probabilidad de que el sistema, al salir del estado  $x$ , cae en el estado  $y$  un número infinito de veces. Aprovechando la propiedad rigurosa de Márkov de una cadena, se puede mostrar que  $q(x, y) = F(x, y)$ , siempre que el estado  $y$  sea reversible. En particular,  $q(y, y) = 1$  para todo estado reversible  $y$ . En otras palabras, la probabilidad de que el sistema esté un número infinito de veces en el estado reversible  $y$ , al salir de  $x$ , es igual a la probabilidad de que  $y$  sea accesible en algún momento de tiempo desde el estado  $x$ .

Más aún, si el estado  $x$  es reversible y  $F(x, y) > 0$ , entonces  $q(x, y) = 1$ , es decir, saliendo del estado reversible  $x$ , el sistema debe visitar el estado  $y$  accesible desde el estado  $x$ , un número infinito de veces. Con ello,  $F(x, y) > 0$ . En particular, si  $x$  es reversible e  $y$  es accesible desde  $x$ , entonces  $y$  es accesible desde  $x$  con la probabilidad 1 ( $F(x, y) = 1$ ).

Luego, si  $y$  es irreversible,  $q(x, y) = 0$  para todo  $x \in X$ , y, en particular,  $q(y, y) = 0$ . Esto significa que el sistema visita los estados irreversibles sólo un número finito de veces (por supuesto, lo último se deduce también del teorema 2).

Así pues, de los estados reversibles sólo son accesibles los estados reversibles. Los estados reversibles son reales.

8.3.6. Comportamiento límite de las probabilidades de paso.

Teorema 4. Para  $x, y \in X$  se verifica la correlación

$$F(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=1}^N P(n, x, y)}{\sum_{n=0}^N P(n, y, y)}.$$

De esta fórmula se deduce que para todos los  $x$  e  $y$ , pertenecientes a una

misma clase reversible,  $G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n, x, y) = +\infty$ . Si, en cambio,  $y$  es irreversible, entonces  $G(x, y)$  para cualquier  $x \in X$ .

Resultados más precisos se pueden obtener por la aplicación del teorema de regeneración. Designemos mediante  $\tau_y^k$  el momento en que, pasado el cero, se alcanza por vez primera el estado  $y$  (véase el p. 8.3.4). A continuación, pongamos

$$\tau_y^{k+1} = \inf \{n : n > \tau_y^k, \xi_n = y\}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

suponiendo  $\tau_y^{k+1} = +\infty$ , si  $\xi_n \neq y$  para todos los  $n > \tau_y^k$ . De la propiedad rigurosa de la cadena de Márkov se infiere que las magnitudes  $\tau_y^1, \tau_y^2 - \tau_y^1, \tau_y^3 - \tau_y^2, \dots$  son independientes e igualmente distribuidas en la medida  $P_y$ , siempre que  $y$  sea un estado reversible. Si el estado inicial es igual a  $x$ ,  $F(x, y) = 1$  e  $y$  es reversible, entonces respecto a la medida  $P_x$  todas estas magnitudes son independientes

entre sí y, a excepción de la primera, están igualmente distribuidas. Esta circunstancia nos permite aplicar el teorema de regeneración para estudiar el comportamiento límite de las probabilidades de paso  $P(n, x, y)$  para  $n \rightarrow \infty$ .

Designemos con  $m_y$  el número medio de pasos hasta el primer regreso al estado  $y$ , es decir,

$$m_y = \sum_{n=1}^{\infty} n f(n, y, y) = M_y \tau_y^1 \leq +\infty.$$

**Teorema 5.** a) Si el estado  $y$  es irreversible, entonces para todos los  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, y) = 0;$$

b) si  $x$  e  $y$  se hallan en diferentes clases de estados reales,  $P(n, x, y) = 0$  para todos los  $n$ ;

c) si  $x$  e  $y$  pertenecen a una misma clase de estados reales de período  $d$ , siendo  $x \in K_i$ ,  $y \in K_j$ , donde  $K_j$  son las subclases introducidas en el teorema 1, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nd+l, x, y) = \frac{d}{m_y}$$

a condición de que  $l \equiv r - i \pmod{d}$  y  $P(nd+l, x, y) = 0$ , a condición de que  $l \not\equiv r - i \pmod{d}$ ; en particular, si  $d = 1$ , es decir, si la clase es aperiódica, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, y) = \frac{1}{m_y}$ ;

d) si el estado  $x$  es no real, mientras que  $y$  pertenece a la clase de estados reales de período  $d$ , entonces para todos los  $r = 0, 1, 2, \dots, d-1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(nd+r, x, y) = F_r(x, y) \frac{d}{m_y},$$

donde

$$F_r(x, y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv r \pmod{d}}}^{\infty} f(n, x, y).$$

(Observemos que  $F_r(x, y) \geq 0$  y  $\sum_{r=0}^{d-1} F_r(x, y) = F(x, y) \leq 1$ . Es evidente, además, que  $F_r(x, y) = P_x\{\xi_n = y \text{ para cierto } n \equiv r \times \pmod{d}, n > 0\}$ ).

De este teorema se deduce también un resultado algo más aproximado sobre la convergencia de las medias de Cesaro.

**Corolario.** Si convenimos en considerar que  $m_y = \infty$  para los estados irreversibles  $y$ , entonces para todos los  $x, y \in X$  existe el límite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N P(n, x, y) = \pi(x, y).$$

con la particularidad de que

$$\pi(x, y) = \frac{F(x, y)}{m_y}.$$

**8.3.7. Clases positivas y nulas.** Un estado reversible  $y$  se llama nulo, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n \bar{d}(y), y, y) = 0$  y se llama positivo, si  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n \bar{d}(y), y, y) > 0$ . Es fácil de establecer que en la clase reversible de estados todos los estados o son positivos a la vez, o bien nulos. Si  $y$  es un estado positivo, entonces  $m_y < \infty$  y  $\pi(y) = \pi(y, y) = \frac{1}{m_y}$ . Para el estado nulo  $\pi(y) = 0$ .

Resulta que la propiedad de una clase de intervenir como positiva o nula está íntimamente ligada con el problema de la existencia de las medidas invariantes.

Para las cadenas de Márkov con un conjunto finito o numerable de estados resulta natural considerar las medidas (las cargas) sólo en los conjuntos de un único punto:  $\mu(y) = \mu(\{y\})$ . puesto, que para  $\Gamma \subset X$  tenemos

$$\mu(\Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} \mu(y).$$

Una carga  $\mu(y)$ , dada para  $y \in K \subset X$ , se denomina invariante en el conjunto  $K$  si  $\mu(y) = \sum_{x \in K} \mu(x) P(x, y)$  para todo  $y \in K$ .

**Teorema 6.** Si  $K$  es una clase de estados reales, toda carga  $\mu$ , invariante en el conjunto  $K$ , que satisface la condición

$$\sum_{y \in K} |\mu(y)| < \infty, \quad (3.2)$$

tiene la forma  $\mu(y) = c\pi(y)$ , donde  $y \in K$  y  $c$  es una constante arbitraria.

**Corolarios.** a) Si  $K$  es una clase reversible positiva, entonces la única carga que es invariante en  $K$  y satisface la condición (3.2) y la condición

$$\sum_{y \in K} \mu(y) = 1, \quad (3.3)$$

es la medida

$$\pi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \frac{1}{N} P(n, y, y), \quad y \in K.$$

En este caso, si  $\bar{d}$  es el período de la clase  $K$ , entonces para cualquier subclase  $K_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, \bar{d} - 1$ , tenemos

$$\sum_{y \in K_j} \pi(y) = \frac{1}{\bar{d}},$$

b) Si  $K$  es una clase reversible nula, la única carga invariante en  $K$ , subordinada a la condición (3.2), es trivial ( $\mu(y) = 0, y \in K$ ).

c) Si una cadena de Márkov es arbitraria, en tanto que  $\mu(y), y \in X$ , es la solución absolutamente sumable del sistema de ecuaciones

$$\mu(y) = \sum_{x \in X} \mu(x) P(x, y), \quad y \in X, \quad (3.4)$$

entonces para todo estado irreversible  $y_0$  debe verificarse  $\mu(y_0) = 0$ .

d) Para que una cadena irreducible de Márkov sea positivamente reversible, es necesario y suficiente que el sistema de ecuaciones (3.4) tenga una solución absolutamente sumable no trivial.

e) Una cadena irreducible de Márkov tiene distribución estacionaria, cuando y sólo cuando, es positivamente reversible.

f) Si una cadena es irreducible, positivamente reversible y aperiódica, entonces la única solución del sistema (3.4), que satisface las condiciones (3.2) y (3.3), será la medida

$$\mu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x, y).$$

El teorema que sigue describe las distribuciones estacionarias de toda clase (si existen) para una cadena dada.

**Teorema 7.** Sea  $(\xi_n, P_n)$  una cadena homogénea de Márkov con un conjunto discreto de estados. Designemos con  $D_\alpha, \alpha \in A$ , donde  $A$  es, en el caso general, un juego numerable de índices, las clases positivas reversibles, con la particularidad de que  $D_\alpha \neq D_\beta$ , cuando  $\alpha \neq \beta$ . Pongamos  $D = \bigcup_{\alpha \in A} D_\alpha$ . La medida  $\mu(x), x \in X$ , es estacionaria, cuando y sólo cuando,

existe la sucesión de magnitudes  $\{\lambda_\alpha, \alpha \in A\}, \lambda_\alpha \geq 0, y \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = 1$ , tal

que

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin D; \\ \lambda_\alpha \pi(x), & \text{si } x \in D_\alpha, \alpha \in A. \end{cases}$$

**8.3.8. Probabilidades con prohibición.** Sea  $\Gamma$  cierto conjunto de estados,  $\Gamma \subset X$ . Hagamos para  $x, y \in X$  y  $n = 1, 2, \dots, \Gamma^P(n, x, y) = \sum_{z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in X \setminus \Gamma} P(x, z_1) P(z_1, z_2) \dots P(z_{n-1}, y)$ .

Una magnitud determinada de este modo fija la probabilidad de que durante  $n$  pasos el sistema pase desde el estado  $x$  al estado  $y$  sin visitar en ninguno de los momentos de tiempo  $1, 2, \dots, n-1$  los estados del conjunto  $\Gamma$ . Tales probabilidades se llaman probabilidades con prohibición o tabú-probabilidades. Si  $\Gamma = \{z\}$ , se escribirá  ${}_z P(n, x, y)$  en lugar de  $\{z\} P(n, x, y)$ . Evidentemente,  $f(n, x, y) = {}_y P(n, x, y)$ .

Para todos los  $n = 1, 2, \dots, x, y, z \in X, \Gamma \subset X, z \notin \Gamma$ , tiene lugar las igualdades:

$$\Gamma^P(n, x, y) = {}_z \Gamma^P(n, x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} {}_z \Gamma^P(k, x, z) \Gamma^P(n-k, z, y);$$

$$\Gamma^P(n, x, y) = {}_z \Gamma^P(n, x, y) + \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma^P(k, x, z) {}_z \Gamma^P(n-k, z, y),$$

donde  ${}_z \Gamma^P(r, x, y) = (z) \cup \Gamma^P(r, x, y)$ .

Hagamos  ${}_1P(0, x, y) = \chi_{\{y\}}(x)$  para  $x \in \Gamma$  y  ${}_1P(0, x, y) = 0$  para  $x \notin \Gamma$ , donde  $\chi_B(x)$  es el indicador del conjunto  $B \subset X$ . Ahora, si  $\Gamma = \{y, z\}$ , será natural designar  ${}_2f(n, x, y) = \{x, y\}^P(n, x, y)$  para  $n = 1, 2, \dots$ ,  $x, y, z \in X$ . Esto es la probabilidad de que el sistema, al salir desde el estado  $x$ , por primera vez en el  $n$ -ésimo paso se encontrará en el estado  $y$ , sin entrar en los momentos de tiempo  $1, 2, \dots, n-1$  en el estado  $z$ . Supongamos, además, que  $f(0, x, y) = 0$ . Al tomar en consideración estas designaciones y los acuerdos de las igualdades anteriores, se obtienen con facilidad las fórmulas

$${}_2P(n, x, y) = \sum_{k=0}^n {}_2f(k, x, y) {}_2P(n-k, y, y) + \delta_{n0} \chi_{\{y\}}(x), \quad z \neq y;$$

$$f(n, x, y) = \sum_{k=0}^n {}_2P(k, x, x) {}_2f(n-k, x, y), \quad x \neq y,$$

válidas para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $\chi_\Gamma(x)$  es el indicador, del conjunto  $\Gamma$ , mientras que  $\delta_{n0} = 1$  para  $n = 0$  y  $\delta_{n0} = 0$  para  $n \neq 0$ . De aquí suponiendo que

$${}_2G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2P(n, x, y), \quad {}_2F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_2f(n, x, y),$$

hallamos

$${}_2G(x, y) = \chi_{\{y\}}(x) + {}_2F(x, y) {}_2G(y, y), \quad z \neq y;$$

$$F(x, y) = {}_2G(x, x) {}_2F(x, y), \quad x \neq y.$$

Si  $x$  e  $y$  son unos estados comunicantes, será, evidentemente,  ${}_2F(x, y) > 0$ . Por esta razón, de la segunda correlación tenemos

$$0 < {}_2G(x, x) = \frac{F(x, y)}{{}_2F(x, y)} < \infty, \quad x \neq y,$$

siempre que  $x$  e  $y$  se comuniquen. Ahora, de la primera correlación, para los estados comunicantes  $y$  y  $z$  obtenemos

$$0 < {}_2G(z, y) = F(y, z) \frac{{}_2F(z, y)}{{}_2F(y, z)} < \infty, \quad y \neq z.$$

Luego, se puede mostrar que para  $x$  e  $y$  de una misma clase reversible se verifica la correlación

$${}_2G(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N P(n, x, y)}{\sum_{n=0}^N P(n, x, x)}.$$

De aquí se deduce que para los estados reversibles  ${}_2G(x, x) = 1$ . Además, si  $x$  e  $y$  son estados de una misma clase positiva, entonces

$${}_2G(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}.$$

Designemos  $m_{xy} = M_x \tau_y^1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f(n, x, y)$ . La magnitud  $m_{xy}$  es el tiempo medio hasta la primera llegada al estado  $y$ , si  $x$  era el estado inicial. Cuando  $x=y$ ,  $m_{yy}$  coincide con la magnitud  $m_y$ , introducida anteriormente.

**Teorema 8.** Si  $F(x, y) = 1$ , entonces  $\sum_{z \in X} y G(x, z) = m_{xy}$ .

De este teorema se deduce que la serie  $\sum_{y \in X} G(x, y)$  converge para una clase positivamente reversible y diverge, para una clase nula.

Según se deduce del teorema 6, en el caso cuando  $K$  es una clase reversible nula, no existe una carga, invariante en  $K$ , de la variación acotada que sea diferente de una carga trivial. El teorema que sigue muestra que aquí existe una medida, invariante en  $K$ , de la masa completa infinita.

**Teorema 9.** Sea  $K$  una clase reversible. La única solución no negativa del sistema de ecuaciones

$$\mu(y) = \sum_{x \in K} \mu(x) P(x, y), \quad y \in K,$$

que satisface la condición  $\mu(z_0) = 1$  para cierto  $z_0 \in K$ , es la medida  $z_0 G(z_0, y)$ ,  $y \in K$ .

**8.3.9. Teorema ergódico.** Sea  $(\xi_n, P_x)$  una cadena homogénea de Márkov cuyos estados forman una clase reversible  $X$ . Supongámonos que en  $X$  está dada una función real  $v(x)$  y examinemos la funcional

$$\eta_n(v) = \sum_{k=0}^n v(\xi_k), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

Para  $y \in X$  pongamos  $\tau_y^1 = \inf \{n : n = 1, 2, \dots, \xi_n = y\}$ ,  $\tau_y^{k+1} = \inf \{n : n > \tau_y^k, \xi_n = y\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (véase el p. 8.3.6). Como todos los estados de la cadena en consideración forman una clase reversible, entonces para todos los  $x, y \in X$  y  $k = 1, 2, \dots$  se tiene que  $P_x \{\tau_y^k < \infty\} = 1$ . La magnitud  $\eta_n(v)$  puede representarse en la forma

$$\eta_n(v) = \sum_{k=0}^{\tau_y^1-1} v(\xi_k) + \sum_{k=1}^{v_y(n)-1} \zeta_k(y, v) + \sum_{k=\tau_y^{v_y(n)}}^n v(\xi_k),$$

donde

$$\zeta_k(y, v) = \sum_{r=\tau_y^k}^{\tau_y^{k+1}-1} v(\xi_r), \quad k=1, 2, \dots,$$

y  $v_y(n)$  es una magnitud aleatoria para la cual  $\tau_y^{v_y(n)} \leq n$ ,  $\tau_y^{v_y(n)+1} > n$  (de otra manera:  $v_y(n) = \max \{k : \tau_y^k \leq n\} = \min \times$



$\times \{k: \tau_y^{k+1} > n\}$ ). Observemos que, en virtud de la propiedad rigurosa de la cadena de Márkov, las magnitudes  $\zeta_k(y, v)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , son independientes e igualmente distribuidas, con la particularidad de que la distribución de la magnitud  $\zeta_k(y, v)$  en la medida  $P_x$  no depende de  $x$ . Efectivamente, para  $\alpha$  reales tenemos

$$\begin{aligned} P_x \{ \zeta_k(y, v) < \alpha \} &= M_x P_x \{ \theta_{\tau_y^k} r_{\tau_y^k}(y, v) < \alpha / \sqrt{\tau_y^k} \} = \\ &= M_x P_{\zeta_{\tau_y^k}} \{ \zeta_1(y, v) < \alpha \} = P_y \{ \zeta_1(y, v) < \alpha \} \end{aligned}$$

Luego, se puede mostrar que de la existencia del momento del  $p$ -ésimo orden de la magnitud  $\zeta_k(y, v)$  para cierto  $y \in X$  proviene que tal momento existe para cualquier  $y \in X$ . En particular, si  $p = 1$ , entonces, a condición de que

$$\sum_{z \in X} yG(y, z) |v(z)| < \infty,$$

tenemos

$$M_x \{ \zeta_k(y, v) \} = \sum_{z \in X} yG(y, z) v(z).$$

Designemos

$$S_x(v) = \sum_{y \in X} xG(x, y) v(y).$$

Resulta que si  $S_x(v)$  es finito (por lo que se entenderá la condición  $\sum_{y \in X} xG(x, y) |v(y)| = S_x(|v|) < \infty$  para cierto  $x \in X$ , será finito también para todo  $x$ . Por analogía, si  $S_x(v) \neq 0$  para cierto  $x$ , lo mismo será válido para todo  $x$ . Además, si  $S_x(u)$  y  $S_x(v)$  son finitos, la relación  $S_x(u)/S_x(v)$  no depende de  $x$ . En el caso de una cadena positivamente reversible  $xG(x, y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}$ , de modo que en este caso

$$\pi(x) S_x(v) = \sum_{y \in X} \pi(y) v(y),$$

donde  $\pi(y)$  es la distribución estacionaria de la cadena.

El teorema que sigue se llama **ergódico**. En su demostración desempeña el papel decisivo la representación de la magnitud  $\eta_n(v)$  en forma de una suma de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas con ciertos complementos (véase más arriba).

**Teorema 10.** Si una cadena  $(\xi_n, P_x)$  es irreducible y reversible, mientras que las funciones  $u$  y  $v$ , prefijadas en el espacio de estados son tales que las magnitudes  $S_x(u)$  y  $S_x(v)$  son finitas no nulas, entonces se verifica la correlación

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{n=0}^N u(\xi_n)}{\sum_{n=0}^N v(\xi_n)} = \frac{S_y(u)}{S_y(v)}$$

casi por cierto respecto de la medida  $P_x$  para cualquier  $x \in X$  (de conformidad con lo dicho anteriormente, el segundo miembro de esta igualdad no depende de  $y$ ).

**Corolarios.** 1) Si una cadena irreducible es positivamente reversible y la función  $v(x)$ ,  $x \in X$ , satisface la condición  $\sum_{y \in X} \pi(y) |v(y)| < \infty$ , entonces casi por cierto respecto de  $P_x$  (para todo  $x \in X$ ) se verifica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N v(\xi_n) = \sum_{y \in X} \pi(y) v(y).$$

Esto significa que la media según el tiempo para la sucesión  $\{v(\xi_n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  converge hacia la media de la función  $v(x)$  según la distribución estacionaria.

2) Si para una cadena irreducible positivamente reversible se tiene  $\sum_{y \in X} \pi(y) |v(y)| < \infty$ , entonces con todo  $x \in X$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M_x \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N v(\xi_n) - \sum_{y \in X} \pi(y) v(y) \right| \right\} = 0.$$

3) Para una cadena irreducible positivamente reversible casi por cierto respecto de  $P_x$  (para todo  $x \in X$ ) se verifican

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_y(n)}{n} = \pi(y), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_y^{v_y(n)}}{n} = 1,$$

pondo  $v_y(n)$  y  $\tau_y^h$  son las magnitudes determinadas más arriba.

**8.3.10. Teorema del límite central para las cadenas de Márkov.** Supongamos que la cadena de Márkov  $(\xi_n, P_x)$  es irreducible y positivamente reversible, y  $v(x)$ , una función real prefijada en los estados de la cadena. Ya se ha constatado que para la existencia de la media  $M_x \xi_h(y, v)$  es suficiente que

$$\sum_{y \in X} |v(y)| \pi(y) < \infty,$$

donde  $\pi(y)$  es una distribución estacionaria. Con esta condición

$$M_x \xi_h(y, |v|) = M_x \sum_{r=\tau_y^h}^{\tau_y^{h+1}-1} |v(\xi_r)|.$$

Supongamos ahora que para la función  $v$  se cumple una condición un poco menos rigurosa, a saber,

$$M_x | \xi_h(y, v) | = M_x \left| \sum_{r=\tau_y^h}^{\tau_y^{h+1}-1} v(\xi_r) \right| < \infty. \quad (3.5)$$

Hagamos para  $y \in X$

$$\mu_y(v) = M_x \sum_{r=\tau_y^k}^{\tau_y^{k+1}-1} v(\xi_r).$$

La magnitud  $\mu_y(y)$  no depende ni de  $x \in X$ , ni de  $k = 1, 2, \dots$

**Teorema 11.** Si la cadena de Márkov, irreducible y positivamente reversible y la función  $v$  son tales que  $\mu_y(v)$  existe (es decir, si se cumple la condición (3.5)), entonces el límite en la probabilidad  $P_x$ ,  $x \in X$ , de la magnitud

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N v(\xi_n)$$

existe y es igual a  $\pi(y) \mu_y(v)$ ,  $y \in X$ .

De aquí se deduce, en particular, que la magnitud  $\pi(y) \mu_y(v)$  no depende de  $y$ .

Hagamos, ahora, para  $y \in X$ ,  $k = 1, 2, \dots$

$$\delta_k(y, v) = \zeta_k(y, v) - \pi(y) \mu_y(v) (\tau_y^{k+1} - \tau_y^k).$$

Las magnitudes  $\delta_k(y, v)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , son independientes y están igualmente distribuidas en la probabilidad  $P_x$ ,  $x \in X$ , con la particularidad de que la distribución  $P_x \{\delta_k(y, v) < \alpha\}$  no depende de  $x$ . Evidentemente,  $M_x \delta_k(y, v) = 0$ . Designemos

$$\sigma_y^2(v) = M_x [\delta_k(y, v)]^2.$$

Se puede mostrar que si  $\sigma_y^2(v) < \infty$  para cierto  $y \in X$ , lo mismo será justo para todos los  $y \in X$ .

**Teorema 12.** Si para una cadena de Márkov, irreducible y positivamente reversible y para la función  $v$  queda cumplida la desigualdad  $0 < \sigma_y^2 < \infty$ , entonces resulta válida la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_x \left\{ \frac{\eta_n(v) - na}{\sqrt{bn}} < \alpha \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{2}} d\beta,$$

donde  $x \in X$ ,  $\alpha$  es un número real arbitrario,  $a = \pi(y) \mu_y(v)$ ,  $b = \pi(y) \sigma_y^2(v)$ . Las magnitudes  $a$  y  $b$  no dependen de cómo se elige  $y \in X$ .

Del teorema 11 se deduce que  $\frac{1}{n} \eta_n(v) \rightarrow a$  en la probabilidad  $P_x$ .

El teorema 12 muestra, de este modo, que las fluctuaciones de la magnitud  $\frac{1}{n} \eta_n(v)$  alrededor del valor medio  $a$  están distribuidas de manera asintóticamente normal, siempre que exista el segundo momento de la magnitud  $\delta_k(y, v)$  y que este último es distinto de cero.

**Observación.** La magnitud  $\eta_n(v)$  puede ser representada en la forma

$$\eta_n(v) = a (\tau_y^{(n)} - \tau_y^{(1)}) + \sum_{h=1}^{v_y^{(n)}-1} \delta_h(y, v) + V_n^+ + V_n^-.$$

donde  $V_n^+$  y  $V_n^-$  coinciden, respectivamente, con el primero y tercero sumandos en la representación para la magnitud  $\eta_n(v)$ , citada en el p. 8.3.9. Los razonamientos generales en la demostración de los teoremas del límite para la magnitud  $\eta_n(v)$  consisten en la demostración de la pequeñez asintótica de la magnitudes  $V_n^+$  y  $V_n^-$  (con cierto factor de normalización) y en la aplicación de los teoremas del límite clásicos para las sumas de magnitudes aleatorias independientes a la suma

$$\sum_{(k=1)}^{v_p(n-1)} \delta_k(y, v).$$

La suposición del teorema 12 significa que la distribución de la magnitud  $\delta_k(y, v)$  pertenece al dominio de atracción de la ley normal, razón por la cual en el límite se obtiene aquí una distribución normal. Al suponer que la distribución de la magnitud  $\delta_k(y, v)$  cae en el dominio de atracción de otras leyes estables, se pueden obtener otros teoremas del límite para las magnitudes  $\eta_n(v)$ .

# 2

parte

## Teoría de los procesos aleatorios

Capítulo 9

### NOCIONES FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA DE LOS PROCESOS ALEATORIOS

#### 9.1. Definición del proceso aleatorio

**9.1.1. Distribuciones de dimensiones finitas.** Se denomina proceso aleatorio en el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  una familia de las magnitudes aleatorias  $\xi(t, \omega)$  dependientes de un parámetro real  $t$  que toma los valores de cierto conjunto  $T$ . Este conjunto recibe el nombre de dominio de definición del proceso. Las propias magnitudes aleatorias  $\xi(t, \omega)$  pueden ser reales o complejas, o bien vectoriales. Un espacio  $X$  en el cual  $\xi(t, \omega)$  toma sus valores, se llama espacio físico del proceso. Según sea el espacio físico de un proceso, suele decirse que los procesos son numéricos, de valores complejos o vectoriales. Igual que en el caso de las magnitudes aleatorias, para los procesos aleatorios el argumento  $\omega$  se omite con frecuencia y se escribe  $\xi(t)$ , en lugar de  $\xi(t, \omega)$ . Una de las características principales del proceso aleatorio la constituyen sus distribuciones de dimensiones finitas (parciales), esto es, un juego de funciones definidas para todo  $k$  natural mediante las correlaciones

$$E_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, A_2, \dots, A_k) = P \left\{ \bigcap_{j=1}^k \{ \xi(t_j, \omega) \in A_j \} \right\},$$

donde  $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ ,  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son conjuntos borelianos del dominio de los valores del proceso.

Las distribuciones de dimensiones finitas satisfacen las siguientes condiciones evidentes:

I. Para  $t_1, t_2, \dots, t_k$  fijados la función  $F_{t_1, t_2, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k)$  es una distribución conjunta de  $k$  magnitudes aleatorias;

II.  $F_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k) = F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$ , cualquiera que sea la permutación  $i_1, \dots, i_k$  de los números  $1, 2, \dots, k$ .

III. Si  $X$  es el dominio de los valores del proceso, entonces

$$F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_k}(A_1, \dots, A_{k-1}, X) = F_{t_1, \dots, t_{k-1}}(A_1, \dots, A_{k-1}).$$

Las distribuciones de dimensiones finitas  $F_{t_1, \dots, t_k}(A_1, \dots, A_k)$  pueden ser dadas mediante las densidades de dimensiones

finitas de una distribución, esto es, mediante las funciones  $f_{t_1, \dots, t_h}(x_1, \dots, x_h)$  de tal índole que

$$F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h) = \int_{A_1} \dots \int_{A_h} f_{t_1, \dots, t_h}(x_1, \dots, x_h) dx_1 \dots dx_h.$$

La respuesta a la pregunta de en qué condiciones existe un proceso aleatorio para el cual el juego dado de funciones  $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$  constituye distribuciones de dimensiones finitas, nos la da el teorema que sigue.

**Teorema 1 (de Kolmogórov).** *Supongamos que las funciones  $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$  están definidas para  $t_1, \dots, t_h \in T$ , y  $A_1, \dots, A_h \in \mathfrak{B}(X)$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos en el espacio euclidiano de dimensiones finitas  $X$ . Entonces, para que exista un proceso aleatorio para el cual  $F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)$  sean distribuciones de dimensiones finitas, es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones I—III. A título de espacio probabilístico se puede elegir el espacio  $\{\Omega, \mathfrak{E}, P\}$ , donde  $\Omega$  es el conjunto de todas las funciones  $\omega(t)$  definidas en  $T$  que toman sus valores de  $X$ ; la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{E}$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima generada por conjuntos cilíndricos, es decir, por los conjuntos del tipo*

$$\{\omega : \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_h) \in A_h\} = C_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h),$$

y la medida  $P$  se determina por la correlación

$$P(C_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h)) = F_{t_1, \dots, t_h}(A_1, \dots, A_h).$$

El proceso aleatorio buscado en este espacio probabilístico se determina mediante la igualdad

$$\xi(t, \omega) = \omega(t).$$

Las funciones  $\xi(t, \omega)$  con  $\omega$  fijado se denominan **funciones muestrales** del proceso aleatorio.

La construcción de un proceso aleatorio con las distribuciones de dimensiones finitas dadas, propuesta en el teorema de Kolmogórov, conduce a un espacio de funciones muestrales demasiado amplio. A veces resulta deseable construir un proceso cuyas funciones muestrales posean ciertas propiedades de regularidad (por ejemplo, que son medibles, continuas, derivables, etc.).

Dos procesos aleatorios son **estocásticos equivalentes en amplio sentido**, si coinciden sus distribuciones de dimensiones finitas.

**Teorema 2.** *Con el fin de conseguir que para el proceso dado exista un proceso estocástico equivalente en amplio sentido, cuyas funciones muestrales pertenecen al conjunto  $F \subset \Omega$ , es necesario y suficiente que  $P^*(F) = 1$ , donde  $P^*$  es una medida exterior construida según la medida  $P$  que fue determinada en el teorema de Kolmogórov.*

$$P^*(G) = \inf_{\cup C_h = G} \sum P(G_h),$$

donde  $C_h$  son conjuntos cilíndricos;  $G$  es un conjunto arbitrario de  $\Omega$ .

Si esta condición se cumple, a título de espacio probabilístico en el que está dado el proceso podemos tomar  $\{F, \mathfrak{S}^*, P^*\}$ , donde  $\mathfrak{S}^*$  es una  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos  $\Omega$  del tipo  $F \cap C$ , donde  $C \in \mathfrak{S}$  y el propio proceso se determina, como antes, por la correlación

$$\xi(t, \omega) = \omega(t).$$

Sea  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in T$ , un proceso aleatorio (real, complejo o vectorial), definido en un espacio probabilístico arbitrario  $\{\Omega, \mathfrak{S}, P\}$ . Si  $\mathfrak{E}_T$  designa el espacio de todas las funciones con los mismos valores que  $\xi(t, \omega)$  en tanto que  $\mathfrak{S}_T$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima que contiene todos los conjuntos cilíndricos del conjunto  $F_T$ , entonces la aplicación

$$\omega \rightarrow \xi(\cdot, \omega)$$

es una aplicación medible del espacio  $\{\Omega, \mathfrak{S}\}$  en  $\{F_T, \mathfrak{S}_T\}$ , es decir, para cualquier  $A \in \mathfrak{S}_T$  se tiene  $\{\omega: \xi(\cdot, \omega) \in A\} \in \mathfrak{S}$ . Esta aplicación transforma la medida  $P$  en cierta medida  $\mu_\xi$ :

$$\mu_\xi(A) = P(\{\omega: \xi(\cdot, \omega) \in A\}), \text{ cuando } A \in \mathfrak{S}_T.$$

La medida  $\mu_\xi(\cdot)$  se llama una medida correspondiente al proceso aleatorio  $\xi(t, \omega)$ . Ella coincide con otra medida construida a base de las distribuciones de dimensiones finitas de que se ha tratado en el teorema de Kolmogórov.

Resulta cómodo fijar las distribuciones de dimensiones finitas del proceso  $\xi(t, \omega)$  con ayuda de la funcional característica del proceso:

$$\chi(g) = M \exp(i \int (\xi(t, \omega), dg(t))),$$

definido para todas las funciones escalonadas  $g$  en  $T$  con los valores en  $X$ ;  $(\xi, dg)$  es un producto escalar en  $X$ ; la integral del índice del exponente es una integral de Stieltjes.

9.1.2. Funciones de momento. Sea  $\xi(t, \omega)$  un proceso aleatorio numérico, para el cual  $M |\xi(t, \omega)|^m < \infty$ . Entonces, para  $k \leq m$  quedan definidas las funciones

$$m_k(t_1, \dots, t_k) = M \xi(t_1, \omega) \dots \xi(t_k, \omega).$$

La función  $m_k(t_1, \dots, t_k)$  se llama  $k$ -ésima función de momento del proceso  $\xi(t, \omega)$ . Si  $M |\xi(t, \omega)|^k < \infty$ ,  $t \in T$  para todo  $k$ , quedan definidas para el proceso las funciones de momento de todos los órdenes.

Entre las funciones de momento son de mayor uso las de los primeros dos órdenes:  $m_2(t)$  que es valor medio del proceso, en lugar de  $m_2(t_1, t_2)$  se considera habitualmente la función  $R(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1) m_1(t_2)$ , la cual se denomina **función de correlación**. El valor medio puede ser una función cualquiera definida en  $T$ . La función de correlación  $R(t_1, t_2)$  está positivamente definida; para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  reales se tiene

$$\sum_{i, k} R(t_i, t_k) x_i x_k \geq 0.$$

Toda función  $R(t_1, t_2)$ , si es positivamente definida, es una función de correlación de cierto proceso.

Sea  $\xi(t, \omega)$  un proceso aleatorio con los valores en el espacio euclídeo de dimensiones finitas  $X$ . La función  $a(t)$ , que está definida

en  $T$  y que toma los valores de  $X$ , se denomina **valor medio del proceso**, si para todos los  $z \in X$

$$M(\xi(t, \omega), z) = (a(t), z).$$

La función  $B(t, s)$ , definida para  $t, s \in T$ , como valores de la cual sirven los operadores lineales en  $X$ , se llama **función operacional de correlación de un proceso vectorial**, si con  $z, u \in X$

$$M(\xi(t, \omega), z) M(\xi(s, \omega), u) = (B(t, s)z, u) + (a(t), z)(a(s), u).$$

La función operacional  $B(t, s)$  está también positivamente definida: si  $z_1, \dots, z_k \in X, t_1, \dots, t_k \in T$ , entonces

$$\sum_{i, j} (B(t_i, t_j)z_i, z_j) \geq 0.$$

Además, ella es simétrica en el siguiente sentido:  $B(t, s) = B^*(t, s)$ , donde  $B^*$  es un operador conjugado de  $B$ .

La función operacional de correlación puede ser dada por su matriz en cierta base; tal matriz se llama **matriz de correlación del proceso vectorial**.

Sean  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$  dos procesos aleatorios en un mismo espacio probabilístico. La función

$$b_{12}(t, s) = M\xi_1(t)\xi_2(s) - M\xi_1(t)M\xi_2(s)$$

se denomina **función de correlación recíproca** de los procesos  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$ . Si  $b_{hk}(t, s)$  ( $k = 1, 2$ ) es una función de correlación del proceso  $\xi_k(t)$ , entonces la función matricial

$$\begin{pmatrix} b_{11}(t, s), & b_{12}(t, s) \\ b_{12}(t, s), & b_{22}(t, s) \end{pmatrix}$$

queda positivamente definida: para todos los  $x_1, x_2, \dots, x_h, y_1, \dots, y_h, t_1, t_2, \dots, t_h$

$$\sum_{i, j=1}^h (b_{11}(t_i, t_j)x_ix_j + b_{12}(t_i, t_j)(x_iy_j + x_jy_i) + b_{22}(t_i, t_j)y_iy_j) \geq 0. \quad (1.1)$$

Toda función operacional simétrica y positivamente definida es una función de correlación de cierto proceso. Por esta razón el cumplimiento de la condición (1.1) es necesario y suficiente para que  $b_{12}(t, s)$  sea la función de correlación recíproca de los procesos  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$ .

**9.1.3. Continuidad estocástica.** Sea dado en cierto intervalo  $T$  un proceso aleatorio  $\xi(t)$ . Este se denomina **estocástico continuo en cierto punto**  $t_0 \in T$ , si para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} P(|\xi(t) - \xi(t_0)| > \varepsilon) = 0.$$

Si un proceso es estocástico continuo en todo punto del intervalo  $T$ , suele decirse que es **estocástico continuo en el intervalo  $T$** . (Esta definición es válida no sólo para los procesos numéricos, sino también para los vectoriales. En este último caso  $|\cdot|$  significa la norma del



vector). Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso estocástico continuo en  $T$ . En este caso serán justas las siguientes afirmaciones:

a) si  $f(t, x)$  es una función continua para  $t \in T$ ,  $x \in X$ , donde  $X$  es el dominio de los valores de  $\xi(t)$ , entonces  $f(t, \xi(t))$  es también un proceso estocástico continuo en  $T$ ;

b) sea, para cierto  $\delta > 0$ ,

$$\sup_t M |f(t, \xi(t))|^{1+\delta} < \infty,$$

donde  $f$  es una función del mismo tipo que la indicada en la afirmación a), entonces la función  $Mf(t, \xi(t))$  es continua respecto de  $t$ ;

c) sea  $f$  la misma que en la afirmación a) y supongamos que una función numérica no negativa  $\lambda(h) \uparrow +\infty$ , cuando  $h \rightarrow +\infty$ . Aquí, si

$$\sup_t Mf(t, \xi(t)) \lambda(|f(t, \xi(t))|) < \infty,$$

entonces  $Mf(t, \xi(t))$  es una función continua;

d) si, para cierto  $\delta > 0$ ,  $\sup M |\xi(t)|^{k+\delta}$ , entonces las funciones de momento del proceso  $\xi(t) = m_j(t_1, \dots, t_j)$  para  $j \leq k$ , son continuas en la totalidad de variables;

e) si un proceso  $\xi(t)$  es estocástico continuo en el conjunto cerrado y acotado  $T$ , el es continuo de modo uniforme y estocástico, es decir, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq h}} P(|\xi(t_1) - \xi(t_2)| > \varepsilon) = 0,$$

f) un proceso  $\xi(t)$  se llama acotado en probabilidad en el conjunto  $T$ , si

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{t \in T} P(|\xi(t)| > c) = 0.$$

Si un proceso es estocástico continuo en el conjunto cerrado acotado  $T$ , es acotado en probabilidad.

**9.1.4. Procesos con el espacio físico discreto.** En muchos problemas el dominio de los valores de un proceso es un conjunto numerable. (Por ejemplo, un proceso tiene los valores de números enteros, o bien los vectores tienen las coordenadas de números enteros, etc.). Para los procesos de este tipo la forma concreta del espacio físico no tiene importancia. Supongamos que el dominio de los valores posibles  $X$  consta de los elementos  $\{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $T$  es el dominio de definición del proceso. En este caso resulta cómodo definir las distribuciones de dimensiones finitas del proceso con ayuda de las probabilidades

$$P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n) = P\{\xi(t_1) = x_{k_1}, \dots, \xi(t_n) = x_{k_n}\}.$$

Es evidente que, conociendo estas probabilidades, se pueden determinar también las distribuciones de dimensiones finitas del proceso según la fórmula

$$P_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n) = \sum_{x_{k_1} \in A_1, \dots, x_{k_n} \in A_n} P_{t_1, \dots, t_n}(k_1, \dots, k_n).$$

**9.1.5. Procesos con el tiempo discreto.** Si el conjunto  $T$ , en el cual está determinado un proceso, es una sucesión de números enteros no negativos o bien una sucesión de todos los números enteros, entonces  $\xi(t)$  se llama proceso con el tiempo discreto o sucesión aleatoria.

Sea  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Escribiremos  $\xi_n$  en lugar de  $\xi(n, \omega)$ . Las distribuciones de dimensiones finitas de la sucesión  $\{\xi_n\}$  se determinan completamente por las funciones de distribución

$$F_n(A_0, \dots, A_n) = P\{\xi_0 \in A_0, \dots, \xi_n \in A_n\}.$$

En lugar de estas funciones de distribución resulta, a veces, más cómodo prefijar las funciones condicionales de distribución  $\xi_n$  para  $\xi_0, \dots, \xi_{n-1}$  dados:

$$F_n(A/x_0, \dots, x_{n-1}),$$

son tales funciones que con la probabilidad 1

$$P\{\xi_n \in A/\xi_0, \dots, \xi_{n-1}\} = F_n(A/\xi_0, \dots, \xi_{n-1}).$$

Si  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , se utilizan las distribuciones de dimensiones finitas

$$F_n(A_{-n}, \dots, A_0, \dots, A_n) = P\{\xi_0 \in A_0, \xi_1 \in A_1, \dots, \xi_{-1} \in A_{-1}, \dots, \xi_n \in A_n, \xi_{-n} \in A_{-n}\}.$$

Estas también pueden prefijarse con ayuda de las distribuciones condicionales

$$P\{\xi_n \in A/\xi_0, \xi_1, \xi_{-1}, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{-n+1}\};$$

$$P\{\xi_{-n} \in A/\xi_0, (\xi_1, \xi_{-1}, \dots, \xi_{n-1}, \xi_{-n+1})/\xi_n\}.$$

#### EJEMPLOS DE PROCESOS ALEATORIOS.

a. En un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ , donde  $\Omega$  es  $[0, 1]$ ,  $\mathcal{G}$  es el  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos de este segmento;  $P$  es la medida de Lebesgue en  $[0, 1]$ , el proceso  $\xi(t, \omega)$  para  $t \in [0, 1]$  se determina por la igualdad

$$\xi(t, \omega) = \begin{cases} 1, & t > \omega, \\ 0, & t \leq \omega. \end{cases}$$

Las distribuciones de dimensiones finitas del proceso (el espacio fásico del proceso se compone de dos puntos: 0 y 1) se determinan por las correlaciones:

$$\text{para } t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

$$P\{\xi(t_1) = 0, \dots, \xi(t_{i-1}) = 0, \xi(t_i) = 1, \dots, \xi(t_n) = 1\} = t_i - t_{i-1};$$

$$\text{para } 1 < i \leq n$$

$$P\{\xi(t_1) = 0, \dots, \xi(t_n) = 0\} = 1 - t_n;$$

$$P\{\xi(t_1) = 1, \dots, \xi(t_n) = 0\} = t_1.$$

En todos los casos restantes  $P\{\xi(t_1) = k_1, \dots, \xi(t_n) = k_n\} = 0$  ( $k_1, \dots, k_n$  toman los valores 0 y 1).

El proceso  $\xi(t)$  es estocástico continuo: para  $\varepsilon < 1$ ,  $t_1 < t_2$   $P\{|\xi(t_2) - \xi(t_1)| > \varepsilon\} = P\{\xi(t_1) = 0, \xi(t_2) = 1\} = t_2 - t_1$ . No obstante, casi todas las funciones muestrales del proceso son discontinuas. Este ejemplo muestra que la continuidad estocástica no provoca continuidad de las funciones muestrales.

b. Proceso de Poisson. Así se llama el proceso  $\xi(t)$ , cuyos valores están representados por números enteros no negativos y que está definido para  $t \geq 0$ , si sus distribuciones de dimensiones finitas con  $0 <$

$t_1 < \dots < t_n$  están dadas mediante la igualdad

$$P\{\xi(t_1)=k_1, \xi(t_2)=k_2, \dots, \xi(t_n)=k_n\} = \begin{cases} a^k n e^{-at} \frac{t_1^{k_1} (t_2-t_1)^{k_2-k_1} \dots (t_n-t_{n-1})^{k_n-k_{n-1}}}{k_1! (k_2-k_1)! \dots (k_n-k_{n-1})!}, & \text{si } 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Este proceso describe el número de sucesos raros que se realizan durante el tiempo  $t$  (por ejemplo, el número de partículas cósmicas registradas por un contador, el número de llamadas recibidas en una central telefónica, etc.). El número  $a > 0$  se llama parámetro del proceso.

$$a = \frac{M\xi(t)}{t}.$$

El proceso de Poisson puede construirse del modo siguiente. Sea  $\eta_1, \eta_2, \dots$  una sucesión de magnitudes independientes no negativas igualmente distribuidas, para las cuales

$$P\{\eta_k > t\} = e^{-at}.$$

Si  $\varepsilon(z) = 1$  para  $z \geq 1$ ,  $\varepsilon(z) = 0$  para  $z < 0$ , entonces la función

$$\xi(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon\left(t - \sum_{i=1}^h \eta_i\right)$$

será un proceso de Poisson (la última fórmula define el proceso como una función de  $t$  y  $\omega$ , ya que de  $\omega$  dependen las magnitudes  $\eta_i$ ).

c. **Proceso de crecimiento puro.** Supongamos que  $\eta_k$  son las mismas que en el ejemplo anterior, y  $\lambda_k > 0$  es una sucesión para la cual

$$\sum \frac{1}{\lambda_k} = +\infty.$$

Un proceso del tipo

$$\xi(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \varepsilon\left(t - \sum_{i=1}^h \frac{\eta_i}{\lambda_i}\right)$$

se denomina proceso de crecimiento puro. Las funciones muestrales de este proceso son escalonadas no decrecientes de valores enteros; todos los saltos de estas funciones son iguales a 1,  $\xi(0) = 0$ .

d. El movimiento browniano unidimensional (proceso de Wiener) es el proceso  $w(t)$ , definido para  $t \geq 0$ ; sus distribuciones de dimensiones finitas se determinan por las densidades conjuntas de distribución de las magnitudes  $w(t_1), w(t_2), \dots, w(t_n)$  para  $t_1 < t_2 < \dots$

$\dots < t_n$ , que tienen la forma

$$f_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = [(2\pi)^n t_1(t_2 - t_1) \dots \dots (t_n - t_{n-1})]^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{x_1^2}{t_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{t_2 - t_1} + \dots + \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{t_n - t_{n-1}} \right] \right\}.$$

El proceso  $w(t)$  puede servir de modelo probabilístico de los fenómenos de difusión o de movimiento browniano ( $w(t)$  es una de las coordenadas de una partícula en difusión).

## 9.2. Mensurabilidad e integrabilidad de los procesos aleatorios

**9.2.1. Procesos aleatorios medibles.** Un proceso aleatorio  $\xi(t, \omega)$ , definido en el conjunto boreliano  $T$  con el espacio físico  $X$ , se llama medible, si  $\xi(t, \omega)$  es medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{E}$ , donde  $\mathfrak{B}_T$  es una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos en  $T$ ;  $\mathfrak{E}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos del espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{E}, P\}$ , en el cual está definido el proceso aleatorio. Esto significa que para todo conjunto boreliano  $A \subset X$

$$\{(t; \omega) : \xi(t, \omega) \in A\} \in \mathfrak{B}_T \times \mathfrak{E}$$

(el producto de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{B}_T$  y  $\mathfrak{E}$  es una  $\sigma$ -álgebra mínima que contiene los conjuntos  $B \times S$ , donde  $B \in \mathfrak{B}_T$ ,  $S \in \mathfrak{E}$ ).

Si el proceso  $\xi(t, \omega)$  es medible, para casi todos los  $\omega$  las funciones muestrales  $\xi(\cdot, \omega)$  serán funciones borelianas de  $t$ .

Un proceso que se construye en el teorema de Kolmogórov según las distribuciones de dimensiones finitas (véase p. 9.1) no será medible. Surge la pregunta, ¿en qué condiciones puede construirse un proceso medible según las distribuciones de dimensiones finitas dadas?

Hagamos uso de la noción de **equivalencia estocástica** de dos procesos aleatorios (dicha noción se diferencia de la noción de equivalencia estocástica en amplio sentido introducida en el p. 9.1.). Dos procesos  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$ , definidos en un mismo espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathfrak{E}, P\}$  y dados en un mismo conjunto  $T$ , se llaman **equivalentes estocásticos**, si

$$P \{ \xi_1(t) = \xi_2(t) \} = 1, \quad \forall t \in T.$$

Es evidente que los procesos equivalentes estocásticos tienen distribuciones de dimensiones finitas iguales.

**Teorema 1.** Si un proceso  $\xi(t)$  es estocástico continuo en el conjunto boreliano  $T$ , entonces existe un proceso medible  $\xi'(t)$  que es estocásticamente equivalente a  $\xi(t)$ .

Este proceso  $\xi'(t)$  se puede definir como un límite de los procesos  $\xi_{n_k}(t) = \xi(t_{n_k})$  para  $t \in [t_{n_k}, t_{n_k+1})$ , donde  $t_{n_k} \in T$  y  $\max_{n \rightarrow \infty} |t_{n_k+1} - t_{n_k}| \rightarrow 0$ . Para aquellos pares  $(t, \omega)$ , para los cuales dicho límite no existe, suponemos que  $\xi'(t) = 0$ .

**Corolario.** Si  $\xi(t)$  tiene a lo sumo un conjunto numerable de los puntos de discontinuidad, existe un proceso medible  $\xi'(t)$  que es estocásticamente equivalente a  $\xi(t)$ .

He aquí algunas propiedades importantes de los procesos medibles.

a. Sea  $\varphi(t, x)$  una función medible respecto de  $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{B}_X$ , donde  $\mathfrak{B}_X$  es una  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos en el espacio físico  $X$  del proceso en consideración. Si

$$\mathbf{M} |\varphi(t_1, \xi(t_1))| \dots |\varphi(t_h, \xi(t_h))| < \infty, \quad \forall t_1, \dots, t_h \in A,$$

entonces la función

$$g(t_1, \dots, t_h) = \mathbf{M} \varphi(t_1, \xi(t_1)) \dots \varphi(t_h, \xi(t_h))$$

es boreliana, es decir, medible respecto de  $\mathfrak{B}_T^h$ .

En particular, todas las funciones de momento de un proceso medible son borelianas.

b. Si  $\varphi(t, x)$  es una función acotada  $\mathfrak{B}_T \times \mathfrak{B}_X$ -medible, entonces

$$\int_T \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt$$

existe para casi todos los  $\omega$ , esta integral es una magnitud  $\mathfrak{F}$ -medible y

$$\mathbf{M} \int_T \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt = \int_T \mathbf{M} \varphi(t, \xi(t, \omega)) dt$$

(esta afirmación es un corolario del teorema de Fubini).

c. Si es que  $\mathbf{M} |\xi(t, \omega)| < \infty$ , y  $\int_T \mathbf{M} |\xi(t, \omega)| dt < \infty$ , entonces

para casi todos los  $\omega$  existe  $\int_T \xi(t, \omega) dt$ .

9.2.2. Integración de los procesos aleatorios. Sea  $\xi(t)$  un proceso aleatorio continuo estocástico real y medible en el segmento  $[a, b]$ . Demos a conocer las condiciones en las cuales las funciones muestrales  $\xi(t)$  pertenecen, con la probabilidad 1, a  $L_p[a, b]$ , donde  $0 < p \leq \infty$ , es decir,

$$\mathbf{P} \left\{ \int_a^b |\xi(t)|^p dt < \infty \right\} = 1. \quad (2.4)$$

Designemos mediante  $\chi(g)$  la funcional característica del proceso

$$\chi(g) = \mathbf{M} \exp \left\{ i \int_a^b \xi(t) dg(t) \right\},$$

definida en las funciones escalonadas  $g$ , dadas en  $[a, b]$ .

Sean ahora:  $t_{nk} = a + \frac{k}{n}(b - a)$ ,  $k = 0, \dots, n$ ;  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots$  unas magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas en  $[0, 1]$ ;  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ , unas magnitudes aleatorias que no dependen una de la otra, ni tampoco de  $\eta_0, \eta_1, \dots$ ,

para las cuales

$$M e^{i t \xi_h} = e^{-|t|^p}$$

(es decir,  $\xi_h$  tienen distribución estable simétrica con el exponente  $p$ ).  
Introduzcamos en  $[a, b]$  un proceso aleatorio

$$v_n^p(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_j}{n^{1/p}} \varepsilon \left( t - t_{nj} - \frac{b-a}{n} \eta_j \right),$$

donde  $\varepsilon(t) = 0$  para  $t < 0$ ,  $\varepsilon(t) = 1$  para  $t \geq 1$ .

Como que  $v_n^p(t)$  es una función escalonada en  $[a, b]$ , queda definida la magnitud  $\chi(\lambda v_n^p)$ . Dado que  $v_n^p(\cdot)$  es una función aleatoria, entonces también  $\chi(\lambda v_n^p)$  será magnitud aleatoria.

Una condición necesaria y suficiente para que se cumpla (2.1) consiste en lo siguiente: para todos los  $\lambda$  positivos existe el límite

$$\Psi(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \chi(\lambda v_n^p),$$

que satisface la correlación:  $\Psi(0+) = 1$ . En este caso

$$\Psi(\lambda) = M \exp \left\{ -\frac{\lambda^p}{b-a} \int_a^b |\xi(t)|^p dt \right\}.$$

Supongamos que  $\xi(t)$  pertenece, con la probabilidad 1, a  $L_p[a, b]$ ,  $p \geq 1$ . Entonces para toda función acotada medible  $\varphi(t)$  en  $[a, b]$  queda definida con la probabilidad 1, la integral

$$\int_a^b \xi(t) \varphi(t) dt.$$

Por esta razón para tal proceso quedará definida también la funcional característica

$$\chi_1(\varphi) = M \exp \left\{ i \int_a^b \xi(t) \varphi(t) dt \right\}.$$

Las funcionales características  $\chi_1(\varphi)$  y  $\chi(g)$  están ligadas entre sí mediante las siguientes correlaciones

$$1) \chi_1(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} M \chi(v_n).$$

donde  $v_n$  es una sucesión de funciones aleatorias en  $[a, b]$  del tipo

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \varphi \left( t_{nj} + \frac{b-a}{n} \eta_j \right) \varepsilon \left( t - t_{nj} - \frac{b-a}{n} \eta_j \right),$$

donde  $\eta_j$  es una sucesión de magnitudes independientes e igualmente distribuidas en  $[0, 1]$ ;

2) si  $\xi(t)$  es un proceso continuo estocástico, entonces

$$\chi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_1(\varphi_n),$$

donde  $\varphi_n$  es tal sucesión de funciones medibles, que

$$\int_a^t \varphi_n(s) ds \rightarrow g(t) - g(a).$$

Examinemos a título de ejemplo el proceso de movimiento browniano  $w(t)$ . Para tal proceso

$$\chi(g) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \min[t, s] d_g(t) d_g(s) \right\},$$

de donde

$$\chi_1(\varphi) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \min[t, s] \varphi(t) \varphi(s) dt ds \right\}.$$

### 9.3. Separabilidad. Propiedades de las funciones muestrales

**9.3.1. Definición del proceso separable.** Al estudiar las propiedades de continuidad o de acotación de las funciones muestrales de procesos aleatorios un gran papel pertenece al concepto de separabilidad. Para los procesos aleatorios separables, si sólo se conocen sus valores en cierto conjunto numerable de valores  $t$ , se pueden hacer conclusiones sobre el comportamiento de las funciones muestrales para todos los  $t$ . Ya que el valor de las distribuciones de dimensiones finitas permite determinar las probabilidades sólo de aquellos sucesos (asociados con el proceso aleatorio) que se determinan mediante los valores del proceso en el conjunto numerable, entonces sin recurrir a la separabilidad resulta imposible determinar las probabilidades de tales sucesos como la continuidad (ausencia de discontinuidades de segunda especie), el carácter acotado o la diferenciabilidad del proceso aleatorio.

Sea  $\xi(t)$  un proceso aleatorio con el espacio fasico  $X$  en el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathcal{E}, P\}$  definido en el conjunto  $T$ . Se denomina separable, si existen un subconjunto  $I \subset T$ , numerable y denso en  $T$  y un conjunto  $\Lambda \in \mathcal{E}$ ,  $P(\Lambda) = 0$ , tales que para todos los conjuntos cerrados  $F \subset X$  y para todo intervalo  $(\alpha, \beta)$

$$\{\omega: \xi(t, \omega) \in F, t \in (\alpha, \beta) \cap I\} -$$

$$- \{\omega: \xi(t, \omega) \in F, t \in (\alpha, \beta) \cap T \subset \Lambda.$$

El conjunto  $I$  se llama conjunto de separabilidad del proceso.

Si, por ejemplo,  $\xi(t)$  es un proceso aleatorio numérico separable en  $[a, b]$  e  $I = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$ , entonces

$$P\left\{ \sup_{a \leq t \leq b} \xi(t) \leq x \right\} = P\left\{ \sup_{I_n} \xi(t_n) \leq x \right\} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\xi(t_1) \leq x, \dots, \xi(t_n) \leq x\}.$$

Resulta pues que, al pasar a los procesos estocásticos continuos, el proceso siempre puede ser transformado en separable. Esto lo confirma el siguiente teorema de J. L. Doob.

**Teorema 1.** *Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso aleatorio con el espacio fásico  $X$  que es un espacio euclídeo de dimensiones finitas y sea  $\hat{X}$  una cierta dilatación compacta de  $X$ . En este caso existe un proceso separable  $\xi'(t)$  con los valores en  $\hat{X}$ , que es estocásticamente equivalente a  $\xi(t)$ .*

Como  $X$  es un espacio compacto local, dicha dilatación compacta  $\hat{X}$  siempre existe. Si, por ejemplo,  $X$  es una recta, entonces con el fin de obtener la dilatación compacta es necesario añadir a  $X$  los puntos  $\pm \infty$ .

Aunque, en el caso general, no es posible indicar un conjunto de separabilidad para el proceso dado, no obstante para los procesos estocásticos continuos a título de conjunto de separabilidad puede servir cualquier conjunto numerable siempre denso  $I \subset T$ .

**9.3.2. Procesos continuos.** Si suponemos que  $\{F_T, \mathfrak{E}_T\}$  es un conjunto de todas las funciones con valores de  $X$ , determinados en  $T$  y  $\mathfrak{E}_T$  es una  $\sigma$ -álgebra generada por conjuntos cilíndricos, mientras que  $C_T$  es un espacio de todas las funciones continuas en  $T$  con valores de  $X$ , entonces para  $T$  no numerables  $C_T$  no pertenece a  $\mathfrak{E}_T$ . Por ello, si el proceso está construido tal como se ha indicado en el teorema de Kolmogórov (p. 9.1), entonces no hay sentido en hablar de la continuidad de las funciones muestrales del proceso. Para el proceso separable y conjunto cerrado  $T$ , el conjunto de funciones muestrales continuas ya es medible, puesto que

$$\begin{aligned} P\{(\omega : \xi(\cdot, \omega) \in C_T)\} = \\ = P\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{t, s \in I} \left\{\omega : |\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{m}\right\} \right. \\ \left. |t-s| \leq \frac{1}{h}\right\}. \end{aligned}$$

Aquí,  $I$  es un conjunto de separabilidad del proceso. La última probabilidad es la de las funciones muestrales continuas. Para que las funciones muestrales de un proceso separable sean continuas con la probabilidad 1, es necesario y suficiente, que para cierto conjunto  $I$ , numerable y denso en  $T$ , se cumpla la correlación

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcap_{t, s \in I} \left\{\omega : |\xi(t, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{m}\right\} \right) = 1, \\ |t-s| \leq \frac{1}{h}$$

Esta correlación requiere para su comprobación el conocimiento de todas las distribuciones finitas y, como regla, no es comprobable. El siguiente teorema de Kolmogórov proporciona cómodas condiciones suficientes de continuidad del proceso.

**Teorema 2.** *Sea  $\xi(t)$  un proceso separable dado en  $[a, b]$ . Si existen  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $K$  tales que para cualesquiera  $t, s \in [a, b]$*

$$M|\xi(t) - \xi(s)|^\alpha \leq K|t-s|^{1+\beta},$$

entonces  $\xi(t)$  es continuo con la probabilidad 1.



Veamos cómo se aplica este teorema a la cuestión acerca de la continuidad del proceso de Wiener. Para ésto, cuando  $t \geq s$ , la magnitud  $w(t) - w(s)$  tiene distribución normal con la media nula y la varianza  $t - s$ . Por esta razón

$$P\{w(t) - w(s) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du;$$

$$\begin{aligned} M|w(t) - w(s)|^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^\alpha e^{-\frac{u^2}{2(t-s)}} du = \\ &= |t-s|^{\alpha/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|^\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du. \end{aligned}$$

Las condiciones del teorema de Kolmogórov quedan cumplidas, si  $\alpha > 2$ ,  $\beta = \frac{\alpha}{2} - 1$ . Esto quiere decir, el proceso separable de Wiener es continuo con la probabilidad 1.

**9.3.3. Procesos sin discontinuidades de segunda especie.** Supongamos que en el segmento  $[a, b]$  está dado un proceso  $\xi(t, \omega)$  con el espacio fásico  $X$  que es un espacio euclídeo de dimensiones finitas. Designemos mediante  $D$  un conjunto de funciones  $x(t)$  con los valores de  $X$ , determinados en  $[a, b]$ , para las cuales, con  $t \in [a, b]$  están definidos los límites a la derecha, y con  $t \in (a, b)$ , los límites a la izquierda. Las funciones de  $D$  no tienen discontinuidades de segunda especie. Para que la función  $x(t)$  no tenga discontinuidades de segunda especie, es necesario y suficiente que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b} \min\{|x(s) - x(t)|, |x(u) - x(s)|\} = 0.$$

Sean  $\xi(t, \omega)$  un proceso separable e  $I$ , un conjunto de separabilidad. Entonces, con la probabilidad 1

$$\begin{aligned} &\sup_{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b} \min\{|\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)|, |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)|\} = \\ &= \sup_{\substack{a \leq t \leq s \leq u \leq t+h \leq b \\ t, s, u \in I}} \min\{|\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)|, |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)|\}. \end{aligned}$$

Por ésto, para un proceso separable, la condición necesaria y suficiente para que las funciones muestrales del proceso pertenezcan a  $D$ , es decir, para que el proceso con la probabilidad 1 no tenga discontinuidades de segunda especie consiste en el cumplimiento de la correlación

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{t=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{t, s, u \in I \\ a \leq t \leq s \leq u \leq t+\frac{1}{r} \leq b}} \left\{\omega_r: |\xi(s, \omega) - \xi(t, \omega)| \leq \frac{1}{r}\right\} \cup \right. \\ \left. \cup \left\{\omega: |\xi(u, \omega) - \xi(s, \omega)| \leq \frac{1}{r}\right\}\right) = 1. \end{aligned}$$

Con el fin de comprobar la pertenencia a  $D$  se puede utilizar el número de  $\varepsilon$ -oscilaciones de la función. Se dice que la función  $x(t)$  tiene en

$[a, b]$  no menos que  $k$   $\varepsilon$ -oscilaciones, si existen tales puntos  $t_0 < t_1 < \dots < t_k$  que

$$|x(t_{i+1}) - x(t_i)| \geq \varepsilon, \quad i = 0, \dots, k-1.$$

Para que  $x(\cdot) \in D$ , es necesario y suficiente que para todos los  $\varepsilon > 0$  la función  $x(t)$  tenga en  $[a, b]$  un número finito de  $\varepsilon$ -oscilaciones.

Si  $\xi(t, \omega)$  es un proceso separable e  $I$  es un conjunto de separabilidad, entonces  $\xi(\cdot, \omega) \in D$  con la probabilidad 1, si para todo  $\varepsilon > 0$   $\xi(\cdot, \omega)$  tiene con la probabilidad 1 un número finito de  $\varepsilon$ -oscilaciones en  $I$ . Sea  $I = \bigcup_n I_n$ , donde  $I_n$  es una sucesión creciente de conjuntos

finitos. Si  $v_\varepsilon$  es el número de  $\varepsilon$ -oscilaciones en  $I$ , y  $v_\varepsilon^n$  es el número de  $\varepsilon$ -oscilaciones en  $I_n$ , entonces  $v_\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} v_\varepsilon^n$ . Conociendo la distribu-

ción conjunta de las magnitudes  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$ , donde  $I_n = \{t_1, \dots, t_n\}$ , podemos calcular la distribución  $v_\varepsilon^n$  y luego, pasando al límite, la distribución  $v_\varepsilon$  y comprobar la condición de que  $P\{v_\varepsilon < \infty\} = 1$ .

Las condiciones citadas de la ausencia en un proceso de las discontinuidades de segunda especie requieren el conocimiento de todas las distribuciones de dimensiones finitas del proceso y el cálculo de las probabilidades de sucesos muy complejos. Demos a conocer ciertas condiciones de la ausencia de las discontinuidades de segunda especie que se comprueban con facilidad.

**Teorema 3.** Sea  $\xi(t)$  un proceso separable en el segmento  $[a, b]$ , para el cual existen  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $K$  tales que con  $t < s < u$

$$M(|\xi(u) - \xi(s)| | \xi(s) - \xi(t)|^\alpha) \leq K(u-t)^{\alpha+\beta}.$$

En este caso, con la probabilidad 1 el proceso  $\xi(t)$  no tiene discontinuidades de segunda especie.

A título de ejemplo examinemos un proceso de Poisson del parámetro  $a$ . Para este proceso las magnitudes  $\xi(u) - \xi(s)$  y  $\xi(s) - \xi(t)$  son independientes. Al tomar  $\alpha = 1$ , tendremos

$$\begin{aligned} M(|\xi(u) - \xi(s)| | \xi(s) - \xi(t)|) &= \\ &= M(|\xi(u) - \xi(s)|) M|\xi(s) - \xi(t)| = \\ &= a^2(u-s)(s-t) \leq a^2(u-t)^2. \end{aligned}$$

De este modo, las condiciones del teorema quedan cumplidas para  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $K = a^2$ . Esto significa que el proceso separable de Poisson no tiene discontinuidades de segunda especie.

El teorema que sigue emplea las distribuciones condicionales del proceso. Sea  $\xi(t)$  cierto proceso. Designaremos con  $\mathfrak{F}_t^\xi$  la  $\sigma$ -álgebra mínima, respecto de la cual son medibles las magnitudes  $\xi(u)$  para  $u \leq t$ .

**Teorema 4.** Sea  $\xi(t)$  un proceso separable dado en  $[a, b]$ . Si existe una función (no aleatoria)  $\varphi_\varepsilon(h)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $h > 0$ , tal que  $\varphi_\varepsilon(h) \downarrow 0$ , cuando  $h \downarrow 0$  y con la probabilidad 1 se verifica

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon / \sqrt{\varphi_\varepsilon^2}\} \leq \varphi_\varepsilon(h),$$

entonces el proceso  $\xi(t)$  con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie.

El último teorema es cómodo para aplicarlo en el caso de procesos con incrementos independientes. Así se llama un proceso  $\xi(t)$ , para el cual las magnitudes  $\xi(t_0)$ ,  $\xi(t_1) - \xi(t_0)$ , ...,  $\xi(t_h) - \xi(t_{h-1})$  son independientes para  $t_0 < t_1 < \dots < t_h$ . Para los procesos con incrementos independientes la magnitud  $\xi(t+h) - \xi(t)$  no depende de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t^\xi$  ( $h > 0$ ), razón por la cual

$$P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon / \mathfrak{F}_t^\xi\} = P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon\}.$$

Como un proceso continuo estocástico será a la vez continuo y estocástico uniformemente, entonces,

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{a \leq t < t+h \leq b} P\{|\xi(t+h) - \xi(t)| > \varepsilon\} = 0.$$

Por consiguiente, todo proceso separable continuo estocástico de incrementos independientes no tiene con la probabilidad 1 discontinuidades de segunda especie.

**9.3.4. Condiciones de continuidad para los procesos sin discontinuidades de segunda especie.** Sea  $x(t)$  una función de  $D$ . Elijamos una sucesión de particiones del segmento  $[a, b]$ :  $a = t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nn} = b$ , para la cual  $\max_h (t_{nh+1} - t_{nh}) \rightarrow 0$ . Si  $n_\varepsilon$  es el número de discontinuidades del proceso  $x(t)$ , superiores a  $\varepsilon > 0$ , entonces

$$n_\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_{\varepsilon, \infty}(|x(t_{nk+1}) - x(t_{nk})|),$$

donde  $\chi_A$  es el indicador del conjunto  $A$ . Por ello, si el número de discontinuidades del proceso aleatorio  $\xi(t, \omega)$ , superiores a  $\varepsilon > 0$ , lo designamos con  $v_\varepsilon$ , entonces

$$\begin{aligned} Mv_\varepsilon &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} M\chi_{\varepsilon, \infty}(|\xi(t_{nk+1}) - \xi(t_{nk})|) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{\infty} P\{|\xi(t_{nh+1}) - \xi(t_{nh})| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Para que el proceso sea continuo, es necesario y suficiente que  $v_\varepsilon = 0$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Así pues, para la continuidad de un proceso, el cual con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie es suficiente que para todo  $\varepsilon > 0$  se verifique

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n-1} P\{|\xi(t_{nh+1}) - \xi(t_{nh})| > \varepsilon\} = 0. \quad (3.1)$$

Como el proceso separable con incrementos independientes no tiene discontinuidades de segunda especie, siempre que sea continuo estocástico, en tanto que la condición (3.1) lleva consigo una continuidad estocástica, entonces (3.1) es suficiente para que el proceso separable  $\xi(t)$  con incrementos independientes sea continuo con la probabilidad 1. Resulta que esta condición es también necesaria para la continuidad de un proceso con incrementos independientes.

*La condición (3.1) es necesaria y suficiente para que un proceso separable con incrementos independientes  $\xi(t)$  sea continuo con la probabilidad 1.*

## 9.4. Continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios

9.4.1. **Medidas correspondientes a los procesos aleatorios.** Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso aleatorio dado en el conjunto  $T$  con el espacio fásico  $X$ ,  $F_T$  es el espacio de todas las funciones  $x(t)$  definidas en  $T$  con los valores de  $X$ ;  $\mathfrak{E}_T$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos  $F_T$  en la que están contenidos todos los conjuntos cilíndricos. La medida  $\mu_{\xi}$ , definida en  $\mathfrak{E}_T$  por la correlación

$$\mu_{\xi}(A) = P \{ \xi(\cdot) \in A \}, \quad A \in \mathfrak{E}_T,$$

se denomina medida correspondiente al proceso  $\xi(\cdot)$ . A veces, en lugar de  $F_T$  se considera otro conjunto tal de funciones (por ejemplo,  $\mathcal{M}_T$  que es un espacio de funciones medibles,  $D_T$  que es un espacio de funciones sin discontinuidades de segunda especie,  $C_T$  que es un espacio de funciones continuas) que las funciones muestrales del proceso pertenecen con la probabilidad 1 a este conjunto. Toda función  $\varphi(x(\cdot)) \in \mathfrak{E}_T$ -medible determina cierta funcional del proceso, o sea, la magnitud aleatoria  $\varphi(\xi(\cdot))$ . Supongamos que con la probabilidad 1 el proceso pertenece a  $D_T$ . Aquí, dichas funcionales serán, por ejemplo,

$$\sup_{t \in T} |\xi(t)|, \quad \int_T f(t, \xi(t)) dt,$$

donde  $f(t, x)$  es una función acotada medible.

Conociendo la medida que corresponde al proceso, podemos determinar la distribución de cualquier funcional del proceso. Con este objeto se puede recurrir a la fórmula: si  $\varphi(x(\cdot))$  es una funcional acotada  $\mathfrak{E}_T$ -medible, entonces

$$M\varphi(\xi(\cdot)) = \int_{F_T} \varphi(x) \mu_{\xi}(dx).$$

Por eso, para toda funcional  $\varphi(x(\cdot)) \in \mathfrak{E}_T$ -medible la función característica de la magnitud  $\varphi(\xi(\cdot))$  se definirá mediante la igualdad

$$Me^{i\lambda\varphi}(\xi(\cdot)) = \int_{F_T} e^{i\lambda\varphi(x)} \mu_{\xi}(dx).$$

9.4.2. **Continuidad absoluta de las medidas.** Una de las cuestiones consideradas en la teoría de las medidas, correspondientes a los procesos aleatorios, es la de continuidad absoluta (la singularidad) de estas medidas. He aquí algunas definiciones necesarias. Sea  $X$  un conjunto en el cual se ha escogido la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos  $\mathfrak{B}$ . El par  $(X, \mathfrak{B})$  se denomina espacio medible. Supongamos que en  $(X, \mathfrak{B})$  están dadas dos medidas  $\mu$  y  $\nu$ . Se dice que la medida  $\mu$  es absolutamente continua (se denota  $\mu \ll \nu$ ) respecto a la medida  $\nu$ , si  $\mu(A) = 0$  para todos los  $A \in \mathfrak{B}$ , para los cuales  $\nu(A) = 0$ . Si  $\mu \ll \nu$  y  $\nu \ll \mu$ , suele decirse que  $\mu$  y  $\nu$  son equivalentes (se denota  $\mu \sim \nu$ ). Las medidas  $\mu$  y  $\nu$  son singulares o bien ortogonales ( $\mu \perp \nu$ ), si existe tal conjunto  $S \in \mathfrak{B}$  que  $\mu(S) = 0$ ,  $\nu(X \setminus S) = 0$ . Cualesquiera que sean  $\mu$  y  $\nu$ , siempre es posible la representación  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ , donde  $\mu_1 \sim \nu_1$ ,  $\mu_2 \perp \nu_1$ ,  $\nu_2 \perp \mu$ .

**Teorema de Radon-Nikodym.** Si  $\mu$  y  $\nu$  son medidas finitas y  $\mu \ll \nu$ , entonces existe tal función  $\mathfrak{B}$ -medible  $\rho(x)$ , que para todos los  $A \in \mathfrak{B}$  se verifica

$$\mu(A) = \int_A \rho(x) \nu(dx).$$

Esta función se determina unívocamente con la exactitud salvo los conjuntos de medida nula  $\nu$ ;  $\rho(x)$  se denomina densidad de la medida  $\mu$  respecto a la medida  $\nu$  o derivada y se designa por  $\frac{d\mu}{d\nu}(x)$ .

Para los procesos aleatorios se estudian las condiciones: 1) de continuidad absoluta de una medida respecto de la otra; 2) de singularidad recíproca de las medidas; 3) en el caso de continuidad absoluta se calcula la densidad de una medida respecto de la otra. Señalemos aquí aquellas aplicaciones que pueden ser obtenidas al estudiar las cuestiones de continuidad absoluta.

Si se sabe que para dos procesos aleatorios  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$  se tiene que  $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$ , entonces todo suceso que tiene probabilidad 1 para el proceso  $\xi_2(t)$ , contará con la misma probabilidad para el proceso  $\xi_1(t)$ . En particular, si las funciones muestrales del proceso  $\xi_2(t)$  poseen con la probabilidad 1 cierta propiedad (son continuas, no tienen discontinuidades de segunda especie, son medibles, derivables, etc.), existe un proceso  $\xi_1'(t)$ , equivalente estocásticamente a  $\xi_1(t)$ , cuyas funciones muestrales poseen, con la probabilidad 1, aquella misma propiedad. Si, además, se conoce la densidad  $\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(x(\cdot))$ , entonces el cálculo de las esperanzas matemáticas de las funcionales del proceso  $\xi_1(\cdot)$  se puede reducir al cálculo de las esperanzas matemáticas de las funcionales del proceso  $\xi_2(\cdot)$ , haciendo uso de la fórmula

$$M\varphi(\xi_1(\cdot)) = M\varphi(\xi_2(\cdot)) \frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)).$$

Esta fórmula permite calcular también las distribuciones de las funcionales:

$$\begin{aligned} P\{\varphi(\xi_1(\cdot)) < \lambda\} &= M\chi_{(-\infty, \lambda)}(\varphi(\xi_1(\cdot))) = \\ &= M\chi_{(-\infty, \lambda)}(\varphi(\xi_2(\cdot))) \frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)), \end{aligned}$$

donde  $\chi_{(-\infty, \lambda)}$  es el indicador del intervalo  $(-\infty, \lambda)$ .

Si se ha establecido que  $\mu_{\xi_1} \perp \mu_{\xi_2}$  y está indicado aquel conjunto  $S$ , para el cual  $\mu_{\xi_1}(S) = 1$ ,  $\mu_{\xi_2}(S) = 0$ , podríamos solucionar el siguiente problema estadístico. Se observa un proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , cuyas distribuciones de dimensiones finitas se desconocen. Sólo sabemos que la medida que corresponde a este proceso es o  $\mu_{\xi_1}$ , o bien  $\mu_{\xi_2}$ . Es necesario determinar, sobre la base de las observaciones, cuál de estas dos medidas corresponde a  $\xi(t)$ . (Por ejemplo, al detectar una señal en el fondo de un ruido aleatorio,  $\mu_{\xi_1}$  es la distribución del ruido puro,  $\mu_{\xi_2}$  es la distribución de la señal con el ruido. Es necesario de-

terminar, a base de las observaciones, si hay o no señales). La solución del problema es, evidentemente, la siguiente si  $\xi(\cdot) \in S$ , consideramos que  $\mu_{\xi} = \mu_{\xi_1}$ ; si  $\xi(\cdot) \notin S$ , entonces  $\mu_{\xi} = \mu_{\xi_2}$ .

9.4.3. Continuidad absoluta de las medidas correspondientes a los procesos aleatorios. Supongamos que los procesos  $\xi_t(t)$  están definidos y son estocásticos continuos en el conjunto  $T$  y que  $T_n$  es tal sucesión creciente de conjuntos finitos que  $\cup T_n$  es denso en  $T$ . Designaremos mediante  $\mathfrak{E}_{T_n}$  la  $\sigma$ -álgebra generada por los conjuntos cilíndricos con sus bases en  $T_n$ . Si  $T_n = \{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}\}$ , entonces los conjuntos  $A$  de  $\mathfrak{E}_{T_n}$  tienen la forma

$$\{x(\cdot) : (x(t_{n1}), \dots, x(t_{nk_n})) \in B_{k_n}\},$$

donde  $B_{k_n}$  es un conjunto boreliano arbitrario de  $R^{k_n}$  (es decir, de un espacio euclideo  $k_n$ -dimensional),  $(x_1, \dots, x_{k_n})$  es un punto de este espacio de coordenadas  $x_i$ .

Denotemos con  $\mu_{\xi_1}^{T_n}$  la contracción de la medida  $\mu_{\xi_1}$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{E}_{T_n}$ . La medida  $\mu_{\xi_1}^{T_n}$  se determina unívocamente por la función

$$P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(1)}(A_1, \dots, A_{k_n}) = P\{\xi_1(t_{n1}) \in A_1, \dots, \xi_1(t_{nk_n}) \in A_{k_n}\}.$$

Tienen lugar las siguientes afirmaciones.

1) si  $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$ , entonces para todo  $n$ ,  $\mu_{\xi_1}^{T_n} \ll \mu_{\xi_2}^{T_n}$

$$P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(1)}(A_1, \dots, A_{k_n}) =$$

$$= \int_{A_1} \dots \int_{A_{k_n}} g_n(x_1, \dots, x_{k_n}) P_{t_{n1}, \dots, t_{nk_n}}^{(2)}(dx_1, \dots, dx_{k_n}) \quad (4.1)$$

siendo en este caso

$$\frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(x(\cdot)) = g_n(x(t_{n1}), \dots, x(t_{nk_n}));$$

2) sea  $\mathfrak{E}_{T_n}^{\xi_2}$  una  $\sigma$ -álgebra engendrada por las magnitudes  $\xi_2(t_{ni})$ ,  $i=1, \dots, k_n$ . Entonces

$$\frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(\xi_2(\cdot)) = M \left( \frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)) / \mathfrak{E}_{T_n}^{\xi_2} \right);$$

3) supongamos que para todo  $n$  existe una función  $g_n$  tal que queda cumplida (4.1) para todos los conjuntos borelianos  $A_1, \dots, A_{k_n}$  de  $R^1$ . En este caso, con la probabilidad 1, existe el límite

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(\xi_2(t_{n1}), \dots, \xi_2(t_{nk_n})).$$

Si con ello  $M\rho = 1$ , entonces  $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$  y

$$\frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_2(\cdot)) = \rho.$$

4) supongamos que la función  $g_n$  es tal que se cumple (4.1),  $\rho_n = g_n(\xi_2(t_{n1}), \dots, \xi_2(t_{nkn}))$  y que la sucesión  $\rho_n$  es uniformemente integrable, entonces  $M\rho = 1$ . En particular, esto quedará cumplido, si para cierta función  $\psi(\lambda)$ , para la cual  $\psi(\lambda) \uparrow +\infty$  con  $\lambda \uparrow +\infty$ ,  $\sup_n M\rho_n \psi(\rho_n) < \infty$  (por ejemplo, para cierto  $\alpha > 1$ ,  $\sup_n M\rho_n^\alpha < \infty$ );

5) supongamos que las funciones  $g_n$ , que satisfacen (4.1), son positivas. En este caso, con la probabilidad 1, existe el límite

$$\rho_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{g_n(\xi_1(t_{n1}), \dots, \xi_1(t_{nkn}))\}^{-1}.$$

Si  $P\{\rho_1 = 0\} = 0$ , entonces  $\mu_{\xi_1} \sim \mu_{\xi_2}$  y

$$\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}(\xi_2(\cdot)) = \rho, \quad \rho_1 = \frac{d\mu_{\xi_2}}{d\mu_{\xi_1}}(\xi_1(\cdot)).$$

EjemPlo. Supongamos que  $\xi_2(t) = w(t)$ ,  $\xi_1(t) = w(t) + a(t)$ , donde  $w(t)$  es un proceso de Wiener,  $a(t)$  es una función continua,  $a(0) = 0$ . Hallemos las condiciones con las cuales  $\mu_{\xi_1} \ll \mu_{\xi_2}$ , si  $T = [0, 1]$ .

Sea  $T_n = \left\{ \frac{k}{2^n}, k=0, 1, \dots, 2^n \right\}$ . Aprovechando la circunstancia de que  $\xi_t \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - \xi_t \left( \frac{k}{2^n} \right)$ , para  $k=0, \dots, 2^n-1$ , son independientes entre sí y tienen distribución normal con la varianza  $\frac{1}{2^n}$  y las medias: 0 para  $t=2$ ;  $a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right)$  para  $t=1$ , nos convencemos de que

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_{\xi_1}^{T_n}}{d\mu_{\xi_2}^{T_n}}(w(\cdot)) &= \exp \left\{ \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left[ a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[ w \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - w \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] - \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[ a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Esta magnitud tiene un límite distinto de cero, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[ a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 < \infty.$$

La última condición lleva a la existencia de la derivada  $a'(t)$ , de cuadrado integrable, y, en este caso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n} \left\{ 2^n \left[ a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] \right\}^2 = \int_0^1 [a'(t)]^2 dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^n \left[ a \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - a \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] \left[ \omega \left( \frac{k+1}{2^n} \right) - \omega \left( \frac{k}{2^n} \right) \right] = \int_0^1 a'(t) d\omega(t)$$

(la definición de esta integral se da en el p. 19.2).

De este modo,

$$\rho = \exp \left\{ \int_0^1 a'(t) d\omega(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 [a'(t)]^2 dt \right\}. \quad (4.2)$$

Como  $\int_0^1 a'(t) d\omega(t)$  es una magnitud distribuida en conformidad

con la ley normal, teniendo la media 0 y la varianza  $\int_0^1 [a'(t)]^2 dt$ , entonces  $M\rho = 1$ . Así pues, el segundo miembro en (4.2) nos da la densidad  $\frac{d\mu_{\xi_1}}{d\mu_{\xi_2}}$  en el caso de que exista  $a'(t)$  de cuadrado integrable. En el caso contrario  $\mu_{\xi_2} \perp \mu_{\xi_1}$ .



## Capítulo 10

### TEORÍA $\mathcal{L}_2$

#### 10.1. Espacio de las magnitudes aleatorias de Hilbert $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$

**10.1.1. Definición. Convergencia.** Una totalidad de magnitudes aleatorias de valores complejos  $\xi$ , dadas en el espacio probabilístico  $\{\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P}\}$ , con el segundo momento finito  $\mathbf{M}|\xi|^2 < \infty$  forma un espacio lineal normado de Hilbert  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$  con el producto escalar

$$(\xi, \eta) = \mathbf{M}\overline{\xi}\eta \quad (1.1)$$

y la norma

$$\|\xi\| = [\mathbf{M}|\xi|^2]^{1/2}. \quad (1.2)$$

Con la ayuda de la norma se determina la distancia entre las magnitudes aleatorias de  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$

$$\rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|.$$

Las magnitudes aleatorias  $\xi$ , pertenecientes a  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$  se denominan **magnitudes aleatorias de Hilbert**.

Las magnitudes aleatorias de Hilbert  $\xi$  y  $\eta$  se llaman ortogonales, si  $\mathbf{M}\overline{\xi}\eta = 0$ .

La definición citada de  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$  queda en vigor también en una situación más general para los elementos aleatorios cuyos valores se encuentran en el espacio completo medible de Hilbert  $\mathcal{H}$ . En este último caso  $\overline{\xi}\eta$  significa un producto escalar en  $\mathcal{H}$ ,  $|\xi|^2 = \overline{\xi}\xi$ .

La convergencia en el espacio  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathcal{E}, \mathbf{P})$  se determina en la media cuadrática:

$$\text{l. i. m.}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi,$$

si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n - \xi\| = 0$ , o bien, en la forma equivalente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}|\xi_n - \xi|^2 = 0.$$

De la convergencia en media cuadrática (m.c.) proviene la convergencia en probabilidad. Lo recíproco no es cierto.

No obstante, si  $|\xi_n| < \eta \in \mathcal{L}_2$ , entonces de la convergencia de  $\xi_n$  en probabilidad proviene también la convergencia en media cuadrática.

**10.1.2. Covariación, propiedad característica.** Una función aleatoria de Hilbert  $\xi(x)$ ,  $x \in \mathcal{X}$  se da por la totalidad de magnitudes aleatorias de Hilbert  $\xi(x)$ , dependientes del parámetro  $x$ , que toma los valores en cierto conjunto paramétrico  $\mathcal{X}$ .

Llamamos **covariación**  $B(x, y)$  de una función aleatoria de Hilbert  $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$  la función

$$B(x, y) = M \zeta(x) \bar{\zeta}(y); \quad x, y \in \mathcal{X}.$$

La covariación  $B(x, y)$  es una función positivamente definida:

$$\sum_{h, r=1}^n B(x_h, x_r) z_h \bar{z}_r \geq 0$$

para cualesquiera  $n \geq 1$ ,  $x_h \in \mathcal{X}$  y para los números complejos  $z_h$ . Con ello

$$\sum_{h, r=1}^n B(x_h, x_r) z_h \bar{z}_r = M \left| \sum_{h=1}^n \zeta(x_h) z_h \right|^2$$

La definición positiva es una propiedad característica de la covariación.

**Teorema 1.** Para que la función  $B(x, y)$  sea covariacional es necesario y suficiente que sea positivamente definida.

Las propiedades de las funciones aleatorias de Hilbert expresadas en términos de las propiedades de la función covariacional se llaman **propiedades covariacionales** o **propiedades de segundo orden**.

**10.1.3. Continuidad de una función aleatoria.** Sea  $\mathcal{X}$  un espacio métrico con la métrica  $\rho$ .

**Definición 1.** Una función aleatoria de Hilbert  $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$  se llama **continua (en media cuadrática)** en el punto  $x_0$ , si

$$M |\zeta(x) - \zeta(x_0)|^2 \rightarrow 0 \quad \text{para } \rho(x, x_0) \rightarrow 0.$$

**Teorema 2.** Para que  $\zeta(x)$  sea continua en el punto  $x_0$ , es necesario y suficiente que la covariación  $B(x, y) = M \zeta(x) \bar{\zeta}(y)$  sea continua en el punto  $(x_0, x_0)$ .

**Corolario.** Si la covariación  $B(x, y)$  es continua en todo punto diagonal  $(x_0, x_0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , es también continua en todos los puntos  $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ .

Observemos que de la continuidad (en m.c.) de una función aleatoria  $\zeta(x)$  no proviene la continuidad de sus funciones muestrales.

**10.1.4. Diferenciabilidad de una función aleatoria.** Sea  $x = (a, b)$  un intervalo de un eje real.

**Definición 2.** Una función aleatoria de Hilbert  $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$  es **derivable (en m.c.)** en el punto  $x_0$ , si existe

$$\zeta'(x_0) = \text{l.i.m.}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\zeta(x_0 + h) - \zeta(x_0)]; \quad x_0, x_0 + h \in (a, b).$$

La magnitud aleatoria  $\zeta'(x_0)$  se denomina **derivada (m.c.)** de la función aleatoria  $\zeta(x)$  en el punto  $x_0$ .

**Teorema 3.** Una función aleatoria de Hilbert  $\{\zeta(x), x \in (a, b)\}$  es derivable en todo punto  $x_0$  del intervalo  $(a, b)$ , cuando, y sólo cuando, existe la derivada mixta generalizada de segundo orden de la covariación

$$\frac{\partial^2 B(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x=y} = \lim_{h, h_1 \rightarrow 0} \frac{1}{hh_1} [B(x_0 + h, x_0 + h_1) - B(x_0, x_0 + h_1) - B(x_0 + h, x_0) + B(x_0, x_0)].$$

En este caso

$$M \zeta' (x) \bar{\zeta}' (y) = \frac{\partial^2 B (x, y)}{\partial x \partial y} ;$$

$$M \zeta' (x) \bar{\zeta} (y) = \frac{\partial B (x, y)}{\partial x} .$$

10.1.5. Integración de una función aleatoria. Supongamos que  $\mathcal{X}$  es un espacio métrico separable completo con la medida  $\sigma$ -finita  $m(dx)$  y que  $m(\mathcal{X}) < \infty$ .

Definición 3. Para la función aleatoria medible  $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$  la integral de Lebesgue se determina del modo siguiente:

$$\int_{\mathcal{X}} \zeta(x) m(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \zeta_n(x) m(dx), \quad (1.3)$$

donde  $\zeta_n(x)$  es una sucesión monótona no decreciente de funciones aleatorias que toman un número finito de valores y son tales que  $\zeta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n(x)$  con la probabilidad 1.

Observación. La integral de Lebesgue (1.3) puede definirse también como un límite (en m.c.) de las sumas integrales lebesguianas

$$\int_{\mathcal{X}} \zeta(x) m(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \zeta(x_k) m(\Delta x_k), \quad (1.4)$$

donde

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^n \Delta x_k, \quad x_k \in \Delta x_k.$$

Teorema 4. Si es finita la integral

$$\int_{\mathcal{X}} B(x, x) m(dx) < \infty \quad (1.5)$$

y  $m(\mathcal{X}) < \infty$ , entonces para la función aleatoria medible  $\{\zeta(x), x \in \mathcal{X}\}$  es finita, con la probabilidad 1, la integral de Lebesgue (1.3) que puede ser definida o por la correlación (1.4), o bien para cada realización de  $\zeta(x)$ . En este caso

$$M \int_{\mathcal{X}} |\zeta(x)|^2 m(dx) = \int_{\mathcal{X}} B(x, x) m(dx).$$

Corolario. Supongamos que las funciones  $f_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ , pertenecen a  $\mathcal{L}_2(\mathcal{X}, \mathfrak{F}, m)$  y está cumplida la condición (1.5). En este caso, con la probabilidad 1, existen las integrales

$$\eta_{it} = \int_{\mathcal{X}} f_i(x) \zeta(x) m(dx), \quad i = 1, 2,$$

y

$$M \eta_{11} \bar{\eta}_{12} = \int_{\mathcal{C}} \int_{\mathcal{C}} f_1(x) B(x, y) \bar{f}_2(y) m(dx) m(dy),$$

Observación. Una integral impropia (en m.c.) se define del modo siguiente:

$$\int_a^{\infty} \zeta(t) dt = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \zeta'(t) dt. \quad (1.6)$$

Para que exista la integral impropia (1.6), es necesario y suficiente que exista

$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \int_a^N \int_a^M B(t, s) dt ds.$$

10.1.6. Desarrollo en series ortogonales. Sea  $\{\zeta(x), x \in [a, b]\}$  una función aleatoria continua de Hilbert con la covariación  $B(x, y)$ . De acuerdo con la teoría de las ecuaciones integrales el núcleo  $B(x, y)$  puede ser desarrollado en una serie uniformemente convergente según sus funciones propias  $\varphi_n(x)$ :

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}, \quad (1.7)$$

donde

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_a^b B(x, y) \varphi_n(y) dy, \quad \int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = \delta_{nm}, \quad (1.8)$$

con la particularidad de que los números propios  $\lambda_n$  son positivos. Hagamos

$$\xi_n = \int_a^b \zeta(x) \overline{\varphi_n(x)} dx. \quad (1.9)$$

Entonces (véase el corolario del teorema 4)

$$M \xi_n \bar{\xi}_m = \int_a^b \int_a^b B(x, y) \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(y)} dx dy = \lambda_n \delta_{nm} \quad (1.10)$$

y

$$M \zeta^*(x) \xi_n = \int_a^b B(x, y) \varphi_n(y) dy = \lambda_n \varphi_n(x). \quad (1.11)$$

De suerte que la sucesión de magnitudes aleatorias  $\xi_n, n \geq 1$ , es ortogonal.

**Teorema 5.** Una función aleatoria de Hilbert  $\zeta(x)$ , medible y continua (en m.c.), puede ser representada en el intervalo cerrado  $[a, b]$  por la serie

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(x), \quad (1.12)$$

que converge en  $\mathcal{L}_2$  con todo  $x \in [a, b]$ .

En este desarrollo,  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es una sucesión ortogonal de magnitudes aleatorias con  $M|\xi_n|^2 = \lambda_n$ ,  $\lambda_n$  son números propios,  $\varphi_n(x)$  son funciones propias de la covarianza  $B(x, y)$  de la función aleatoria  $\zeta(x)$ .

**Observación.** Si la función aleatoria  $\zeta(x)$  tiene distribución gaussiana para todo  $x$ , las magnitudes aleatorias  $\xi_n$  en el desarrollo (1.12) son magnitudes gaussianas independientes y la serie (1.12) converge con la probabilidad 1.

**Ejemplo.** El proceso del movimiento browniano  $\zeta(t)$  en el segmento  $[0, 1]$  con  $\zeta(0) = 0$ ,  $M\zeta(t) = 0$ ,  $D\zeta(t) = t$  y  $B(t, s) = M\zeta(t)\zeta(s) = \min(t, s)$  puede representarse en forma de la serie ortogonal

$$\zeta(t) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi},$$

donde  $\xi_n$  es una sucesión de magnitudes aleatorias gaussianas independientes con los parámetros  $M\xi_n = 0$ ,  $D\xi_n = 1$ .

## 10.2. Medidas e integrales estocásticas

**10.2.1. Definición de la integral estocástica.** Sean:  $\{\Omega, \sigma, P\}$  un espacio probabilístico,  $E$  cierto conjunto y  $\mathfrak{M}$ , un semianillo de los subconjuntos de  $E$ .

Una familia de magnitudes aleatorias de Hilbert  $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{M}\}$  que satisface las condiciones: 1)  $\zeta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2) \times (\text{mod } P)$ , si  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ ; 2)  $M\zeta(\Delta_1)\zeta(\Delta_2) = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ , donde  $m(\Delta)$  es una función de los conjuntos en  $\mathfrak{M}$ ; 3)  $\zeta(\emptyset) = 0$ ,  $m(\emptyset) = 0$ , se denomina **medida estocástica ortogonal elemental**, mientras que  $m(\Delta)$  es su **función estructural**.

La ortogonalidad de la medida estocástica  $\zeta(\Delta)$  se desprende de la propiedad 2):  $M\zeta(\Delta_1)\zeta(\Delta_2) = 0$ , si  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ .

La función estructural  $m(\Delta)$  es una medida elemental en el semianillo  $\mathfrak{M}$ , puesto que es no negativa:  $m(\Delta) = M|\zeta(\Delta)|^2 \geq 0$ ,  $m(\emptyset) = 0$  y aditiva:  $m(\Delta_1 \cup \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$ , si  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ .

La **integral estocástica** de una función sencilla  $f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}(x)$ ,  $\Delta_h \in \mathfrak{M}$ , definida en  $E$ , según la medida estocástica elemental  $\zeta(\Delta)$  se determina mediante la correlación

$$\int f(x)\zeta(dx) = \sum_{h=1}^n c_h \zeta(\Delta_h). \quad (2.1)$$

Supongamos que la medida elemental  $m(\Delta)$  es semiaditiva y, por ello, puede ser prolongada hasta una medida completa  $\{E, \mathfrak{B}, m\}$ . Introduzcamos un espacio de Hilbert  $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$  de las funciones que por producto escalar tienen

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} m(dx).$$

**Definición.** Una integral estocástica de  $f(x)$   $\mathcal{L}_2(E, \mathcal{L}m)$  extendida a la medida estocástica elemental  $\zeta(\Delta)$ , se determina por la correlación

$$\int f(x) \zeta(dx) = \text{l.i.m.}_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \zeta(dx) \quad (2.2)$$

para una sucesión arbitraria de funciones sencillas  $f_n(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$  tales que

$$\int |f(x) - f_n(x)|^2 m(dx) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

**Teorema 1.** Para una sucesión arbitraria de las funciones  $f_n(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$  tales que se cumple la condición (2.3) tiene lugar la correlación (2.2). Para cualesquiera  $f(x)$  y  $g(x)$  de  $\mathcal{L}_2(E, \mathcal{L}m)$  se cumplen las igualdades:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \zeta(dx) = \alpha \int f(x) \zeta(dx) + \beta \int g(x) \zeta(dx), \quad (2.4)$$

donde  $\alpha, \beta$  son constantes arbitrarias;

$$M \int f(x) \zeta(dx) \int \overline{g(x) \zeta(dx)} = \int f(x) \overline{g(x)} m(dx). \quad (2.5)$$

**Observación.** La igualdad (2.5) significa una correspondencia isométrica entre  $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$  y  $\mathcal{L}_2(\zeta)$ , que es un espacio de Hilbert de las magnitudes aleatorias  $\eta = \int f(x) \zeta(dx)$ , donde  $f(x) \in \mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$ .

La correlación isométrica que existe entre  $\mathcal{L}_2(E, \mathfrak{B}, m)$  y  $\mathcal{L}_2(\zeta)$  se la puede tomar de base para determinar la integral estocástica.

Sea  $L_0$  una clase de todos los conjuntos  $A \in \mathfrak{B}$ , para los cuales  $m(A) < \infty$ . La función aleatoria de los conjuntos

$$\tilde{\zeta}(A) = \int \chi_A(x) \zeta(dx) = \int_A \zeta(dx) \quad (2.6)$$

es una medida ortogonal estocástica en  $L_0$ , satisfaciendo a las siguientes condiciones:

$$a) \tilde{\zeta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\zeta}(A_n),$$

si  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L_0$  y  $A_k \cap A_r = \emptyset$ , cuando  $k \neq r$ .

$$b) M \tilde{\zeta}(A) \tilde{\zeta}(B) = m(A \cap B), \quad A, B \in L_0;$$

$$c) \tilde{\zeta}(\Delta) = \zeta(\Delta), \quad \Delta \in \mathfrak{B}.$$

**Teorema 2.** Si una función estructural  $m(\Delta)$  de la medida estocástica elemental  $\zeta(\Delta)$  es semiaditiva, entonces  $\{\zeta(\Delta), A \in \mathfrak{R}\}$  puede ser prolongada hasta la medida estocástica  $\{\zeta(A), A \in L_0\}$ , con la particularidad de que

$$\int f(x) \zeta(dx) = \int f(x) \tilde{\zeta}(dx). \quad (2.7)$$

**10.2.2. Propiedades de la integral estocástica.** Sea  $\zeta$  una medida estocástica ortogonal con la función estructural  $m$  que sirva de medida completa en  $\{E, \mathfrak{B}\}$ . Hagamos para  $g(x) \in \mathcal{L}_2(m)$

$$\lambda(A) = \int \chi_A(x) g(x) \zeta(dx), \quad A \in \mathfrak{R}. \quad (2.8)$$

1. Entonces,  $\lambda(A)$  es una medida estocástica ortogonal en  $\{E, \mathfrak{B}\}$  con la función estructural

$$l(A) = \int_A |g(x)|^2 m(dx). \quad (2.9)$$

2. Si  $f(x) \in \mathcal{L}_2(l)$ , entonces  $f(x)g(x) \in \mathcal{L}_2(m)$  y

$$\int f(x) \lambda(dx) = \int f(x) g(x) \zeta(dx). \quad (2.10)$$

3. Si  $m(A) < \infty$ , entonces

$$\zeta(A) = \int \frac{\chi_A(x)}{g(x)} \lambda(dx). \quad (2.11)$$

4. Sea  $T$  un segmento finito o infinito de una recta real y sean  $B$  una  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $T$  y  $l$ , una medida de Lebesgue.

**Teorema 3.** Para la función boreliana  $g(t, x) \in \mathcal{L}_2(l \times m)$  y  $g(t, x) \in \mathcal{L}_2(m)$ , para todo  $t \in T$ , la integral estocástica

$$\xi(t) = \int g(t, x) \zeta(dx) \quad (2.12)$$

se puede definir como función  $t$  de tal modo que el proceso  $\xi(t)$  sea medible.

5. Si  $g(t, s)$  y  $h(t)$  son las funciones borelianas,

$$\int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} |g(t, s)|^2 dt m(dx) < \infty, \quad \int_a^b |h(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.13)$$

entonces

$$\int_a^b h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(t, s) \zeta(dx) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta(dx) \int_a^b h(t) g(t, s) dt. \quad (2.14)$$

**Observación.** La correlación (2.14) subsiste también cuando  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ , si existe una integral impropia  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) g(t, s) dt$  en el sentido de convergencia en  $\mathcal{L}_2(m)$ .

6. Sea  $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$  un proceso con incrementos ortogonales:

$$M(\xi(t_2) - \xi(t_1)) \overline{(\xi(t_4) - \xi(t_3))} = 0$$

para cualesquiera  $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ , pertenecientes a  $[a, b]$ , continuo (m.c.) a la izquierda:

$$M|\xi(t) - \xi(s)|^2 \rightarrow 0, \text{ cuando } s \uparrow t.$$

Sea  $\mathfrak{W}$  una clase de todos los subintervalos  $\Delta = [t_1, t_2]$ ,  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ . Determinemos la medida estocástica elemental

$$\zeta([t_1, t_2]) = \xi(t_2) - \xi(t_1), \quad (2.15)$$

con la función estructural

$$m([t_1, t_2]) = M|\xi(t_2) - \xi(t_1)|^2 = F(t_2) - F(t_1), \quad (2.16)$$

donde

$$F(t) = M|\xi(t) - \xi(p)|^2. \quad (2.17)$$

La función  $F(t)$  es monótona no decreciente y continua a la izquierda. Por esta razón, la función estructural (2.16) admite una prolongación hasta obtener la medida completa en  $[a, b]$ . Por consiguiente, queda definida una integral estocástica de Stieltjes extendida por el proceso con incrementos independientes y esta definición se hace por medio de la igualdad:

$$\int_a^b f(t) d\zeta^2(t) = \int_a^b f(t) \zeta(dt) \quad (2.18)$$

para una función boreliana arbitraria  $f(t) \in \mathcal{L}_2(F)$ . La definición de la integral (2.18) queda también en vigor para  $b = +\infty$ .

10.2.3. Integral estocástica extendida a una medida vectorial. La integral estocástica se generaliza para las medidas estocásticas vectoriales. Supongamos que  $\zeta(\Delta) = \{\zeta^1(\Delta), \zeta^2(\Delta), \dots, \zeta^p(\Delta)\}$  que es la medida estocástica (ortogonal) vectorial en  $\mathfrak{W}$  con la matriz estructural  $m(\Delta) = \{m_j^k(\Delta)\} = M\zeta(\Delta)\zeta^*(\Delta)$  ( $m_j^k(\Delta) = M\zeta^k(\Delta)\overline{\zeta^j(\Delta)}$ ),  $1 \leq j, k \leq p$ , satisface las condiciones:

- 1)  $\zeta(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \zeta(\Delta_1) + \zeta(\Delta_2) \pmod{\mathfrak{P}}$ , si  $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ ;
- 2)  $M\zeta^k(\Delta_1)\zeta^j(\Delta_2) = m_j^k(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ ;  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{W}$ ,  $1 \leq k, j \leq p$ ;
- 3)  $M|\zeta(\Delta)|^2 = M\zeta^*(\Delta)\overline{\zeta(\Delta)} = M \sum_{h=1}^p |\zeta^h(\Delta)|^2 < \infty$ ,  $\zeta(\emptyset) = 0$ .

Hagamos  $m_0(\Delta) = \text{Sp } m(\Delta) = \sum_{h=1}^p m_h^h(\Delta)$ .

Si la traza  $m_0(\Delta)$  de la matriz  $m(\Delta)$  es una función semiaditiva en  $\mathfrak{W}$ , entonces  $m_h^h(\Delta)$  pueden prolongarse hasta las funciones numerales aditivas de los conjuntos en  $\{\mathcal{E}, \mathfrak{Q}\}$ . La medida matricial completa  $m(\Delta)$  en  $\{\mathcal{E}, \mathfrak{Q}\}$  posee la propiedad de que está positivamente definida:

$$\sum_{j, k=1}^n z_j^* m(\Delta_j \cap \Delta_k) z_k = M \left| \sum_{h=1}^n \zeta^*(\Delta_h) z_h \right|^2 \geq 0 \quad (2.19)$$



para cualesquiera vectores  $z_k = \{z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^p\}$  y todo  $\Delta_k \in \mathfrak{A}$ ,  $1 \leq k \leq p$ .

Aquí,  $\xi^*(\Delta)$  es un vector fila de componentes  $\xi^j(\Delta)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

Introducimos el espacio  $\mathcal{L}_0(\mathfrak{M})$ -funciones sencillas  $f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}$ ,  $\Delta_h \in \mathfrak{M}$ , con el producto escalar

$$(f, g) = \int f(x) \overline{g(x)} m_0(dx).$$

A continuación, determinemos el espacio de  $\mathcal{L}_0^p(\xi)$ -vectores aleatorios  $\eta = \sum_{h=1}^n c_h \xi(\Delta_h)$ ,  $\Delta_h \in \mathfrak{M}$ , con el producto escalar  $(\eta_1, \eta_2) = M\eta_1 \overline{\eta_2}$ .

La clausura (en el sentido de convergencia en m.c.) del espacio de magnitudes aleatorias  $\mathcal{L}_0^p(\xi)$  se designará mediante  $\mathcal{L}_2^p(\xi)$  y el complemento  $\mathcal{L}_0(m)$ , mediante  $\mathcal{L}_2(m)$ .

La igualdad

$$\eta = \int f(x) \xi(dx) = \sum_{h=1}^n c_h \xi(\Delta_h) \quad (2.20)$$

establece para  $f(x) = \sum_{h=1}^n c_h \chi_{\Delta_h}(x)$  una aplicación isométrica  $\eta = \mathfrak{F}(f)$  del espacio  $\mathcal{L}_0(m)$  sobre  $\mathcal{L}_0^p(\xi)$ , que puede ser prolongado hasta la correspondencia isométrica  $\eta = \mathfrak{F}(f)$  de  $\mathcal{L}_2(m)$  sobre  $\mathcal{L}_2^p(\xi)$ . Con ello el vector aleatorio  $\eta = \mathfrak{F}(f)$  lo llaman integral estocástica y se escribe

$$\eta = \int f(x) \xi(dx), \quad f(x) \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{M}). \quad (2.21)$$

Las propiedades de integral estocástica mencionadas más arriba quedan en vigor también en el caso dado.

10.2.4. Representación integral de las funciones aleatorias. Con la ayuda de integrales estocásticas se pueden obtener las representaciones integrales de diferentes clases de funciones aleatorias.

**Teorema.** Supongamos que está dada una función aleatoria vectorial  $p$ -dimensional  $\{\xi(x), x \in \mathfrak{X}\}$  cuya matriz de covarianza  $B(x_1, x_2) = M\xi^*(x_1) \xi^*(x_2) = \{B_j^k(x_1, x_2)\}$ ,  $B_j^k(x_1, x_2) = M\xi_j^*(x_1) \xi_k^*(x_2)$ ,  $1 \leq j, k \leq p$ , admite la representación integral

$$B(x_1, x_2) = \int g(x_1, u) \overline{g(x_2, u)} m(du), \quad (2.22)$$

donde  $m(\Delta)$  es una medida matricial positivamente definida en  $\{\mathfrak{U}, \mathfrak{B}\}$  con  $m_0(u) = \text{Sp } m(u)$  y  $g(x, u)$  es una función escalar que satisface las condiciones: 1)  $g(x, u) \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, m_0)$  para todo  $x \in \mathfrak{X}$ ; 2) la familia de funciones  $\{g(x, u), x \in \mathfrak{X}\}$  es completa en  $\mathcal{L}_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}, m_0)$ .

En este caso existe tal medida vectorial ortogonal estocástica  $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$  con la función matricial estructural  $m(B) = M\zeta(B)\zeta^*(B)$  que, con la probabilidad 1, para todo  $x$  la función aleatoria  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  puede ser representada en la forma

$$\xi(x) = \int g(x, u) \zeta(du). \quad (2.23)$$

Con ello, la medida estocástica  $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$  está subordinada a la función aleatoria  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  en el sentido que  $\zeta(B) \in \mathcal{L}_2^P(\xi)$  para todo  $B \in \mathfrak{B}$ .

La medida estocástica  $\{\zeta(B), B \in \mathfrak{B}\}$  se determina con la ayuda de una correspondencia isométrica entre los espacios  $\mathcal{L}_2(\xi)$  y  $\mathcal{L}_2(g)$ , para la cual

- a)  $\xi(x) \leftrightarrow g(x, u), \zeta(B) \leftrightarrow \chi_B(u)$ ;  
 b) si  $\eta_l \leftrightarrow f_l(u)$  ( $l = 1, 2$ ), entonces

$$\eta_l = \int f_l(u) \zeta(du); \quad M\eta_1\eta_2^* = \int f_1(u)\overline{f_2(u)} m(du).$$

### 10.3. Extrapolación lineal y filtración de las funciones aleatorias de Hilbert

Una función aleatoria de Hilbert  $\{\xi(u), u \in \mathcal{X}\}$  con sus valores en el espacio medible  $\{E, \mathfrak{B}\}$  genera un espacio de magnitudes aleatorias de Hilbert  $\mathcal{L}_2$   $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$ , que representa la cápsula lineal cerrada (en el sentido de convergencia en m.c.) de una familia de magnitudes aleatorias  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  y de unas constantes.

El espacio de Hilbert  $\mathcal{L}_2$   $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  es un subespacio del espacio de Hilbert  $\mathcal{L}_2(\Omega, \sigma, P)$  de todas las magnitudes aleatorias de Hilbert definidas en el mismo espacio probabilístico básico  $\{\Omega, \sigma, P\}$  donde está definida la familia de magnitudes aleatorias de Hilbert  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$ .

La mejor aproximación (estimación) lineal  $\tilde{\zeta}$  de una magnitud aleatoria de Hilbert  $\zeta \in \mathcal{L}_2(\Omega, \sigma, P)$  en el espacio  $\mathcal{L}_2$   $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  se determina por la condición

$$M|\tilde{\zeta} - \zeta|^2 \leq M|\zeta' - \zeta|^2 \text{ para cualquier } \zeta' \in \mathcal{L}_2(\xi(x), x \in \mathcal{X}). \quad (3.1)$$

La condición (3.1) significa que la estimación  $\tilde{\zeta}$  admite un error medio cuadrático mínimo.

De la teoría de los espacios de Hilbert se deduce que el elemento  $\tilde{\zeta}$  es una proyección de  $\zeta$  on el subespacio  $\mathcal{L}_2$   $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  y se determina de modo unívoco (mod  $P$ ) mediante el sistema de ecuaciones lineales

$$M\tilde{\zeta}\bar{\xi}(x) = M\zeta\bar{\xi}(x), \quad x \in \mathcal{X}. \quad (3.2)$$

El error medio cuadrático  $\delta$  de la igualdad aproximada  $\tilde{\zeta} \approx \zeta$  es igual a la longitud de una perpendicular trazada del extremo del vector  $\zeta$  al subespacio  $\mathcal{L}_2$   $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  y se expresa mediante la fórmula

$$\delta^2 = M|\zeta - \tilde{\zeta}|^2. \quad (3.3)$$

En particular, se cumple la condición de estimación insesgada:

$$M\tilde{\xi} = M\zeta.$$

La mejor estimación lineal  $\tilde{\xi}$ , determinada mediante el sistema (3.2), es una función lineal de  $\xi(x)$  con varianza finita.

El problema de construcción de la estimación  $\tilde{\xi}$  surge durante la extrapolación lineal de un proceso aleatorio  $\{\xi(t), t \in T\}$ , cuando se requiere evaluar el valor de  $\xi(t^*)$  en cierto momento de tiempo  $t^*$ , partiendo de los valores del proceso  $\xi(t)$  en el conjunto de momentos de tiempo  $T$  precedentes a  $t^*$ .

Otro ejemplo de construcción de la estimación  $\tilde{\xi}$  es el problema de filtración lineal de un proceso aleatorio que consiste en lo siguiente. Se observa el proceso  $\xi(t) = \zeta(t) + \eta(t)$ , que representa en sí una suma de la señal útil  $\zeta(t)$  con el ruido  $\eta(t)$ . Se necesita separar la señal del ruido, es decir, para el  $t^*$  dado hace falta hallar las mejores aproximaciones lineales  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{L}_2\{\xi(t), t \in T\}$  de la señal  $\zeta(t^*)$ .

Por supuesto, la estimación lineal  $\tilde{\zeta}$  no siempre es aceptable desde el punto de vista práctico. Sin embargo, en un caso muy importante, cuando todas las distribuciones de dimensiones finitas de las magnitudes aleatorias  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  son normales y  $M\xi(x) = 0$ ,  $M\zeta = 0$ , la mejor estimación lineal en  $\mathcal{L}_2\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$  es a la vez la mejor en el sentido m.e.

En este caso

$$\tilde{\zeta} = M\{\zeta/\sigma(\xi(x), x \in \mathcal{X})\}, \quad (3.4)$$

donde  $\sigma(\xi(x), x \in \mathcal{X})$  es una  $\sigma$ -álgebra generada por la totalidad de magnitudes aleatorias  $\{\xi(x), x \in \mathcal{X}\}$ .

**EJEMPLO 1.** Sea dada una totalidad finita de magnitudes aleatorias de Hilbert linealmente independientes  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ . La solución del sistema de ecuaciones lineales (3.2) se determinará mediante la fórmula

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{\Gamma} \begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \dots & (\xi_1, \xi_n) & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\xi_n, \xi_1) & \dots & (\xi_n, \xi_n) & \xi_n \\ (\zeta, \xi_1) & \dots & (\zeta, \xi_n) & 0 \end{vmatrix}, \quad (3.5)$$

donde  $\Gamma = \Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  es el determinante de Gram del sistema de magnitudes  $\{\xi_k, k = 1, 2, \dots, n\}$ :

$$\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{vmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \dots & (\xi_1, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\xi_n, \xi_1) & \dots & (\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

El error medio cuadrático  $\delta^2 = M|\tilde{\zeta} - \zeta|^2$  se determina por la igualdad

$$\delta^2 = \frac{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \zeta)}{\Gamma(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)}. \quad (3.7)$$

**EJEMPLO 2.** Sea dado un proceso aleatorio continuo de Hilbert  $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$  en un segmento temporal finito con la función de

correlación

$$R(t, s) = M[(\xi(t) - a(t))(\xi(s) - a(s))], \quad a(t) = M\xi(t).$$

El proceso  $\{\xi(t), t \in [a, b]\}$  puede ser desarrollado en una serie ortogonal

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \varphi_n(t), \quad (3.8)$$

en la que  $M\xi_n \bar{\xi}_m = \lambda_n \delta_{nm}$ ;  $\lambda_n$  y  $\varphi_n(t)$  son, respectivamente, los valores propios y las funciones propias de la función de correlación  $R(t, s)$  en  $[a, b]$ :

$$\int_a^b R(t, s) \varphi_n(s) ds = \lambda_n \varphi_n(t).$$

En este caso la mejor estimación lineal  $\tilde{\zeta}$  se determina por las correlaciones

$$\tilde{\zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \xi_n, \quad \xi_n = \int_a^b \overline{\varphi_n(t)} \xi(t) dt, \quad (3.9)$$

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n} M\tilde{\zeta} \bar{\xi}_n = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b R_{\tilde{\zeta}\xi}(t) \varphi_n(t) dt, \quad (3.10)$$

donde

$$R_{\tilde{\zeta}\xi}(t) = M\tilde{\zeta} \bar{\xi}(t).$$

El error medio cuadrático de la estimación se determina por la fórmula

$$\delta^2 = M|\zeta|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \quad (3.11)$$

El empleo práctico de las fórmulas expuestas es posible a condición de que se conozcan los números propios y las funciones propias del núcleo  $R(t, s)$ .

**PROCESOS ESTACIONARIOS**

Un lugar de importancia ocupan en la teoría de los procesos aleatorios los procesos en los cuales algunas de sus características quedan invariables con desplazamientos del parámetro temporal o espacial o, en el caso más general, los procesos determinadas características de los cuales son invariantes respecto de cierto grupo o semigrupo de transformaciones.

Los procesos de este tipo poseen ciertas propiedades de invariabilidad y tienen carácter estacionario. Con la mayor frecuencia, a título de características, invariantes respecto de un grupo (o semigrupo) dado de transformaciones, intervienen o los momentos, o bien las distribuciones de dimensiones finitas.

En el primer caso se habla de los procesos estacionarios de  $r$ -ésimo orden, si la propiedad de invariación la poseen los momentos de  $r$ -ésimo orden inclusive. La clase más importante la constituyen los procesos estacionarios de segundo orden, llamados comúnmente procesos estacionarios en amplio sentido.

Si en calidad de características invariantes se eligen las distribuciones de dimensiones finitas, los procesos correspondientes se denominan estacionarios en estrecho sentido.

**11.1. Procesos aleatorios estacionarios en amplio sentido**

**11.1.1. Definiciones fundamentales.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio probabilístico fijado en el cual se consideran los procesos aleatorios  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $T$  es uno de los conjuntos del tipo  $(-\infty, \infty)$ ,  $[0, \infty)$  (tiempo continuo) o bien  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $\{0, 1, 2, \dots\}$  (tiempo discreto).

El proceso  $\xi(t)$  puede tomar valores en  $R^1 = (-\infty, \infty)$  (proceso escalar real) o bien en el plano complejo  $Z$  (proceso escalar complejo), o bien en el espacio euclídeo  $R^k$  (proceso real  $k$ -dimensional), o bien en el espacio complejo  $k$ -dimensional  $Z^k$  (proceso complejo  $k$ -dimensional).

**Definición 1.** a) Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso escalar y existe  $M|\xi(t)|^2$  para  $t \in T$ , entonces  $C(t, s) = M\xi(t)\overline{\xi(s)}$  se denomina función de covariación y la función  $B(t, s) = M[\xi(t) - M\xi(t)] \times [\xi(s) - M\xi(s)]$ , función de correlación del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

b) Si  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_k(t))$ ,  $t \in T$ , es un proceso vectorial, para el cual existen  $M\xi_l(t)\overline{\xi_m(t)}$ ,  $l, m = \overline{1, k}$ , entonces la

matriz  $C(t, s) = \{c_{lm}(t, s), l, m = \overline{1, k}\}$ , donde  $c_{lm}(t, s) = M \xi_l(t) \overline{\xi_m(s)}$ , se llama matriz de covariación, mientras que la matriz  $B(t, s) = \{B_{lm}(t, s), l, m = \overline{1, k}\}$ , donde  $B_{lm}(t, s) = M [\xi_l(t) - M \xi_l(t)] [\xi_m(t) - M \xi_m(t)]$ , matriz de correlación del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ . La matriz de covariación  $C(t, s)$  puede ser representada en la forma

$$C(t, s) = M \xi_s^*(t) \xi^*(s), \quad (1.1)$$

donde el signo de conjugación\* significa la transposición del vector columna  $\xi(s)$  y el paso a los elementos complejos conjugados.

En el caso escalar resulta cómodo considerar que  $\xi^*(s) = \overline{\xi(s)}$ , razón por la cual podemos emplear la fórmula (1.1) tanto en el caso escalar, como en el vectorial.  $C(t, s)$  y  $B(t, s)$  en los casos escalar y vectorial se llaman a menudo función de covariación y función de correlación, respectivamente.

**Definición 2.** Un proceso aleatorio  $\{\xi(t), t \in T\}$  se denomina estacionario en amplio sentido, si su esperanza matemática  $M \xi(t) = a$  no depende de  $t$ , y la función de correlación  $B(t, s)$  sólo depende de la diferencia  $(t - s)$ , es decir, si

$$B(t, s) = B(t - s), \quad (1.2)$$

Así pues, si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso estacionario en amplio sentido, entonces el proceso  $\{\xi_u(t), t \in T\}$ , donde  $\xi_u(t) = \xi(t + u)$  y  $u \in T$  es fijado, tiene la esperanza matemática  $M \xi_u(t) = a$ , igual a la de  $\xi(t)$  y la función de correlación  $B(t) = B(t, 0)$ .

La varianza de un proceso estacionario en amplio sentido coincide con  $B(0)$ :  $M \{\xi(t) - a\} \{\xi(t) - a\}^* = B(0)$ .

Las funciones de covariación y de correlación están entrelazadas por la correlación

$$C(t, s) = B(t, s) + aa^*,$$

por consiguiente, para los procesos estacionarios  $C(t, s) = C(t - s)$ .

Si  $M \xi(t) = 0$ , la función de correlación y la de covariación coinciden. Más aún, si  $C(t) = C(t, 0)$ , la fórmula

$$C(t) = B(t) + aa^*$$

muestra que sin perder la generalidad de razonamientos podemos tomar para la consideración un proceso con esperanza matemática nula, pues siempre podemos pasar al proceso  $\xi_0(t) = \xi(t) - M \xi(t)$ , para el cual la propiedad dada está cumplida.

Todos los procesos de tiempo continuo considerados en este capítulo se supone que son continuos a la derecha de manera media cuadrática (m.c.), es decir,

$$\lim_{s \downarrow t} M \|\xi(s) - \xi(t)\|^2 = 0, \quad t \in T.$$

Sean  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$  unos procesos estacionarios en amplio sentido cuyas funciones de correlación son  $B_\xi(t)$  y  $B_\eta(t)$ , respectivamente.

**Definición 3.** Los procesos  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$  se llaman ligados de manera estacionaria, si su función de correlación recíproca  $B_{\xi\eta}(t) = M \xi(t) \eta^*(s)$  sólo depende de la diferencia  $(t - s)$ . Con

este motivo  $B_2(t)$  y  $B_n(t)$  se llaman a veces funciones de autocorrelación.

La función de correlación  $B(t)$  de un proceso estacionario posee las siguientes propiedades.

1. Carácter hermitiano:

$$B(t) = \begin{cases} \overline{B(-t)} & \text{(proceso escalar),} \\ B^*(-t) & \text{(proceso vectorial).} \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Definición no negativa:

$$\sum_{l, m=1}^N B(t_l - t_m) \lambda_l \overline{\lambda_m} \geq 0 \quad \text{(proceso escalar),} \quad (1.4)$$

cualesquiera que sean  $N \geq 1$ ,  $t_l \in T$  y los números complejos  $\lambda_l$ ,  $l = \overline{1, N}$ ;

$$\sum_{l, m=1}^N z_l^* B(t_l - t_m) z_m \geq 0 \quad \text{(proceso vectorial),} \quad (1.4')$$

cualesquiera que sean  $N \geq 1$ ,  $t_l \in T$  y los vectores  $z_l$ ,  $l = \overline{1, N}$ .

3.  $|B(t)| \leq B(0)$  (proceso escalar).

$|B_{lm}(t)|^2 \leq B_{ll}(0) B_{mm}(0)$ ,  $l, m = \overline{1, k}$  (proceso vectorial).

4. Si (en el caso de tiempo continuo) la función de correlación  $B(t)$  es continua en el punto  $t = 0$ , será continua en cualquier otro punto  $t \in T$ .

5. Si  $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t))$  es un proceso vectorial, las funciones

$$\rho_{lm}(t) = \frac{B_{lm}(t)}{\sqrt{B_{ll}(0) B_{mm}(0)}},$$

llamadas coeficientes de correlación recíproca de las componentes  $\xi_l(t)$  y  $\xi_m(t)$ , satisfacen la desigualdad

$$-1 \leq \rho_{lm}(t) \leq 1, \quad l, m = \overline{1, k},$$

y determinan el grado de la dependencia lineal de los procesos  $\xi_l(t)$  y  $\xi_m(t)$ .

Diferentes procesos estacionarios pueden tener las mismas esperanzas matemáticas o igual función de covariación.

Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso estacionario y para todo  $n \geq 1$  y cualquier juego  $\{t_k \in T, k = \overline{1, n}\}$  el vector  $(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$  tiene distribución normal multidimensional, entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  se denomina proceso gaussiano estacionario (o bien proceso estacionario normal).

El proceso estacionario gaussiano se determina por su esperanza matemática y la función de covariación.

Y viceversa, toda función  $m(t) = \text{const}$  y la función  $B(t)$ , que posea las propiedades (1.3) y (1.4), define cierto proceso estacionario gaussiano.

Sea  $\xi^{(N)} = \sum_{l=1}^N \lambda_l \xi(t_l)$ , donde  $N \geq 1$  es un número entero cualquiera,  $t_l \in T$ ,  $\lambda_l$ , unos números arbitrarios. La cápsula lineal  $H_0\{\xi\}$

de todas las magnitudes aleatorias de esta índole, construidas según el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , es un subespacio del espacio de Hilbert  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P})$  de cuadrado integrable según la medida  $\mathbf{P}$  de las funciones  $\mathfrak{E}$ -medibles en  $\Omega$ . Introduzcamos en  $H_0(\xi)$  un producto escalar de acuerdo con la fórmula

$$(\xi, \eta) = \begin{cases} \overline{M\xi\eta} & (\text{proceso escalar}), \\ \text{Sp } M\xi\eta^* & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (1.5)$$

donde  $\text{Sp } B$  significa la traza de la matriz  $B$ , es decir, la suma de sus elementos diagonales. El espacio de Hilbert  $H_\xi$ , que es una clausura de  $H_0(\xi)$  en la norma generada por el producto escalar (1.5), se llama espacio de valores del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ . Desde el punto de vista geométrico el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una curva en el espacio  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P})$  y  $H_\xi$  es la intersección de todos los subespacios en  $\mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P})$  que contienen dicha curva.

11.1.2. Ejemplos. 1. Sea  $\zeta_m, m = \overline{1, p}$ , un juego de tales magnitudes aleatorias incorrelacionadas que

$$M\zeta_m = 0, \quad M\zeta_m\zeta_l^* = \delta_{ml}\sigma_m^2,$$

donde  $\delta_{ml}$  es el símbolo de Kronecker,  $\sigma_m^2 < \infty$ . Si  $p = \infty$ , sea  $\sum_{m=1}^{\infty} \sigma_m^2 < \infty$  y  $\lambda_m, m = \overline{1, p}$ , un juego de números reales arbitrarios.

El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m t} \zeta_m$ , es estacionario

en amplio sentido, puesto que  $M\xi(t) = 0$  y  $B(t, s) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m(t-s)} \sigma_m^2 = B(t-s)$ .

2. Sea  $\zeta_m, m = \overline{1, p}$ , un juego de vectores aleatorios incorrelacionados  $k$ -dimensionales tales que  $M\xi_m = 0, M\zeta_m\zeta_l^* = \delta_{ml}G_m$ , donde  $G_m$  es una matriz  $k \times k$  de Hermite definida de modo no negativo y  $\lambda_m, m = \overline{1, p}$ , un juego de números reales arbitrarios.

El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m t} \zeta_m$  es estacionario en

amplio sentido, puesto que  $M\xi(t) = 0, B(t, s) = \sum_{m=1}^p e^{i\lambda_m(t-s)} G_m = B(t-s)$ .

3. Sea  $\xi(t) = \cos(t\eta + \varphi)$ , donde  $\varphi$  es una magnitud aleatoria uniformemente distribuida en  $[0, 2\pi]$ , mientras que la magnitud aleatoria  $\eta$  no depende de  $\varphi$  y su función de distribución es  $G(x)$ . El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es estacionario (real) en amplio sentido, puesto

que  $M\xi(t) = 0, B(t, s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[(t-s)x] G(dx) = B(t-s)$ .

4. Supongamos que  $T = [0, \infty)$  y  $\{w(t), t \in T\}$  es un proceso estándar de Wiener. El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = w(t+h) -$



—  $w(t)$  y  $h > 0$  es un número fijado, es estacionario (real) en amplio sentido, puesto que  $M_{\xi}(t) = 0$  y

$$B(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{si } |t-s| \geq h \\ h - |t-s|, & \text{si } |t-s| < h \end{cases} = B(t-s).$$

5. Supongamos que  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  y  $\zeta(t)$ ,  $t \in T$ , es una sucesión estándar de magnitudes aleatorias incorrelacionadas, es decir,  $M_{\xi}(t) = 0$ ,  $M_{\xi}(m) \overline{\xi(m)} = \delta_{m1}$  y sea una sucesión de números complejos  $c(t)$ ,  $t \in T$ , tal que  $\sum_{t \in T} |c(t)|^2 < \infty$ .

Una sucesión aleatoria  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = \sum_{s \in T} c(t-s) \zeta(s)$ , es estacionaria en amplio sentido, puesto que  $M_{\xi}(t) = 0$ ,

$$B(t, s) = \sum_{m \in T} c(t-s+m) \overline{c(m)} = B(t-s).$$

6. Supongamos que  $T = (-\infty, \infty)$  y  $\{\zeta(t), t \in T\}$  es un proceso estándar  $k$ -dimensional con incrementos ortogonales, es decir,  $M_{\xi}(t) = 0$ ,  $M[\zeta(t_1) - \zeta(t_2)] [\zeta(s_1) - \zeta(s_2)]^* = 0$  para  $t_2 < t_1 \leq s_2 < s_1$  y  $M[\zeta(t) - \zeta(s)] [\zeta(t) - \zeta(s)]^* = |t-s| I$ , donde  $I$  es la matriz  $k \times k$  unidad y supongamos, además, que la función de valores

matriciales  $C(t)$ ,  $t \in T$ , es tal que  $\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) C^*(t) dt < \infty$ .

El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s) d\zeta(s)$  y la integral se entiende como un límite en el sentido medio cuadrático, es estacionario en amplio sentido, puesto que  $M_{\xi}(t) = 0$ ,  $B(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s+u) C^*(u) du = B(t-s)$ .

Los procesos indicados en los ejemplos 5 y 6 se llaman procesos de sumación deslizando.

## 11.2. Representación espectral de las funciones de correlación

11.2.1. Teorema de Bochner—Ginčin. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario en amplio sentido cuya función de correlación es  $B(t)$ .

a) Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso escalar con tiempo discreto, entonces

$$B(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = \int_0^{\pi} [\cos \lambda t dC(\lambda) + \text{sen } \lambda t dQ(x)], \quad (2.1)$$

donde  $F(\lambda)$  es una función no decreciente no negativa, determinada según  $B(t)$  unívocamente, si se exige que  $F(-\pi) = 0$  y  $F(\lambda)$  sea continua a la derecha;  $C(\lambda)$  es una función par real de una variación acotada tal que  $C(\lambda_1) - C(\lambda_2) \geq 0$  para  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ;  $Q(\lambda)$  es una función real impar de una variación acotada.

b) Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso vectorial con tiempo discreto, entonces para  $B(t)$  tienen lugar las representaciones (2.1) donde  $F(\lambda)$  es una matriz cuyos incrementos  $F(\lambda_1) - F(\lambda_2)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ , son hermitianos y están definidos de modo no negativo;  $C(\lambda)$  es una matriz simétrica real cuyos incrementos  $C(\lambda_1) - C(\lambda_2)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  están definidos de modo no negativo;  $Q(\lambda)$  es una matriz real antisimétrica.  $F(\lambda)$  se determina unívocamente según  $B(t)$ , si se exige que  $F(-\pi) = 0$  (matriz nula) y  $F(\lambda)$  sea continua a la derecha (en el sentido de convergencia por elementos).

c) Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso escalar con tiempo continuo, entonces

$$B(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) = \int_0^{\infty} [\cos t\lambda dC(\lambda) + \text{sen } t\lambda dQ(\lambda)], \quad (2.2)$$

donde las funciones  $F(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  y  $Q(\lambda)$  se determinan igual que en el caso a), a excepción de la condición:  $F(-\infty) = 0$ .

d) Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso vectorial con tiempo continuo, entonces para  $B(t)$  tienen lugar las representaciones (2.2), donde las matrices  $F(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  y  $Q(\lambda)$  se determinan igual que en el caso b), a excepción de la condición:  $F(-\infty) = 0$  (matriz nula).

$F(\lambda)$  se denomina función espectral (matricial) del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , y la medida, generada por la función espectral  $F(\lambda)$ , medida espectral.

$C(\lambda)$  y  $Q(\lambda)$  se llaman, respectivamente, función coespectral (matricial) y función espectral cuadrática (matricial).

Se verifican las igualdades:

$$B(0) = \begin{cases} F(\pi) & (\text{tiempo discreto}), \\ F(\infty) & (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$dC(\lambda) = \begin{cases} dF(\lambda), & \lambda = 0, \\ 2\text{Re } dF(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$dQ(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, \\ 2\text{Im } dF(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

11.2.2. Ejemplos. 1. Supongamos que  $T = (-\infty, \infty)$ ,  $\xi(t) = \eta e^{it\xi}$ , donde las magnitudes aleatorias  $\eta$  y  $\xi$  son independientes,  $M\eta = 0$ ,  $D\eta = \sigma_\eta^2$ , y la magnitud aleatoria  $\xi$  cuenta con la función de distribución  $G_\xi(x)$ . El proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$  tiene la función de correlación  $B_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha} \sigma_\eta^2 G_\xi(d\alpha)$  y, por consiguiente, de la función espectral  $F_\xi(\lambda)$  podemos decir que es igual a  $F_\xi(\lambda) = \sigma_\eta^2 G_\xi(\lambda)$ .

El ejemplo muestra que existen procesos estacionarios con cualquier función espectral profijada de antemano.

2. Supongamos que  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  y  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas tales que

$M\bar{\xi}(t) = 0$ ,  $M\bar{\xi}(t)\overline{\bar{\xi}(s)} = \delta_{ts}\sigma^2$ . En este caso

$$B(t) = \begin{cases} \sigma^2 & t=0; \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

por lo tanto,  $F(\lambda) = \frac{\pi + \lambda}{2\pi} \sigma^2$ .

3. Supongamos que  $T = [0, \infty)$  y  $\{\bar{\xi}(t), t \in T\}$  representan un proceso estacionario en amplio sentido y un proceso de Márkov en amplio sentido. Lo último significa que  $a(s, u) = a(s, t)a(t, u)$ ,  $s < t < u$ , donde

$$a(s, t) = \begin{cases} \frac{M\bar{\xi}(t)\overline{\bar{\xi}(s)}}{M|\bar{\xi}(s)|^2}, & \text{si } M|\bar{\xi}(s)|^2 > 0; \\ 0, & \text{si } M|\bar{\xi}(s)|^2 = 0. \end{cases}$$

La función de correlación  $B(t)$  tiene por expresión

$$B(t) = e^{-\alpha|t|\sigma^2}, \quad \alpha > 0, \quad \text{o bien } B(t) = e^{i\beta t}$$

( $\beta$  es un número real).

En el primer caso la función espectral es

$$F(\lambda) = \frac{\sigma^2}{\pi} \arctg \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\sigma^2}{2}.$$

En el segundo caso

$$F(\lambda) = \begin{cases} \sigma^2 & \lambda \geq \beta; \\ 0, & \lambda < \beta. \end{cases}$$

11.2.3. Densidad espectral. Si  $\int_{\Lambda} \lambda^m dF(\lambda) < \infty$ , donde  $\Lambda$  coincide con  $[-\pi, \pi]$  en el caso de tiempo discreto con  $(-\infty, \infty)$ , en el caso de tiempo continuo, entonces  $S_m = \int_{\Lambda} \lambda^m dF(\lambda)$  se llama *m-ésimo momento espectral*.

**Teorema.**  $\int_{\Lambda} \lambda^{2m} dF(\lambda) < \infty$ , cuando y sólo cuando, la función de correlación  $B(t)$  tiene en cero una derivada de orden  $2m$ .

Para la función espectral  $F(\lambda)$  tiene lugar la descomposición de Lebesgue:

$$F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda). \quad (2.6)$$

Aquí,  $F_1(\lambda)$  es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, es decir,

$$F_1(\lambda) = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda & \text{(tiempo continuo).} \end{cases} \quad (2.7)$$

$F_2(\lambda)$  sólo puede variar a saltos en un conjunto de puntos  $\lambda$ , finito o numerable.  $F_2(\lambda)$  es continua y tiene derivada nula casi siempre en la medida de Lebesgue. La derivada  $F_1'(\lambda) = f(\lambda)$  del componente absolutamente continuo de la función espectral  $F(\lambda)$  se llama densidad espectral (matricial).

Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso vectorial con una función espectral absolutamente continua  $F(\lambda)$  y si la densidad espectral matricial de este proceso  $f(\lambda) = F'(\lambda)$  tiene rango  $r$ ,  $r = \overline{1, k}$ , donde  $k$  es la dimensión del proceso, entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  se llama proceso de rango  $r$ . Si es que  $r = k$ , es decir, si  $\det f(\lambda) \neq 0$  para casi todo  $\lambda$ , entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  se llama proceso de rango máximo.

### 11.3. Representación espectral de los procesos estacionarios

11.3.1. Representación espectral. A las representaciones espectrales de la función de correlación  $B(t)$  de los tipos (2.1) y (2.2) corresponden las representaciones espectrales del mismo proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

**Teorema 1.** Para todo proceso aleatorio estacionario en amplio sentido dotado de la función espectral  $F(\lambda)$  tiene lugar la representación espectral

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) = \int_{\Lambda} [\cos t\lambda d\eta(\lambda) + i \sin t\lambda d\theta(\lambda)], \quad (3.1)$$

donde:  $\Lambda = [-\pi, \pi]$ , si el tiempo  $t$  es discreto,  $\Lambda = (-\infty, \infty)$ , si el tiempo  $t$  es continuo; las integrales se entienden como límites m.c. de las sucesiones de Riemann—Stieltjes;  $\zeta(\lambda)$ ,  $\eta(\lambda)$ ,  $\theta(\lambda)$  son tales procesos con incrementos ortogonales que

$$M\zeta(\lambda) = M\eta(\lambda) = M\theta(\lambda) = 0,$$

$$M d\zeta(\lambda) d\zeta^*(\lambda) = dF(\lambda),$$

$$M d\eta(\lambda) d\eta^*(\lambda) = dC(\lambda),$$

$$M d\theta(\lambda) d\theta^*(\lambda) = \begin{cases} dQ(\lambda), & \lambda = 0; \\ dC(\lambda), & \lambda \neq 0, \end{cases}$$

$$M d\eta(\lambda) d\theta^*(\lambda) = -M d\theta(\lambda) d\eta^*(\lambda) = dQ(\lambda).$$

Si exigimos que el proceso  $\zeta(\lambda)$  sea continuo a la derecha en media cuadrática, entonces se determinará unívocamente con la exactitud salvo subconjuntos del conjunto  $\Omega$  de probabilidad nula.

El proceso  $\zeta(\lambda)$  en la representación (3.1) se llama proceso espectral correspondiente al proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

Sea  $\Gamma$  un conjunto boreliano arbitrario de  $\Lambda$ . Hagamos  $\Phi(\Gamma) = \int_{\Gamma} d\zeta(\lambda)$ . La función aleatoria del conjunto  $\Phi(\Gamma)$  posee las siguientes propiedades:

$$1) \Phi(\Gamma_1) + \Phi(\Gamma_2) = \Phi(\Gamma_1 \cup \Gamma_2), \quad \text{si } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset;$$

$$2) M\Phi(\Gamma)\Phi^*(\Gamma) = \int_{\Gamma} dF(\lambda);$$

$$3) M\Phi(\Gamma_1)\Phi^*(\Gamma_2) = 0, \quad \text{si } \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset;$$

4) si  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i$ ,  $\Gamma_i \cap \Gamma_m = \emptyset$ , entonces  $\Phi(\Gamma) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(\Gamma_i)$ , y la serie en el segundo miembro converge en media cuadrática.  $\Phi(\cdot)$  se denomina **medida espectral**.

Las propiedades de la medida espectral permiten ofrecer una representación espectral equivalente del proceso estacionario

$$\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}^*(\lambda) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} \Phi(d\lambda).$$

Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso escalar, entonces el elemento  $e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}^*(\lambda)$  representa en si una oscilación armónica cuya frecuencia angular es  $\lambda$ , mientras que la amplitud y la fase aleatorias se determinan por la magnitud aleatoria

$$d\zeta_{\xi}^*(\lambda) = |d\zeta_{\xi}^*(\lambda)| e^{i \arg(d\zeta_{\xi}^*(\lambda))}.$$

La representación espectral muestra de qué modo el proceso  $\xi(t)$  se forma de las oscilaciones armónicas elementales.

Los procesos espectrales  $\zeta(\lambda)$  en la representación (3.1) están subordinados al proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  en el sentido que  $\zeta \in H_{\xi}$ , donde  $H_{\xi}$  es el espacio de los valores del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , y  $\zeta$  es el límite en la expresión media cuadrática del tipo

$$\zeta^N = \sum_1^N \alpha_{h_k} \zeta(\lambda_k).$$

Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso escalar cuya función espectral es  $F(\lambda)$ . Designemos mediante  $\mathcal{L}_2\{F\}$  el espacio de Hilbert de las funciones  $\varphi(\lambda)$ , de cuadrado integrable según una medida generada por  $F(\lambda)$  y supongamos que el producto escalar del espacio mencionado tiene la forma

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) \overline{\psi(\lambda)} dF(\lambda),$$

en tanto que la integración se realiza en  $[-\pi, \pi]$  o bien en  $(-\infty, \infty)$ . En  $\mathcal{L}_2\{F\}$  no se distinguen las funciones  $\varphi_1(\lambda)$  y  $\varphi_2(\lambda)$  para las cuales

$$\int [\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)] \overline{[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)]} dF(\lambda) = 0.$$

Como corolario inmediato de la representación espectral (3.1) interviene el isomorfismo isométrico  $H_{\xi}$  y  $\mathcal{L}_2\{F\}$ , puesto que para todo  $\eta \in H_{\xi}$  existe la única (con la exactitud salvo la equivalencia determinada arriba) función  $\varphi(\lambda) \in \mathcal{L}_2\{F\}$ , tal que  $\eta = \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) d\zeta_{\xi}^*(\lambda)$  y viceversa, si  $\psi(\lambda) \in \mathcal{L}_2\{F\}$  entonces  $\int_{\Lambda} \psi(\lambda) d\zeta_{\xi}^*(\lambda) = \eta \in H_{\xi}$ . La correspondencia  $\eta \leftrightarrow \varphi(\lambda)$  es isométrica: si  $\eta_1 \leftrightarrow \varphi_1(\lambda)$ ,

$t=1, 2$ , entonces

$$\begin{aligned}
 (\eta_1, \eta_2) M \eta_1 \eta_2^* &= \int_{\Lambda} \varphi_1(\lambda) \overline{\varphi_2(\lambda)} M |d\zeta(\lambda)|^2 = \\
 &= \int_{\Lambda} \varphi_1(\lambda) \overline{\varphi_2(\lambda)} dF(\lambda) = (\varphi_1, \varphi_2).
 \end{aligned}$$

Para los procesos vectoriales de modo análogo se determina el espacio de Hilbert  $\mathcal{L}_2\{F\}$  de las matrices  $m \times k$  de  $\varphi(\lambda)$  (aquí,  $m$  es arbitrario, pero fijado,  $k$  es la dimensión del proceso) en el cual el producto escalar tiene por expresión

$$(\varphi, \psi) = \text{Sp} \left[ \int_{\Lambda} \varphi(\lambda) dF(\lambda) \psi^*(\lambda) \right]$$

y si  $m = k$ , entonces  $H_{\xi}$  y  $\mathcal{L}_2\{F\}$  serán isométricamente isomorfos.

**11.3.2. Procesos con la función espectral absolutamente continua.** A la descomposición de Lebesgue (2.6) de la función espectral  $F(\lambda)$  corresponde la descomposición del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  del tipo

$$\xi(t) = \xi_{(1)}(t) + \xi_{(2)}(t) + \xi_{(3)}(t) \quad (3.2)$$

en tres procesos estacionarios recíprocamente ortogonales.

El proceso  $\xi_{(1)}(t)$  tiene la función espectral  $F_1(\lambda)$  que es absolutamente continua. Tales procesos se caracterizan del modo siguiente.

**Teorema 2.** *Un proceso aleatorio estacionario en amplio sentido  $\{\xi(t), t \in T\}$  dispone de una función espectral absolutamente continua cuando y sólo cuando, es un proceso de suma deslizante, es decir, cuando existen tales funciones (matrices)  $C(t)$  que:*

a) en el caso de tiempo discreto

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C(t-s) \zeta_0(s), \quad (3.3)$$

donde  $\sum_{-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 < \infty$  (proceso escalar), o bien  $\text{Sp} \sum_{-\infty}^{\infty} C(t) C^*(t) < \infty$  (proceso vectorial) y  $\zeta_0(t)$  es una sucesión estacionaria estándar con valores incorrelacionados;

b) en el caso de tiempo continuo

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t-s) d\zeta_0(s), \quad (3.4)$$

donde  $\int_{-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 dt < \infty$  (proceso escalar), o bien  $\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C(t) C^* dt < \infty$  (proceso vectorial) y  $\zeta_0(t)$  es un proceso estándar con incrementos ortogonales.

Para los procesos vectoriales se pueden indicar otros rasgos característicos que toman en consideración el hecho de que la densidad espectral  $f(\lambda)$  puede tener distintos rangos para  $\lambda$  diferentes.

**Teorema 3.** Un proceso estacionario vectorial  $\{\xi(t), t \in T\}$  tiene una función espectral absolutamente continua cuando y sólo cuando, puede ser representado en forma de una suma de a lo sumo  $k$  ( $k$  es la dimensión del proceso) procesos recíprocamente ortogonales de adición deslizante

$$\xi(t) = \sum_{l=1}^k \xi_l(t), \quad (3.5)$$

donde, en el caso de tiempo discreto,

$$\xi_l(t) = \sum_{s \in T} C_l(t-s) \zeta_l(s), \quad \text{Sp} \sum_{t \in T} C_l(t) C_l^*(t) < \infty,$$

$C_l(t)$  son las matrices  $k \times l$ ,  $\zeta_l(s)$  son las sucesiones aleatorias estacionarias incorrelacionadas,  $l$ -dimensionales recíprocamente incorrelacionadas, mientras que en el caso de tiempo continuo

$$\xi_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C_l(t-s) d\zeta_l(s),$$

$$\text{Sp} \int_{-\infty}^{\infty} C_l(t) C_l^*(t) dt < \infty,$$

$C_l(t)$  son las matrices  $k \times l$ ,  $\zeta_l(s)$  son los procesos estándar recíprocamente ortogonales con incrementos ortogonales.

En particular, si el proceso  $\xi(t)$  tiene densidad espectral absolutamente continua y rango constante  $r$ , entonces  $\xi(t) = \xi_r(t)$ , donde  $\xi_r(t)$  es uno de los procesos descritos más arriba

## 11.4. Propiedades analíticas de los procesos estacionarios y de sus trayectorias

**11.4.1. Continuidad media cuadrática y diferenciability de los procesos estacionarios.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso escalar con tiempo continuo y  $B(t)$  y  $F(\lambda)$  sus funciones de correlación y espectral, respectivamente. La continuidad media cuadrática y la diferenciability de los procesos estacionarios, que constituyen un caso particular de los procesos aleatorios de Hilbert, se determinan del mismo modo que para los últimos.

**Teorema 1.** Para que un proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  sea continuo en media cuadrática es necesario y suficiente que su función de correlación  $B(t)$  sea continua en cero. Para que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  tenga una derivada media cuadrática de orden  $m$  es necesario y suficiente que exista la  $m$ -ésima derivada de su función de correlación  $B(t)$  en cero, o bien, lo que es equivalente, exista el  $2m$ -ésimo momento espectral

$$S_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} dF(\lambda).$$

En particular, si el proceso escalar real  $\{\xi(t), t \in T\}$  dispone del segundo momento espectral finito  $S_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 dF(\lambda)$ , entonces el pro-

ceso  $\eta(t) = (\xi'(t), \xi(t)), t \in T$ , donde  $\xi'(t)$  significa la derivada media cuadrática en  $t$ , es estacionario en amplio sentido y su función de correlación matricial  $B_\eta(t)$  tiene por expresión

$$B_\eta(t) = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda^2 dF(\lambda) & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda dF(\lambda) \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \lambda dF(\lambda) & \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) \end{pmatrix}.$$

**11.4.2. Propiedades analíticas de las trayectorias.** Las propiedades de las trayectorias de los procesos estacionarios se describen por los siguientes teoremas.

**Teorema 2.** Si, para  $t \rightarrow 0$  con cierto  $q > 3$ , se tiene

$$2B(0) - B(t) - B(-t) = O\left(\frac{|t|}{|\ln|t||^q}\right), \quad (4.1)$$

entonces el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  con tal función de correlación es equivalente a un proceso cuyas trayectorias son continuas con la probabilidad 1 en cualquier intervalo finito. La condición (4.1) queda cumplida, en particular, si  $B(t)$  tiene en cero una derivada de segundo orden.

**Observación.** Para los procesos estacionarios gaussianos la afirmación del teorema 2 se considera cumplida, cuando en lugar de (4.1) se cumple la condición

$$B(t) - 1 = O\left(\frac{1}{|\ln|t||^q}\right) \text{ para } t \rightarrow 0.$$

**Teorema 3.** Si, para  $t \rightarrow 0$  con cierto  $q > 3$ , se tiene

$$6B(0) - 4B(t) - 4B(-t) + B(2t) + B(-2t) = O\left(\frac{|t|^3}{|\ln|t||^q}\right) \quad (4.2)$$

entonces el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  con tal función de correlación es equivalente a un proceso cuyas trayectorias son continuamente derivables con la probabilidad 1. La condición (4.2) se considera cumplida, en particular, si  $B(t)$  tiene en cero una derivada de cuarto orden.

**Observación.** Para los procesos estacionarios gaussianos la afirmación del teorema 3 queda cumplida, si en lugar de (4.2) se cumple la condición

$$B(t) = 1 - \frac{\lambda_2}{2} t^2 + O\left(\frac{|t|}{|\ln|t||^q}\right).$$

Análogamente, la existencia de las derivadas de órdenes superiores en las trayectorias de los procesos estacionarios está relacionada con el comportamiento de la función de correlación en cero.

**Teorema 4.** Si la función espectral  $F(\lambda)$  de un proceso estacionario sólo varía en el intervalo finito, entonces existe un proceso, equivalente al dado, cuyas trayectorias son analíticas con la probabilidad 1.



## 11.5. Teorema ergódico y teorema del límite central

11.5.1. Teorema ergódico. Sean:  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario en amplio sentido;  $B(t)$  y  $F(\lambda)$ , sus funciones de correlación y espectral, respectivamente;  $\xi(t) \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$ , la representación espectral del proceso.

Las magnitudes

$$\xi_s = \begin{cases} \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \xi(t), & T = \{0, 1, 2, \dots\}, s \text{ son números enteros positivos;} \\ \frac{1}{2s+1} \sum_{t=-s}^s \xi(t), & T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, s \text{ son números enteros positivos;} \\ \frac{1}{s} \int_0^s \xi(t) dt, & T = [0, \infty), s \text{ son números positivos;} \\ \frac{1}{2s} \int_{-s}^s \xi(t) dt, & T = (-\infty, \infty), s \text{ son números positivos,} \end{cases}$$

se denominan medias temporales.

Sea

$$\hat{B}_s = \begin{cases} \frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} B(t), & T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ \frac{1}{2s+1} \sum_{t=-s}^s B(t), & T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; \\ \frac{1}{s} \int_0^s B(t) dt, & T = [0, \infty); \\ \frac{1}{2s} \int_{-s}^s B(t) dt, & T = (-\infty, \infty). \end{cases}$$

La existencia de los límites medios cuadráticos de las medias temporales  $\xi_s$  para  $s \rightarrow \infty$  constituye para los procesos estacionarios el contenido de los llamados teoremas ergódicos o de la ley de los grandes números.

Teorema 1.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \xi_s = \xi(0) - \zeta(0-);$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \hat{B}_s = F(0) - F(0-).$$

**Teorema 2.** Para que sea l.i.m.  $\xi_s = M\xi(t) = 0$  es necesario y suficiente que la función espectral  $F(\lambda)$  sea continua en cero.

Para la continuidad de  $F(\lambda)$  en cero es suficiente la condición  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ . Cuando  $B(t)$  tiende a cero para  $t \rightarrow \infty$  con suficiente rapidez, las medias temporales  $\xi_s$  pueden converger hacia  $M\xi(t) = 0$  no solamente en media cuadrática, sino también con la probabilidad 1.

**Teorema 3.** Si existen tales constantes  $K > 0$  y  $\alpha > 0$  que

$$\frac{1}{s} \sum_{t=0}^{s-1} \sum_{u=0}^{s-1} B_{ii}(t-u) = \frac{1}{s} \sum_{t=-s+1}^{s-1} B_{ii}(t) \left[ 1 - \frac{|t|}{s} \right] \leq Ks^{-\alpha},$$

en el caso de tiempo discreto y

$$\frac{1}{s} \int_0^s \int_0^s B_{ii}(t-u) du dt = \frac{1}{s} \int_{-s}^s B_{ii}(t) \left[ 1 - \frac{|t|}{s} \right] dt \leq Ks^{-\alpha},$$

en el caso de tiempo continuo,  $\xi_s$  converge hacia  $M\xi(t) = 0$  con la probabilidad 1.

**Observación.** El teorema 3 se ha enunciado para un proceso vectorial. En el caso escalar en lugar de  $B_{ii}(t)$  se debe tomar  $B(t)$ .

Para el cumplimiento de las condiciones del teorema 3 es suficiente la condición

$$B_{ii}(t) \leq \gamma |t|^{-\alpha}, \quad \gamma > 0 \text{ es una constante.}$$

**11.5.2. Teorema del límite central.** Si el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  dispone de la función espectral absolutamente continua  $F(\lambda)$  y la densidad espectral  $f(\lambda)$  es continua en cero, entonces

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sM \xi_s \xi_s^* = 2\pi f(0).$$

**Teorema 4.** (Teorema del límite central para los procesos estacionarios). Si el proceso vectorial  $\{\xi(t), t \in T\}$  tiene la función espectral absolutamente continua  $F(\lambda)$  y la densidad espectral  $f(\lambda)$  es continua en cero,

con la particularidad de que  $Sp f(\lambda) = \sum_{j=1}^k f_{jj}(\lambda)$  ( $k$  es la dimensión del proceso) es uniformemente acotado y  $\det f(0) \neq 0$ , entonces los vectores  $\sqrt{s}\xi_s$  son asintóticamente normales con la media nula y la matriz de covarianza  $2\pi f(0)$ .

## 11.6. Transformaciones lineales (filtros)

**11.6.1. Definición del filtro lineal.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario en amplio sentido, mientras que  $B_{\xi}(t)$  y  $F_{\xi}(\lambda)$  son su función de correlación y función espectral, respectivamente. Imaginémonos que el proceso  $\xi(t)$ , como función del tiempo  $t$ , llega a la entrada de un dispositivo físico y se transforma por éste de modo que del dispositivo sale un proceso nuevo (transformado)  $\{\eta(t), t \in T\}$ .

La transformación  $A$  del proceso  $\xi(t)$  en el proceso  $\eta(t) = A\xi(t)$  se denomina filtro lineal admisible (o simplemente filtro), si el proceso  $\eta(t)$  se representa en la forma

$$\eta(t) = \begin{cases} \sum_{s=-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s) & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)\xi(s)ds & \text{(tiempo continuo),} \end{cases} \quad (6.1)$$

donde  $h(t)$  son tales que

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t_1=-\infty}^{\infty} \sum_{t_2=-\infty}^{\infty} h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2) < \infty & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2)dt_1dt_2 < \infty & \text{(tiempo continuo),} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

y la suma, como también la integral en (6.1), se entienden como límites medios cuadráticos de las correspondientes sumas

$\sum_{t_1=-n}^n h(t_1)B(t_2-t_1)h^*(t_2)$  e integrales  $\int_{-n}^n h(t-s)\xi(s)ds$ , para  $n \rightarrow \infty$ . La

función  $h(t)$  se llama función impulsora (matricial) de transición del filtro  $A$ .

**Observación.** Esta denominación está relacionada con el hecho de que si a la entrada del filtro llega una función impulsora (función delta de Dirac con singularidad en cero, en el caso de tiempo continuo), en la salida del filtro habrá  $h(t)$ .

Sea

$$H(i\lambda) = \begin{cases} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}h(t) & \text{(tiempo discreto);} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}h(t)dt & \text{(tiempo continuo)} \end{cases}$$

una transformación de Fourier de la función impulsora de transición  $h(t)$ . La condición (6.2) es equivalente a la condición  $H(i\lambda) \in \mathcal{L}_2(F_{\xi})$ . La función  $H(i\lambda)$  se llama característica de frecuencia (matricial) del filtro  $A$ .

Si el proceso  $\xi(t)$  en la entrada del filtro  $A$  tiene representación espectral  $\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$ , el proceso  $\eta(t)$  en la salida del

filtro tendrá la representación espectral  $\eta(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} H(i\lambda) d\xi(\lambda)$ .

En particular, si  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  son procesos escalares, entonces  $H(i\lambda) = |H(i\lambda)| e^{i\psi(\lambda)}$  y  $|H(i\lambda)|$  recibe el nombre de **coeficiente de amplificación del filtro** y  $\psi(\lambda)$ , fase del filtro.

El proceso  $\eta(t) = A\xi(t)$  es estacionario, con la particularidad de que

$$\begin{aligned}
 H_{\eta}(t) &= \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} h(t+n) B_{\frac{1}{2}}(m-n) h^*(m) = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda) \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u) B_{\frac{1}{2}}(t-u) h^*(v) d\omega dv = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda) \quad (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \\
 dF_{\eta}(\lambda) &= H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \quad (6.4)
 \end{aligned}$$

Si existen las densidades espectrales  $f_{\xi}(\lambda)$  y  $f_{\eta}(\lambda)$ , entonces

$$f_{\eta}(\lambda) = H(i\lambda) f_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \quad (6.5)$$

Sean  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$  dos procesos arbitrarios, estacionarios en amplio sentido, cuyas funciones espectrales son  $F_{\xi}(\lambda)$  y  $F_{\eta}(\lambda)$ . La respuesta a la pregunta, si es o no el proceso  $\eta(t)$  una transformación lineal del proceso  $\xi(t)$ , nos la da el

**Teorema de Rozanov.** *Supongamos que los procesos  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$  son conjuntamente estacionarios, es decir, el proceso vectorial  $\{\xi(t), \eta(t), t \in T\}$  es estacionario en amplio sentido. Para que el proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$  pueda obtenerse del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  con la ayuda de un filtro con característica de frecuencia  $H(i\lambda)$ , es necesario y suficiente que las correspondientes funciones espectrales y funciones espectrales recíprocas estén entrelazadas por las correlaciones:*

$$\left. \begin{aligned} dF_{\eta}(x) &= H(i\lambda) dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda); \\ dF_{\xi\eta}(\lambda) &= dF_{\xi}(\lambda) H^*(i\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

**11.6.2. Ejemplos de filtros.** 1. El filtro de banda sólo deja pasar, sin cambiarlas, las componentes armónicas del proceso  $\xi(t)$  cuyas frecuencias se encuentran dentro del intervalo dado  $(a, b)$ . Su característica de frecuencia es

$$H(i\lambda) = \chi_{(a, b)}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in (a, b); \\ 0, & \lambda \notin (a, b). \end{cases}$$

La función impulsora de transición  $h(t)$  (para  $a$  y  $b$  finitos)

$$h(t) = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{2\pi it}.$$

En conformidad con la disposición del intervalo  $(a, b)$ , el filtro de banda puede llamarse de baja frecuencia, de media frecuencia y de alta frecuencia.

Si  $a = -\infty$ , o bien (y)  $b = \infty$ , la función impulsora de paso no existe.

2. Derivación. La operación  $A = \sum_{l=0}^m B_l \frac{d^{m-l}}{dt^{m-l}}$  puede aplicarse al proceso  $\{\xi(t), t \in F\}$  con tiempo continuo cuando y sólo cuando, el  $2m$ -ésimo momento espectral es finito

$$S_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2m} dF_{\xi}(\lambda)$$

La característica de frecuencia  $H(i\lambda) = \sum_{l=0}^m B_l (i\lambda)^{m-l}$ . En particular, si  $A = \frac{d}{dt}$ , entonces  $H(i\lambda) = i\lambda$ . La función impulsora de paso no existe.

3. Ecuaciones diferenciales. Consideremos un filtro determinado por una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes  $L \eta(t) = M \xi(t)$ , donde  $L$  y  $M$  son los operadores diferenciales

$$L = \sum_{j=0}^l C_j \frac{d^{n-j}}{dt^{n-j}}, \quad M = \sum_{j=0}^m B_j \frac{d^{m-j}}{dt^{m-j}}.$$

Se supone que existe el  $2m$ -ésimo momento espectral del proceso  $\xi(t)$ .

Si  $\frac{M(i\lambda)}{L(i\lambda)} \in \mathcal{L}_2\{t\}$ , donde  $L(i\lambda) = \sum_{j=0}^l C_j (i\lambda)^{n-j}$ ,  $M(i\lambda) = \sum_{j=0}^m B_j (i\lambda)^{m-j}$ , entonces existe un filtro que corresponde a la ecuación diferencial en consideración y cuya característica de frecuencia es  $H(i\lambda) = \frac{M(i\lambda)}{L(i\lambda)}$ .

11.6.3. Filtros físicamente realizables. En los filtros que se determinan por la ecuación (6.4) los valores del proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$  en la salida pueden depender en el instante  $t$  tanto de los momentos de tiempo en el pasado ( $s < t$ ), como de los futuros ( $s > t$ ).

Los dispositivos físicos reales están privados de la posibilidad de anticipar el futuro. Por esto, si un filtro ha de simular un objeto real, su función impulsora de paso  $h(t)$  debe satisfacer la condición de realizabilidad física:

$$h(t) = 0, \quad t < 0, \quad (6.7)$$

Los filtros que satisfacen la condición (6.7) se llaman físicamente realizables.

**Teorema 1.** Para que un proceso escalar  $\{\xi(t), t \in T\}$  con la función espectral  $F(\lambda)$  constituya la reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega la sucesión incorrelacionada estándar  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  (en el caso de tiempo discreto) o bien el proceso estándar con incrementos ortogonales  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  (en el caso de tiempo continuo), es necesario y suficiente que su función espectral  $F(\lambda)$  sea absolutamente continua y la densidad espectral  $f(\lambda)$  satisfaga la condición

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda) d\lambda}{1+\lambda^2} > -\infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Cumplidas estas condiciones, el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  en la salida de un filtro físicamente realizable se puede representar en la forma

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{-\infty}^t h(t-s) \zeta_0(s), \quad \sum_{s=0}^{\infty} |h(s)|^2 < \infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-s) d\zeta_0(s), \quad \int_0^{\infty} |h(t)|^2 dt < \infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

**Observación.** La segunda igualdad de (6.9) se anota a veces en la forma

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^t h(t-s) \varepsilon(t) dt, \quad (6.10)$$

donde  $\varepsilon(t)$  es un proceso de ruido blanco que representa en sí el proceso generalizado estacionario en amplio sentido  $M\varepsilon(t) = 0$ ,  $M\varepsilon(t)\varepsilon(s) = \delta(t-s)$ , donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac. Esto nos permite interpretar  $\xi(t)$  como la reacción al ruido blanco de un filtro físicamente realizable.

**11.6.4. Factorización de la densidad espectral.** En el caso de tiempo discreto la densidad espectral  $f(\lambda)$ , que satisface la primera de las condiciones (6.8), admite una factorización

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(e^{-i\lambda})|^2, \quad (6.11)$$

donde  $\varphi(e^{-i\lambda})$  representa un valor de frontera de la función analítica

$$\varphi(z) = \sqrt{2\pi} \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) \frac{e^{-i\lambda} + z}{e^{-i\lambda} - z} d\lambda \right\},$$

es decir,

$$\varphi(e^{-i\lambda}) = \lim_{\rho \uparrow 1} \varphi(\rho e^{-i\lambda}),$$

siendo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \varphi(e^{-i\lambda}) d\lambda, \quad \varphi(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-i\lambda t}.$$

Para el tiempo continuo la densidad espectral  $f(\lambda)$ , que satisface la segunda de las condiciones (6.8), admite la siguiente factorización

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2, \quad (6.12)$$

donde  $\varphi(i\lambda)$  es un valor de frontera de la función analítica en el semiplano derecho

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln f(\lambda)}{1+\lambda^2} \frac{z+\lambda z}{\lambda-i z} d\lambda \right\},$$

siendo, en este caso,

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi(i\lambda) d\lambda.$$

El análogo vectorial del teorema 1 dispone de la forma más sencilla en el caso cuando el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  tiene en la salida del filtro el rango máximo, es decir, la densidad espectral  $f(\lambda)$  tiene casi siempre en la medida de Lebesgue un determinante distinto de cero.

**Teorema 2.** Para que un proceso vectorial  $\{\xi(t), t \in T\}$  de rango máximo con la función espectral  $F(\lambda)$  constituya la reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega la sucesión estándar de vectores aleatorios incorrelacionados  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  (en el caso de tiempo discreto) o el proceso estándar  $k$ -dimensional con incrementos ortogonales  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  (en el caso de tiempo continuo), es necesario y suficiente que la función espectral  $F(\lambda)$  sea absolutamente continua y la densidad espectral  $f(\lambda)$  satisfaga la condición

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [f(\lambda)] d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \det [f(\lambda)]}{1+\lambda^2} d\lambda > -\infty \quad (\text{tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

Cumplidas estas condiciones, el proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$  se puede representar en la salida del filtro físicamente realizable en la forma

$$\left. \begin{aligned} \eta(t) &= \sum_{-\infty}^t h(t-s) \xi_0(s), \\ \text{Sp} \sum_{t=0}^{\infty} h(t) h^*(t) &< \infty \text{ (tiempo discreto)}, \\ \eta(t) &= \int_{-\infty}^t h(t-s) \xi_0(ds), \\ \text{Sp} \int_0^{\infty} h(t) h^*(t) dt &< \infty \text{ (tiempo continuo)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Siendo el tiempo discreto, la densidad espectral  $f(\lambda)$ , satisfaciendo a la primera condición de (6.13), admite la siguiente factorización

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{2\pi} \varphi(e^{-i\lambda}) \varphi^*(e^{-i\lambda}), \quad (6.15)$$

donde la matriz  $\varphi(e^{-i\lambda})$  de dimensión  $k \times k$  es un valor de frontera de la matriz  $\varphi(z)$ , que es analítica dentro del círculo unitario y que se determina unívocamente por las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{-i\lambda}) \varphi^*(re^{-i\lambda}) = 2\pi f_{\eta}(\lambda),$$

$$|\det \varphi(1)|^2 = (2\pi)^k \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det [f_{\eta}(\lambda)] d\lambda \right\}.$$

## 11.7. Procesos con densidades espectrales racionales fraccionales

11.7.1. Teoremas de factorización. Una densidad espectral  $f(\lambda)$  se denomina racional fraccional, si  $f(\lambda)$  o bien sus elementos  $f_{ml}(\lambda)$ , cuando  $f(\lambda)$  es una matriz, admiten la representación en la forma  $\frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})}$  (tiempo discreto) o  $\frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)}$  (tiempo continuo), donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son ciertos polinomios.

Los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales pueden ser representados en forma de procesos de sumación deslizante, mientras que los procesos vectoriales tienen, además, un rango constante.

El resultado principal para esta clase de procesos estacionarios se contiene en los teoremas de factorización.

**Teorema 1.** Si  $f(\lambda)$  es una densidad espectral racional fraccional de cierto proceso estacionario con tiempo discreto, admite la factorización



del tipo

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} \right|^2 & (\text{proceso escalar}), \\ \frac{1}{2\pi} B(e^{-i\lambda}) B^*(e^{-i\lambda}) & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (7.1)$$

donde los polinomios  $P(z) = \sum_{l=0}^p p_l z^l$  y  $Q(z) = \sum_{l=0}^q q_l z^l$  no tienen ceros dentro del círculo unitario, con la particularidad de que si  $f(\lambda) = f(-\lambda)$ , los coeficientes  $p_l$ ,  $l = 1, p$ , y  $q_l$ ,  $l = 1, q$ , pueden ser reales;  $B(z)$  es una matriz  $k \times r$  ( $k$  es la dimensión del proceso y  $r$ , su rango), cuyos elementos son racionales fraccionales respecto a  $z$ , siendo  $B(z)$  analítica dentro del círculo unitario.

**Teorema 2** Si  $f(\lambda)$  es una densidad espectral racional fraccional de cierto proceso estacionario con tiempo continuo, admite factorización del tipo

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} \right|^2 & (\text{proceso escalar}); \\ \frac{1}{2\pi} B(i\lambda) B^*(i\lambda) & (\text{proceso vectorial}), \end{cases} \quad (7.2)$$

donde los polinomios  $P(z) = \sum_{l=0}^p p_l z^l$  y  $Q(z) = \sum_{l=0}^q q_l z^l$  no tienen ceros en el semiplano inferior y si, además,  $f(\lambda) = f(-\lambda)$ , entonces los polinomios  $P(iz)$  y  $Q(iz)$  tienen coeficientes reales;  $B(z)$  es una matriz  $k \times r$  ( $k$  es la dimensión del proceso,  $r$ , su rango), cuyos elementos son racionales fraccionales respecto de  $z$  y la matriz  $B(z)$  es analítica en el semiplano inferior.

Los teoremas de factorización proporcionan las siguientes representaciones espectrales de los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales.

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{P(e^{-i\lambda})}{Q(e^{-i\lambda})} d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso escalar con tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso escalar con tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

donde  $\zeta_0(\lambda)$  es el proceso estándar con incrementos ortogonales:

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} B(e^{-i\lambda}) d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso vectorial con tiempo discreto}); \\ \xi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} B(i\lambda) d\zeta_0(\lambda) && (\text{proceso vectorial con tiempo continuo}). \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

donde  $\xi_0(\lambda)$  es un proceso estándar  $r$ -dimensional con incrementos ortogonales,  $r$  es el rango del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

11.7.2. Ejemplos. Los ejemplos, que vienen abajo de procesos estacionarios escalares con tiempo discreto  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  describen por entero la clase de procesos con densidades espectrales racionales fraccionales.

1. Procesos de la media deslizante. Sea  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  una sucesión estándar incorrelacionada y sea  $a_l, l = 0, p$ , un juego arbitrario de magnitudes reales. El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , donde  $\xi(t) = a_0 \zeta_0(t) + a_1 \zeta_0(t-1) + \dots + a_p \zeta_0(t-p)$ , se llama proceso de la media deslizante de orden  $p$ .

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |a_0 + a_1 e^{-i\lambda} + \dots + a_p e^{-ip\lambda}|^2.$$

La representación espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} [a_0 + a_1 e^{-i\lambda} + \dots + a_p e^{-ip\lambda}] d\zeta_0(\lambda).$$

En particular, si  $a_l = \frac{\sigma}{p+1}$ ,  $l = \overline{0, p}$ , entonces

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi (p+1)^2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} (p+1) \lambda}{\sin^2 \frac{1}{2} \lambda};$$

$$\xi(t) = \frac{\sigma}{(p+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{-i(p+1)\lambda}}{1 - e^{-i\lambda}} e^{i\lambda t} d\zeta_0(\lambda).$$

2. Procesos de autorregresión. Sea  $\{\zeta_0(t), t \in T\}$  una sucesión estándar incorrelacionada. Examinemos la ecuación en diferencias finitas para definir el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ :

$$\xi(t) + b_1 \xi(t-1) + \dots + b_q \xi(t-q) = \sigma^2 \zeta_0(t). \quad (7.5)$$

La ecuación (7.5) es análoga a la ecuación de regresión múltiple lineal, por lo cual su solución, si existe como proceso estacionario en amplio sentido, se llama proceso de autorregresión de orden  $q$ . La solución estacionaria de la ecuación (7.5) existe, si los ceros del polinomio  $Q(z) = 1 + b_1 z + \dots + b_q z^q$  se encuentran fuera del círculo unitario.

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|1 + b_1 e^{-i\lambda} + \dots + b_q e^{-iq\lambda}|^2}.$$

La densidad espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{d\zeta_0(\lambda)}{1 + b_1 e^{-i\lambda} + \dots + b_q e^{-iq\lambda}},$$

donde  $\zeta_0(\lambda)$  es un proceso estándar con incrementos ortogonales.

**Observación.** El proceso de autorregresión de primer orden es de Márkov en amplio sentido.

**3. Modelo mixto de autorregresión y de media deslizando.** Sean  $T$  y  $\{\xi_0(t), t \in T\}$  los mismos que en dos ejemplos antecedentes. La combinación de los modelos de autorregresión y de media deslizando conduce a la ecuación

$$\begin{aligned} \xi(t) + b_1\xi(t-1) + b_2\xi(t-2) + \dots + b_q\xi(t-q) = \\ = a_0\xi(t) + a_1\xi(t-1) + \dots + a_p\xi(t-p). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Si los ceros del polinomio  $Q(z) = 1 + b_1z + \dots + b_qz^q$  se hallan fuera del círculo unitario, la ecuación (7.6) tiene solución estacionaria  $\{\xi(t), t \in T\}$  que se llama proceso mixto de autorregresión y de media deslizando de orden  $(q, p)$ .

La densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{a_0 + a_1e^{-i\lambda} + \dots + a_pe^{-ip\lambda}}{1 + b_1e^{-i\lambda} + \dots + b_qe^{-iq\lambda}} \right|^2.$$

La representación espectral

$$\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} \frac{a_0 + a_1e^{-i\lambda} + \dots + a_pe^{-ip\lambda}}{1 + b_1e^{-i\lambda} + \dots + b_qe^{-iq\lambda}} d\zeta_0(\lambda).$$

Atrae la atención el hecho de que la descripción adecuada de los fenómenos que observamos en la práctica y que son simulados por los procesos estacionarios se obtiene con la ayuda de los modelos (mixtos) de autorregresión y de media deslizando cuyo orden no es superior a 2.

## 11.8. Pronosticación, interpolación y filtración de los procesos estacionarios

**11.8.1. Problemas generales de la pronosticación, interpolación y filtración.** 1) **Pronosticación (extrapolación).** Supongamos que el proceso estacionario en amplio sentido  $\{\xi(t), t \in T\}$  se observa en los momentos de tiempo  $t \in T_0$ , donde  $T_0 = \{t \in T : t \leq t_0\}$  o  $T_0 = \{t \in T : t_0 - h \leq t \leq t_0\}$ ,  $h > 0$ . Es necesario dar, sobre la base de estas observaciones, el mejor pronóstico medio cuadrático de dicho proceso en cierto momento futuro de tiempo  $t^* = t_0 + \tau$ ,  $\tau > 0$ , es decir, se requiere hallar tal funcional  $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$  de los valores del proceso  $\xi(t)$  en los momentos  $t \in T_0$ , que sea

$$M \|\xi(t^*) - \eta(t^*)\|^2 \ll M \|\xi(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2, \quad (8.1)$$

donde  $\eta_1(t^*)$  es cualquier otra funcional de los valores del proceso  $\xi(t)$  en los momentos  $t \in T_0$ .

2) **Interpolación.** Supongamos que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  se observa en los momentos  $t \in T_0 \subset T$  y sea  $t^* \in T$  tal momento de tiempo que  $t^* \notin T_0$  y que existen  $t_i \in T_0$ ,  $i = 1, 2$ , para los cuales  $t_1 < t^* < t_2$ .

Hace falta, basándose en dichas observaciones del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , interpolar, del mejor modo posible en el sentido del criterio medio cuadrático, el valor del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  en el momento de

tiempo  $t^*$ , es decir, hallar la funcional  $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$  de los valores del proceso  $\xi(t)$  en los momentos de tiempo  $t \in T_0$ , para los cuales tiene lugar la correlación (8.1).

3) **Filtración.** Supongamos que en los momentos de tiempo  $t \in T_0 \subset T$  se observa un proceso  $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$  que representa en sí una suma de la señal útil  $s(t)$  y el ruido  $\theta(t)$ , donde  $\{s(t), t \in T\}$  son procesos estacionarios incorrelacionados.

Se requiere separar (filtrar) el ruido  $\theta(t)$  de la señal  $s(t)$ , es decir, encontrar tal funcional  $\eta(t^*) = g_{t^*}(\xi(t), t \in T_0)$  de los valores del proceso  $\xi(t)$  en los momentos  $t \in T_0$ , que

$$M \|\eta(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2 \ll M \|\eta(t^*) - \eta_1(t^*)\|^2, \quad (8.2)$$

donde  $\eta_1(t^*)$  es cualquier otra funcional de los valores del proceso  $\xi(t)$  en observación en los momentos  $t \in T_0$ .

Los primeros miembros de (8.1) y (8.2) llámense, respectivamente, **error de pronosticación e interpolación** y **error de filtración**.

La solución general de todos los problemas enunciados se da mediante el siguiente teorema (que es justo, a propósito, para cualesquiera procesos aleatorios de Hilbert).

**Teorema.** Sea  $\mathfrak{F}_{T_0}$  una  $\sigma$ -álgebra generada por los valores del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  en los momentos  $t \in T_0$ . La mejor (en el sentido medio cuadrático) funcional que resuelve el problema de pronosticación, interpolación o filtración tiene por expresión

$$\eta(t^*) = M \{\xi(t^*) / \mathfrak{F}_{T_0}\}. \quad (8.3)$$

Desgraciadamente, el valor práctico de este teorema no es grande, pues el cálculo efectivo del segundo miembro de (8.3) es una tarea en extremo difícil.

11.8.2. Los problemas de pronosticación lineal, interpolación y filtración se consideran siendo planteados en forma más simple: la funcional  $\eta(t^*)$  se busca en la clase de funcionales lineales de los valores del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  en los momentos de tiempo  $t \in T_0$ , es decir,

$$\eta(t^*) = \sum_{s \in T_0} C(s) \xi(s) \quad (\text{tiempo discreto}), \quad (8.4)$$

o bien

$$\eta(t^*) = \int_{T_0} C(s) \xi(s) ds \quad (\text{tiempo continuo}). \quad (8.5)$$

Cuando el tiempo es continuo, incluso para las clases relativamente sencillas de procesos, la función  $C(s)$  en (8.5) resulta ser generalizada.

El estudio de las funcionales lineales del tipo

$$\eta(t^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^*} C(i\lambda) d\zeta(\lambda), \quad (8.6)$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es un proceso espectral correspondiente al proceso

$\{\xi(t), t \in T\}$  (es decir,  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda) = \xi(t)$ ), permite realizar el análisis

sis sin recurrir inmediatamente a las funciones generalizadas. Los problemas de pronosticación, interpolación y filtración lineales tienen un significado geométrico muy simple.

Supongamos que  $H_{\xi}$  es un espacio de valores del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $H_{\xi}(T_0)$  es un subespacio cerrado en  $H_{\xi}$  que sirve de clausura en  $H_{\xi}$  de la cápsula lineal de las magnitudes aleatorias  $\xi(t_j), t_j \in T_0, j = 1, N$ . Los problemas de pronosticación e interpolación lineales consisten en la búsqueda de las magnitudes  $\hat{\eta}(t^*)$  que son proyecciones de los valores desconocidos  $\xi(t^*)$  en el subespacio  $H_{\xi}(T_0)$ ; el problema de filtración lineal consiste en la búsqueda de las magnitudes  $\hat{\eta}(t^*)$  que son proyecciones de los valores desconocidos  $s(t^*)$ , construidas del subespacio  $H_s \subset H_{\xi}$  al subespacio  $H_{\xi}(T_0)$ .

Supongamos que el proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$  con la función de correlación  $B_{\xi}(t)$  se observa en los momentos de tiempo  $t \in T_0 \subset T$  y sea  $\{\eta(t), t \in T\}$  un proceso estacionario ligado de modo estacionario con  $\{\xi(t), t \in T\}$ , mientras que  $B_{\eta\xi}(t)$  es su función de correlación recíproca.

Si suponemos que la estimación  $\hat{\eta}(t^*)$  del valor del proceso no observado  $\{\eta(t), t \in T\}$  en el momento  $t^* \in T$  tiene la forma

$$\hat{\eta}(t^*) = \begin{cases} \sum_{s \in T_0} C_{t^*}(s) \xi(s) & (\text{tiempo discreto}); \\ \int_{T_0} C_{t^*}(s) \xi(s) ds & (\text{tiempo continuo}). \end{cases}$$

la función  $C_{t^*}(t), t \in T_0$ , llamada función impulsora de transición del filtro lineal óptimo, puede hallarse como solución de una ecuación lineal (integral) de Fredholm de primer género con núcleo de Hermite:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s \in T_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-t) &= B_{\eta\xi}(t^*-t), t \in T_0 \text{ (tiempo discreto);} \\ \int_{T_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-t) ds &= B_{\eta\xi}(t^*-t), t \in T_0 \text{ (tiempo continuo).} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Así, por ejemplo, si  $T_0 = \{t \in (-\infty, \infty) : t \leq t_0\}$ ,  $t^* = t_0 + \tau$ , la segunda ecuación de (8.7) toma la forma

$$\int_{-\infty}^{t_0} C_{t^*}(s) B_{\xi}(s-u) ds = B_{\eta\xi}(t^*-u), u \leq t_0;$$

realizada la sustitución  $t_0 - u = v, t_0 - s = z$ , la última ecuación pasa a la que sigue

$$\int_0^{\infty} C_{t^*}(t_0-z) B_{\xi}(v-z) dz = B_{\eta\xi}(\tau+v), v \geq 0 \quad (8.8)$$

Si la solución de la ecuación integral (8.8) existe, entonces  $C_{\tau}(z) = C_{t^*}(t_0 - z)$  no depende de  $t_0$ , de donde tenemos

$$\int_0^{\infty} C_{\tau}(s) B_{\xi}(t-s) ds = B_{\eta_{\xi}}(\tau+t), t \geq 0, \quad (8.9)$$

y el proceso de pronosticación tiene la forma

$$\tilde{\eta}_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^t C_{\tau}(s) \xi(s) ds = \int_0^{\infty} C_{\tau}(s) \xi(t-s) ds$$

con el error de pronosticación

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= B_{\xi}(0) - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C_{\tau}(s) B_{\xi}(t-s) \overline{C_{\tau}(t)} ds dt = \\ &= B_{\xi}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 dF_{\xi}(\lambda), \end{aligned}$$

donde  $F_{\xi}(\lambda)$  es una función espectral del proceso  $\xi(t)$  y  $C_{\tau}(i\lambda) = \int_0^{\infty} C_{\tau}(t) e^{-i\lambda t} dt$  es la característica de frecuencia del filtro óptimo.

**11.8.3. Método de Wiener.** Con algunas suposiciones adicionales la ecuación integral (8.9) puede ser resuelta con la ayuda de un método propuesto por Wiener. A saber, supongamos que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es absolutamente continuo y su densidad espectral  $f_{\xi}(\lambda)$  admite la factorización del tipo

$$f_{\xi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2, \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt, \quad \operatorname{Re} z \geq 0$$

y sea  $f_{\eta_{\xi}}(\lambda)$  la densidad espectral recíproca de los procesos  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$ , con la particularidad de que la función  $k(i\lambda) = \frac{f_{\eta_{\xi}}(\lambda)}{\varphi(i\lambda)}$  es de cuadrado integrable, de suerte que

$$\begin{aligned} B_{\eta_{\xi}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f_{\lambda_{\xi}}(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(i\lambda) \overline{\varphi(i\lambda)} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} b(t+s) \overline{h(s)} ds, \end{aligned}$$

donde

$$b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} k(i\lambda) d\lambda.$$

La ecuación (8.9) puede escribirse en la forma

$$\int_0^{\infty} \left[ b(\tau+t+s) - \int_0^{\infty} C_{\tau}(u) h(t+s-u) du \right] \overline{h(s)} ds = 0, \quad t > 0.$$

La última ecuación se cumple, si

$$b(\tau+t) = \int_0^{\infty} C_{\tau}(u) h(t-u) du, \quad t > 0, \quad (8.10)$$

o bien

$$b(\tau+t) = \int_0^t C_{\tau}(u) h(t-u) du, \quad t > 0.$$

La ecuación (8.10) se resuelve con la ayuda de la transformación de Laplace:

$$C_{\tau}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{B_{\tau}(i\lambda)}{\varphi(i\lambda)} d\lambda, \quad (8.11)$$

donde

$$B_{\tau}(z) = \int_0^{\infty} b(\tau+x) e^{-zx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau\lambda} f_{\eta\xi}(\lambda)}{\varphi(i\lambda)} \frac{d\lambda}{z-i\lambda}.$$

**11.8.4. Método de Yaglom.** Como ya hemos indicado en el p. 11.8.2, la función impulsora de transición  $C_{\tau}(t)$  de un filtro óptimo puede no existir (para mayor precisión, sólo puede existir como una función generalizada). En tales casos resulta natural recurrir a la característica de frecuencia  $C_{\tau}(i\lambda)$  del correspondiente filtro óptimo.

Así, por ejemplo, si  $T_0 = \{t \in (-\infty, \infty): t \leq t_0\}$ ,  $t^* = t_0 + \tau$ ,  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d_{\xi}^*(\lambda)$ ,  $\eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d_{\eta}^*(\lambda)$  son procesos ligados de modo estacionario con densidades espectrales respectivas  $f_{\xi}^*(\lambda)$  y  $f_{\eta}(\lambda)$  y, además,  $f_{\eta\xi}(\lambda)$  es su densidad espectral recíproca, con la particularidad de que el proceso  $\xi(t)$  se observa en  $T_0$ , entonces se busca la característica de frecuencia  $C_{\tau}(i\lambda)$  del filtro lineal óptimo, es decir, tal función que para  $t^* = t_0 + \tau$  se verifiquen

$$\hat{\eta}(t^*) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t^*} C_{\tau}(i\lambda) d_{\xi}^*(\lambda), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda < \infty.$$

El método de Yaglom ofrece un procedimiento que permite hallar la característica de frecuencia como una función definida unívocamente por ciertas condiciones.

**Teorema de Yaglom.** Si la densidad espectral  $f_{\xi}(\lambda)$  es acotada, entonces las condiciones:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda < \infty;$$

b)  $C_{\tau}(i\lambda)$  es un valor de frontera de la función  $C_{\tau}(z)$  que es analítica en el semiplano derecho y creciente para  $|z| \rightarrow \infty$ , no más rápido que cierto grado de  $|z|$ ;

c) la función  $\psi(i\lambda) = e^{i\lambda\tau} f_{\eta_{\xi}}(\lambda) - C_{\tau}(i\lambda) f_{\xi}(\lambda)$  es un valor de frontera de la función analítica en el semiplano izquierdo  $\psi(z)$ , para la cual

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+iy)|^2 dy < \infty \text{ con } x < 0,$$

definen unívocamente la característica de frecuencia  $C_{\tau}(i\lambda)$  del filtro óptimo que evalúa la magnitud

$$\eta(t^*) = \eta(t_0 + \tau).$$

En este caso, el error medio cuadrático de la estimación óptima es

$$\sigma_{\xi}^2 = M |\eta(t_0 + \tau) - \hat{\eta}(t_0 + \tau)|^2 = B_{\eta}(0) - \int_{-\infty}^{\infty} |C_{\tau}(i\lambda)|^2 f_{\xi}(\lambda) d\lambda.$$

**EJEMPLO.** Consideremos un problema de pronosticación pura del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  cuya densidad espectral es racional fraccional, es decir,  $\xi(t) = \eta(t)$ ,

$$f_{\xi}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2},$$

donde  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios de grado  $p$  y  $q$ , respectivamente, cuyos ceros se encuentran en el semiplano izquierdo.

Si  $z_j^{(p)}$  y  $z_j^{(q)}$  son ceros de los polinomios respectivos  $P(z)$  y  $Q(z)$ , entonces tienen lugar las representaciones

$$P(z) = a \prod_{j=1}^m (z - z_j^{(p)})^{\alpha_j}, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = p;$$

$$Q(z) = b \prod_{j=1}^n (z - z_j^{(q)})^{\beta_j}, \quad \sum_{j=1}^n \beta_j = q.$$

Sea:

$$P_1(z) = (-1)^p a \prod_{j=1}^m (z + z_j^{-(p)})^{\alpha_j};$$

$$Q_1(z) = (-1)^n b \prod_{j=1}^n (z + z_j^{-(q)})^{\beta_j}.$$

La prolongación analítica de la función  $\psi(i\lambda) = [e^{i\lambda\tau} - C_{\tau}(i\lambda)] f_{\xi}(\lambda)$  tiene por expresión

$$\psi(z) = [e^{z\tau} - C_{\tau}(z)] \frac{P(z)}{Q(z)} \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$



Las condiciones del teorema de Yaglom exigen que la función  $C_\tau(t)$  tenga la forma

$$C_\tau(z) = \frac{M_\tau(z)}{P(z)},$$

donde  $M_\tau(z)$  es un polinomio de grado  $m_\tau \leq p - 1$  tal que

$$\frac{d^j M_\tau(z)}{dz^j} \Big|_{z=\alpha_k(q)} = \frac{d^j (e^{z\tau} P(z))}{dz^j} \Big|_{z=\alpha_k(q)},$$

$$j = 0, \beta_k - 1, \quad k = \overline{1, n}.$$

## 11.9. Descomposición del proceso estacionario

**11.9.1. Descomposición de Wold.** Supongamos que  $T_0 = \{t \in T : t \leq t_0\}$  y  $H_\xi(T_0) = H_\xi(t_0)$ . Designemos  $H_\xi^* = \bigcap_{t_0 \in T} H_\xi(t_0)$ . Para el subespacio  $H_\xi^*$  tienen lugar las siguientes posibilidades:

$$H_\xi^* = H_\xi \quad \text{y} \quad H_\xi^* \neq H_\xi.$$

En el último caso la situación será extremal, cuando  $H_\xi^* = 0$  (un espacio trivial compuesto del vector nulo).

Si  $H_\xi^* = H_\xi$ , el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  se llama **singular** (o **determinista**).

Si  $H_\xi^*$  es un subespacio propio del espacio  $H_\xi$ , entonces el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  se denomina **indeterminista**.

Si  $H_\xi^* = 0$ , el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  se llama **regular** (o **totalmente indeterminista**). Desde el punto de vista de los problemas de pronosticación (lineal) la singularidad del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  significa que su pronosticación lineal  $\hat{\eta}_\tau(t) = \hat{\eta}(t^*)$ ,  $t^* = t + \tau$ ,  $\tau > 0$ , para cualquier tiempo  $\tau$  en adelante es infalible, es decir,

$$\hat{\eta}_\tau(t) = \xi(t + \tau).$$

Por el contrario, siendo regular el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , la mejor pronosticación lineal del futuro infinitamente lejano sólo consiste en indicar la media, es decir,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{\eta}_\tau(t) = M\xi(t) = 0.$$

Sean  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\{\eta(t), t \in T\}$  unos procesos estacionarios con los espacios de valores  $H_\xi$  y  $H_\eta$ , respectivamente. El proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$  es **totalmente subordinado** al proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , si  $H_\eta(t) \subset H_\xi(t)$  para todo  $t \in T$ .

**Teorema 1. (Descomposición de Wold).** *Todo proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$  puede ser representado y, además, de modo único, en la forma*

$$\xi(t) = \xi^s(t) + \xi^r(t), \quad (9.1)$$

donde  $\xi^s(t)$  y  $\xi^r(t)$  son procesos incorrelacionados entre sí, totalmente subordinados al proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ .

El proceso  $\xi^s(t)$  es singular, el proceso  $\xi^r(t)$  es regular.

Las magnitudes  $\xi^r(t)$  son perpendiculares en  $H_{\xi}$ , trazadas desde  $\xi(t)$  sobre el subespacio  $H_{\xi}^r$ , mientras que las magnitudes  $\xi^s(t)$  son las proyecciones correspondientes.

**11.9.2. Componentes regular y singular del proceso estacionario.** Sean:  $F(\lambda)$  una función espectral del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$ , su desarrollo de Lebesgue, donde  $F_1(\lambda)$  es absolutamente continua,  $F_2(\lambda)$  es constante a trozos y  $F_3(\lambda)$  es continua y casi siempre en la medida de Lebesgue tiene derivada nula.  $F_1(\lambda)$  es una función espectral del componente regular  $\xi^r(t)$ , mientras que  $F_2(\lambda) + F_3(\lambda)$  es una función espectral del componente singular  $\xi^s(t)$ . El componente singular (proceso singular) puede, en principio, pronosticarse infaliblemente.

**EJEMPLO** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario con tiempo discreto cuya densidad espectral es constante a trozos:  $F_{\xi}(\lambda) = F_{(2)}(\lambda)$ , es decir, el proceso es singular.

Se busca el pronóstico lineal  $\hat{\eta}_T(t_0)$  del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  según las observaciones en los momentos de tiempo  $s \leq t_0$ , es decir, se necesita hallar  $\alpha_h, k \geq 0$ , tales que el error de pronosticación

$$M |\xi(t_0 + \tau) - \hat{\eta}_T(t_0)|^2 = M |\xi(t_0 + \tau) - \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \xi(t_0 - h)|^2$$

sea mínimo.

Puesto que el error de pronosticación puede expresarse en la forma

$$B_{\xi}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \bar{\alpha}_l e^{i(l-h)\lambda} dF_{\xi}(\lambda)$$

y  $F_{\xi}(\lambda)$  es constante a trozos, entonces se pueden indicar tales  $\alpha_h$  que

$$B_{\xi}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h \bar{\alpha}_l e^{i(l-h)\lambda} dF_{\xi}(\lambda) = 0,$$

es decir, el pronóstico puede ser, en principio, infalible.

Son singulares aquellos procesos escalares cuya  $f(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} F_1(\lambda)$  se anula en el conjunto de la medida positiva de Lebesgue, o bien

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln F'_{11}(\lambda) d\lambda = -\infty \quad (\text{tiempo discreto});$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln F'_{11}(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2} = -\infty \quad (\text{tiempo continuo}).$$

$$\text{En el caso de que sea } \int_{-\pi}^{\pi} \ln F'_{11}(\lambda) d\lambda >$$

$$> -\infty \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln F'_{11}(\lambda) d\lambda}{1 + \lambda^2} > -\infty \right),$$

los componentes regular y singular de tales procesos son iguales a

$$\xi^r(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi^r(\lambda), \quad \xi^s(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi^s(\lambda),$$

donde  $\xi(t) = \int_{\rho_0} e^{i\lambda t} d\xi(\lambda)$  es una descomposición espectral del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ ;  $\rho_0 \subset \Lambda$  es un conjunto de la medida de Lebesgue nula, en el cual están concentrados los puntos de discontinuidad (crecimiento) de la función  $F_{(2)}(\lambda) + F_{(3)}(\lambda)$ ;  $\bar{\rho}_0$  es el complemento de  $\rho_0$  en  $\Lambda$ .

Todo proceso estacionario vectorial del primer rango es o regular, o bien singular.

Como el componente singular de un proceso estacionario puede predecirse en principio infaliblemente según el pasado infinitamente alejado, en los problemas de pronosticación, interpolación y filtración provocan el mayor interés los procesos regulares.

**Teorema 2.** Para que un proceso estacionario escalar sea regular, es necesario y suficiente que este proceso constituya una reacción de un filtro físicamente realizable a cuya entrada llega una sucesión incorrelacionada estándar (en el caso de tiempo discreto), o un proceso estándar con incrementos ortogonales (en el caso de tiempo continuo).

La condición del teorema 2 es necesaria y suficiente para que un proceso vectorial de rango máximo sea regular. Los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales son regulares.

## 11.10. Resolución de los problemas de pronosticación lineal, interpolación y filtración

**11.10.1. Pronosticación lineal (extrapolación).** Supongamos que  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso regular escalar con tiempo discreto;

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(e^{-i\lambda})|^2$ , la densidad espectral de éste;  $\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\xi^r(\lambda)$ , su representación espectral y  $\xi(t) = \sum_{s=-\infty}^t C(t-s) \xi_0(s)$ , una representación en forma de un proceso de sumación deslizante,  $\sum_{t=-\infty}^{\infty} |C(t)|^2 < \infty$ .

**Teorema 1.** El mejor pronóstico lineal  $\xi_{\tau}(t)$  del valor  $\xi(t+\tau)$ ,  $\tau > 0$ , realizado según las observaciones  $\xi(s)$ ,  $s \leq t$ , para el tiempo  $\tau$  en adelante se da mediante la fórmula

$$\xi_{\tau}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t+\tau)\lambda} \frac{\varphi_{\tau}(e^{-i\lambda})}{\varphi(e^{-i\lambda})} d\xi^r(\lambda), \quad (10.1)$$

donde

$$\varphi(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=0}^{\infty} C(t) e^{-i\lambda t}; \quad \varphi_{\tau}(e^{-i\lambda}) = \sum_{t=\tau}^{\infty} C(t) e^{-i\lambda t}.$$

El error de pronosticación  $\sigma_{\tau}^2 = M |\xi(t+\tau) - \hat{\xi}_{\tau}(t)|^2$  es

$$\sigma_{\tau}^2 = \sum_{s=0}^{\tau-1} C(s) = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} \sum_{s=0}^{\tau-1} |d_s|^2, \quad (10.2)$$

donde  $d_n$  se determina de la correlación

$$\exp \left\{ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\lambda} \ln f(\lambda) d\lambda \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n.$$

En particular,

$$\sigma_{\tau}^2 = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (10.3)$$

es decir,  $\frac{\sigma_{\tau}^2}{2\pi}$  es la media geométrica (continua) de la densidad espectral.

EjemPlo 1. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$ ,  $T = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , un proceso de MArkov en amplio sentido con función de correlación  $B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$ ,  $\alpha > 0$ . La densidad espectral  $f(\lambda)$  tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{|1 - \beta e^{-i\lambda}|^2}, \quad \beta = e^{-\alpha}.$$

El mejor pronóstico lineal para el tiempo  $\tau$  en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_{\tau}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} e^{-\alpha\tau} d\zeta_{\tau}^*(\lambda) = e^{-\alpha\tau} \zeta_{\tau}^*(t),$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es un proceso espectral correspondiente al proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ . El error de pronosticación

$$\sigma_{\tau}^2 = \sigma^2 (1 - e^{-2\alpha\tau}).$$

Sean:  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso regular vectorial de rango máximo con tiempo discreto;  $f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \varphi(e^{-i\lambda}) \varphi^*(e^{-i\lambda})$ , la densidad espectral (matricial);  $\xi(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t} d\zeta_{\tau}^*(\lambda)$ , una representación espectral, mientras que la matriz  $\varphi(z)$  se desarrolla en la serie

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n) z^n.$$

**Teorema 2.** El mejor pronóstico lineal  $\hat{\xi}_\tau(t)$  para el tiempo  $\tau$  en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda(t+\tau)} \left[ \varphi(e^{-i\lambda}) - \sum_{n=0}^{\tau-1} b(n) e^{-in\lambda} \right] \varphi^{-1}(e^{-i\lambda}) d\zeta(\lambda). \quad (10.4)$$

La matriz de errores de la pronosticación para un paso adelante

$$G = \varphi(0) \varphi^*(0). \quad (10.5)$$

**EJEMPLO 2.** Sea  $\{\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_k(t)), t \in T\}$  un proceso mixto de autorregresión y media deslizante cuya densidad espectral tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} B^{-1}(e^{-i\lambda}) A(e^{-i\lambda}) G A^*(e^{-i\lambda}) B^{*-1}(e^{-i\lambda}),$$

donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son polinomios matriciales,  $A(0) = B(0) = I$  (matriz  $k \times k$  unidad),  $\det G \neq 0$ . Aquí,  $\varphi(e^{-i\lambda}) = B^{-1}(e^{-i\lambda}) \times \times A(e^{-i\lambda}) G^{\frac{1}{2}}$ . El mejor pronóstico lineal  $\hat{\xi}_\tau(t)$  se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \xi(t-n),$$

donde  $C_n$  se determinan como los coeficientes del desarrollo  $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \left( \sum_{n=\tau}^{\infty} b_n z^n \right) \varphi^{-1}(z)$ . La matriz de errores de la pronosticación para 1 paso adelante coincide con  $G$ .

En particular, para el proceso de autorregresión ( $A(z) \equiv I$ ) el mejor pronóstico para un paso adelante se determina según los valores  $\xi(t)$ ,  $\xi(t-1)$ , ...,  $\xi(t-q)$ , donde  $q$  es el grado del polinomio  $B(z)$ .

Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso regular escalar con tiempo continuo.

$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} |\varphi(i\lambda)|^2$ , su densidad espectral;  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda)$ ,

la representación espectral;  $\hat{\xi}(t) = \int_{-\infty}^t C(t-s) d\zeta(s)$ , una representación

en forma de un proceso de sumación deslizante.

**Teorema 3.** El mejor pronóstico lineal  $\hat{\xi}_\tau(t)$  para el tiempo  $\tau$  en adelante se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}_\tau(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t+\tau)} \frac{\Psi_\tau(i\lambda)}{\Psi(i\lambda)} d\zeta_\tau(\lambda), \quad (10.6)$$

donde  $\Psi(i\lambda) = \int_0^\infty C(s) e^{-i\lambda s} ds$ ,  $\Psi_\tau(i\lambda) = \int_\tau^\infty C(s) e^{-i\lambda s} ds$ .

El error de pronosticación

$$\sigma_\tau^2 = \int_0^\tau |a(s)|^2 ds. \quad (10.7)$$

**EJEMPLO 3.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso de autorregresión cuya densidad espectral tiene por expresión

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2},$$

donde  $Q(z)$  es un polinomio de grado  $q > 1$ , cuyas raíces  $\beta_j$ ,  $j = \overline{1, q}$  son sencillas y tienen las partes reales positivas. El mejor pronóstico lineal para el tiempo  $\tau$  en adelante se da mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_\tau(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \sum_{j=1}^q e^{-\beta_j \tau} \prod_{l \neq j} \frac{\beta_l + i\lambda}{\beta_l - \beta_j} d\zeta_\tau(\lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^q e^{-\beta_j \tau} \prod_{l \neq j} \frac{1}{\beta_l - \beta_j} \left( \beta_l + \frac{d}{dt} \right) \xi(t). \end{aligned}$$

**11.10.2. Interpolación del valor omitido.** Sea  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  y  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario con la función espectral absolutamente continua  $F(\lambda)$ . Supongamos conocidos los valores  $\xi(s)$ ,  $s \neq t_0$ . Es necesario hallar la mejor interpolación (lineal)  $\hat{\xi}(t_0)$  del valor omitido  $\xi(t_0)$ . La magnitud

$$M[\xi(t_0) - \hat{\xi}(t_0)] [\xi^*(t_0) - \hat{\xi}^*(t_0)] = \begin{cases} \sigma^2 & (\text{proceso escalar}); \\ G & (\text{proceso vectorial}) \end{cases}$$

se llama error (matriz de errores) de la interpolación del valor omitido.

**Teorema 4.** Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso escalar y  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)} < \infty$ ,

donde  $f(\lambda)$  es la densidad espectral del proceso, entonces la mejor interpolación lineal  $\hat{\xi}(t_0)$  del valor omitido  $\xi(t_0)$  se da mediante la

fórmula

$$\hat{\xi}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \left[ 1 - \frac{2\pi}{f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\mu}{f(\mu)}} \right] d\zeta(\lambda), \quad (10.8)$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es un proceso espectral para  $\{\xi(t), t \in T\}$ . En este caso, el error de interpolación

$$\sigma^2 = \frac{4\pi^2}{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{f(\lambda)}}. \quad (10.9)$$

Sean  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso vectorial y  $f(\lambda)$ , su densidad espectral matricial. Designemos con  $f^{(-1)}(\lambda)$  una matriz inversa de  $f(\lambda)$  (si  $\det f(\lambda) \neq 0$ ), o bien una matriz inversa generalizada (si  $\det f(\lambda) = 0$ ). Lo último significa que  $f^{(-1)}(\lambda) = [f(\lambda) + \Pi(\lambda)]^{-1} - \Pi(\lambda)$ , donde  $\Pi(\lambda)$  se define unívocamente por las correlaciones:  $f(\lambda)\Pi(\lambda) = \Pi(\lambda)f(\lambda) = 0$ ,  $\Pi(\lambda) = \Pi^*(\lambda)$ .

**Teorema 5.** Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso vectorial y la matriz  $f^{(-1)}(\lambda)$  es integrable, entonces la mejor interpolación lineal  $\hat{\xi}(t_0)$  del valor omitido  $\xi(t_0)$  se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \left[ I - \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda) d\lambda \right\}^{-1} f^{(-1)}(\lambda) \right] d\zeta(\lambda), \quad (10.10)$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es un proceso espectral para  $\{\xi(t), t \in T\}$ . En este caso, la matriz de errores de la interpolación

$$G = 4\pi \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f^{(-1)}(\lambda) d\lambda \right\}^{(-1)}. \quad (10.11)$$

**EJEMPLO 4.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso de Márkov en amplio sentido con densidad espectral

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \beta^2}{|1 - \beta e^{-i\lambda}|^2}, \quad \beta = e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

La mejor interpolación lineal  $\hat{\xi}(t_0)$  del valor omitido se da mediante la fórmula

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(t_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t_0} \frac{\beta}{1 + \beta^2} [e^{i\lambda} + e^{-i\lambda}] d\zeta(\lambda) = \\ &= \frac{\beta}{1 + \beta^2} \xi(t_0 + 1) + \frac{\beta}{1 + \beta^2} \xi(t_0 - 1). \end{aligned}$$

El error de interpolación

$$\sigma^2 = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}.$$

11.10.3. Interpolación de los valores del proceso estacionario con tiempo continuo según las observaciones en momentos discretos equidistantes. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario escalar con tiempo continuo, cuya función espectral  $F(\lambda)$  es absolutamente continua. Supongamos que se observan los valores  $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

**Teorema 6.** La mejor interpolación lineal  $\hat{\xi}(t)$  del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  según las observaciones  $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se da mediante la fórmula

$$\hat{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l) e^{i t(\lambda + 2\pi l)}}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l)} d\zeta(\lambda), \quad (10.12)$$

donde  $f(\lambda)$  es la densidad espectral del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\zeta(\lambda)$ , su proceso espectral. El error de interpolación  $\sigma^2 = \mathbf{M} |\xi(t) - \hat{\xi}(t)|^2$  es igual a

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| 1 - \frac{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda - 2\pi l) e^{i t 2\pi l}}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} f(\lambda + 2\pi l)} \right|^2 f(\lambda) d\lambda. \quad (10.13)$$

En particular, si  $\sigma^2 = 0$ , el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  puede ser interpolado infaliblemente según los valores  $\xi(n), n = 0, \pm 1, \pm 2$ . Para ello es necesario y suficiente que  $f(\lambda)$  se reduzca a cero fuera del intervalo  $[-\pi, \pi]$ . En este caso se verifica la fórmula de Kotélnikov—Shannon

$$\hat{\xi}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \pi(j-t)}{\pi(j-t)} \xi(j). \quad (10.14)$$

11.10.4. Filtración lineal. El objetivo de la filtración consiste en separar la señal  $s(t)$  según las observaciones del proceso estacionario  $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$ . El problema se resuelve del modo más fácil en aquel caso cuando los valores del proceso  $\xi(t)$  son observables en todo el intervalo de tiempo.

Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario escalar con la función espectral absolutamente continua  $F_{\xi}(\lambda)$  y sean  $f_{\xi}(\lambda), f_s(\lambda)$  y  $F_{\theta}(\lambda)$  las densidades espectrales de los procesos  $\xi(t), s(t)$  y  $\theta(t)$ , respectivamente.

**Teorema 7.** La característica de frecuencia del filtro óptimo para separar la señal  $s(t)$  tiene por expresión

$$H(t\lambda) = \frac{f_s(\lambda)}{f_{\xi}(\lambda)}, \quad (10.15)$$



y el error medio cuadrático de filtración es igual a

$$\int_{\Lambda} \frac{f_s(\lambda)}{f_z(\lambda)} f_0(\lambda) d\lambda. \quad (10.16)$$

Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso estacionario vectorial de rango máximo con la función espectral (matricial) absolutamente continua  $F_z(\lambda)$  y sean  $\hat{f}_z(\lambda)$ ,  $\hat{f}_s(\lambda)$  y  $\hat{f}_0(\lambda)$  las derivadas de las funciones espectrales  $F_z(\lambda)$ ,  $F_s(\lambda)$  y  $F_0(\lambda)$  en la medida  $\mu(d\lambda) = \text{Sp } dF_z(\lambda)$ , es decir,

$$\int_{\Gamma} dF_z(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_z(\lambda) \mu(d\lambda), \quad \int_{\Gamma} dF_s(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_s(\lambda) \mu(d\lambda),$$

$$\int_{\Gamma} dF_0(\lambda) = \int_{\Gamma} \hat{f}_0(\lambda) \mu(d\lambda).$$

**Teorema 8.** La característica de frecuencia del filtro óptimo para separar la señal  $s(t)$  tiene por expresión

$$H(i\lambda) = \hat{f}_s(\lambda) \hat{f}_z^{-1}(\lambda), \quad (10.17)$$

y la matriz de errores de la filtración es igual a

$$\int_{\Lambda} \hat{f}_s(\lambda) \hat{f}_z^{-1}(\lambda) \hat{f}_0(\lambda) \mu(d\lambda). \quad (10.18)$$

Supongamos que  $\xi(t) = s(t) + \theta(t)$  es un proceso estacionario regular (que tiene rango máximo en el caso vectorial) y sean  $f_z(\lambda)$ ,  $f_s(\lambda)$  las densidades espectrales de los procesos  $\xi(t)$  y  $s(t)$ , respectivamente, y  $f_{s\xi}(\lambda)$ , la densidad espectral recíproca, mientras que  $g(\lambda) = f_{s\xi}(\lambda) f_z^{-1}(\lambda)$ . Mediante  $\hat{s}_\tau(\lambda)$  está designada la mejor (en media cuadrática) estimación de la señal  $s(t + \tau)$  según las observaciones del proceso  $\xi(u)$ ,  $u \leq t$ . Cuando  $\tau > 0$ , se habla de una filtración con pronóstico; cuando  $\tau < 0$ , suele decirse de una filtración con retardo. Los teoremas 7 y 8 describen filtros óptimos para el caso de un retardo tan grande como se quiera.

**Teorema 9.** La característica de frecuencia  $H_\tau(i\lambda)$  del filtro óptimo para estimar la señal  $s(t + \tau)$  según las observaciones de  $\xi(u)$ ,  $u \leq t$ , tiene por expresión

$$H_\tau(i\lambda) = \begin{cases} \sum_{s=0}^{\infty} a(s + \tau) e^{-i\lambda s} \varphi^{-1}(e^{-i\lambda}) & (\text{tiempo discreto}); \\ \left[ \int_0^{\infty} e^{-i\lambda s} a(s + \tau) ds \right] \varphi^{-1}(i\lambda) & (\text{tiempo continuo}), \end{cases} \quad (10.10)$$

donde  $\varphi(e^{-i\lambda})$ ,  $\varphi(i\lambda)$  son los componentes de factorización de la densidad espectral  $f_{\zeta}(\lambda)$ ;

$$a(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda s} g(\lambda) \varphi(e^{-i\lambda}) d\lambda & (\text{tiempo discreto}); \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} g(\lambda) \varphi(i\lambda) d\lambda & (\text{tiempo continuo}). \end{cases}$$

Por consiguiente, si  $\xi(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} d\zeta_{\xi}(\lambda)$  es la densidad espectral del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , entonces

$$\hat{x}_{\tau}(t) = \int_{\Lambda} e^{i\lambda t} H_{\tau}(i\lambda) d\zeta_{\xi}(\lambda). \quad (10.2'')$$

## 11.11. Procesos aleatorios estacionarios en estrecho sentido

**11.11.1. Definición.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso aleatorio con sus valores en el espacio  $\{\mathfrak{X}, \mathfrak{B}\}$ , donde  $\mathfrak{X}$  es un espacio métrico,  $\mathfrak{B}$ , una  $\sigma$ -álgebra boreliana en  $\mathfrak{X}$ ,  $T$  es uno de los conjuntos del tipo  $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $\{0, 1, 2, \dots\}$  (tiempo discreto) o bien  $(-\infty, \infty)$ ,  $[0, \infty)$  (tiempo continuo).

**Definición 1.** El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  se llama estacionario en estrecho sentido, si para cualesquiera  $t, t_k \in T, k = \overline{1, n}, n \geq 1$ , tales que  $t_k + t \in T$ , la distribución conjunta en  $(\mathfrak{X}^n, \mathfrak{B}^n)$  de las magnitudes aleatorias  $\{\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t)\}$  no depende de  $t$ .

En otras palabras, un proceso es estacionario en estrecho sentido, si sus distribuciones de dimensiones finitas no varían con los desplazamientos admisibles  $(t_k + t \in T, k = \overline{1, n})$  de tiempo.

La definición 1 es equivalente a la siguiente: el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es estacionario en estrecho sentido, si para una función  $\mathfrak{A}^n$ -medible arbitraria  $f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \in \mathfrak{X}$ , la esperanza matemática  $Mf(\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t))$  no depende de  $t$ , cualesquiera que sean  $t, t_k, k = \overline{1, n}, n \geq 1$ , tales que  $t_k + t \in T$ .

En el caso de tiempo continuo ( $T = (-\infty, \infty)$ ) o bien  $T = [0, \infty)$ ) se supone corrientemente que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es continuo estocástico:  $\lim_{t \rightarrow s} P\{d(\xi(t), \xi(s)) > \varepsilon\} = 0$  para todo

$\varepsilon > 0$ , donde  $d(\dots)$  es distancia en el espacio  $\mathfrak{X}$ .

Un proceso estacionario en amplio sentido no es (en el caso general) estacionario en estrecho sentido. Por otra parte, un proceso estacionario en estrecho sentido no cuenta forzosamente con la esperanza matemática y el segundo momento. Si, en cambio, la esperanza matemática y el segundo momento de un proceso estacionario en estrecho sentido tienen dimensiones finitas, entonces dicho proceso es también estacionario en amplio sentido.

**11.11.2. Ejemplos.** 1. Sea  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  o bien  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas. El proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una sucesión aleatoria estacionaria en estrecho sentido.

2. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  la sucesión estacionaria definida en el ejemplo 1 y supongamos que  $\alpha_t, t \in T$ , es una sucesión de números reales o complejos tal que la serie  $\sum_{s \in T} \alpha_s \xi(t+s), s+t \in T$ , converge en probabilidad (y, por lo tanto, por ser  $\xi(s)$  independiente, con la probabilidad 1). El proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$ , donde  $\eta(t) = \sum_{s \in T} \alpha_s \xi(t+s)$ , es una sucesión aleatoria estacionaria en estrecho sentido.

3. Supongamos que  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  o bien  $T = [0, \infty)$  y  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso de Márkov con sus valores en  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ , donde  $\mathfrak{X}$  es un espacio métrico compacto cuya única distribución estacionaria es  $\rho(\cdot)$  (la medida invariante).

Si la distribución  $\xi(0)$  coincide con  $\rho(\cdot)$ , entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido.

4. Sea  $\{\eta(t), t \in T\}, T = [0, \infty)$ , un proceso homogéneo con incrementos independientes. Si  $f(u, x)$  es una función continua para la cual

$$\int_0^{\infty} M |f(u, \eta(u))| du < \infty,$$

el proceso

$$\{\xi(t), t \in T\}, \quad \text{donde} \quad \xi(t) = \int_0^{\infty} f(u, \eta(t+u) - \eta(t)) du,$$

es estacionario en estrecho sentido.

5. Un proceso gaussiano estacionario en amplio sentido es también estacionario en estrecho sentido.

6. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  una sucesión de vectores aleatorios estacionaria en los sentidos amplio y estrecho simultáneamente.

El proceso  $\{\eta_h(t), t \in T\}$ , donde  $\eta_h(t) = \xi(t) \xi^*(t+h), t+t+h \in T$  y  $h$  es fijado, es una sucesión de matrices aleatorias, estacionaria en estrecho sentido.

**11.11.3. Transformaciones que conservan la medida.** Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido con sus valores en  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ . Designemos mediante  $\mathfrak{X}^T$  el espacio de sucesiones  $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$  en el caso de tiempo discreto, o bien el espacio de funciones  $x(t), t \in (-\infty, \infty)$  en el caso de tiempo continuo  $T$ ; se designará con  $\mathfrak{A}$  la  $\sigma$ -álgebra mínima en  $\mathfrak{X}^T$  que contiene los conjuntos cilíndricos y sea  $P_{\xi}$  una medida en  $\mathfrak{A}$  inducida por el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  y definida en los conjuntos cilíndricos de  $\mathfrak{A}$  por medio de la igualdad para cualesquiera  $A_n \in \mathfrak{B}, t_k \in T, k = \overline{1, n}, n \geq 1$ ,

$$P_{\xi}(x \in \mathfrak{X}^T, x(t_1) \in A_1, \dots, x(t_n) \in A_n) = P\{\xi(t_1+h) \in A_1, \dots, \xi(t_n+h) \in A_n\},$$

donde  $h = 0$ , si  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , o bien  $T = (-\infty, \infty)$  y  $t_k + h \geq 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ , si  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , o bien  $T = \{0, \infty\}$ .

El espacio  $\{\mathfrak{X}^T, \mathfrak{X}, P_{\xi}\}$  se llama **representación del proceso**  $\{\xi(t), t \in T\}$ . Para todo  $t \geq 0$ ,  $t \in T$ , determinemos la transformación del espacio  $\mathfrak{X}^T$  en sí mismo, llamada **operación de desplazamiento del tiempo**  $S_t$ , mediante la igualdad  $\forall x \in \mathfrak{X}^T, x_t = S_t x$ , donde  $x_t(s) = x(t+s)$ . Se verifica la siguiente igualdad

$$S_t S_s = S_{t+s}, \quad S_0 = I, \quad (11.1)$$

donde  $I$  es una transformación idéntica.

La condición de que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  sea estacionario significa que para un conjunto cilíndrico arbitrario  $C \in \mathfrak{B}$

$$P_{\xi}(C) = P_{\xi}(S_t C).$$

**Definición 2.** Soan  $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F}, \mu)$  un espacio con medida y  $S$ , una aplicación medible de  $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F})$  en  $(\mathfrak{Y}, \mathfrak{F})$ . La transformación  $S$  es aquella que conserva la medida (endomorfismo), si para todo  $A \in \mathfrak{F}$

$$\mu(S^{-1}A) = \mu(A), \quad (11.2)$$

donde  $S^{-1}A$  es la preimagen completa del conjunto  $A$  en la aplicación  $S$ .

La transformación  $S$  se denomina **invertible**, si existe tal transformación medible  $S^{-1}$  que  $SS^{-1} = S^{-1}S = I$ .

La transformación  $S^{-1}$  se llama **inversa** de  $S$ .

La definición 2, siendo aplicada a los procesos aleatorios, significa que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es estacionario, si el operador de desplazamiento del tiempo  $S_t$  en  $\mathfrak{X}^T$  conserva la medida  $P_{\xi}$ .

Sea  $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$  el espacio probabilístico básico en el cual está definido el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ . Al poner la trayectoria  $\xi(\cdot, \omega)$  del proceso  $\{\xi(t) = \xi(t, \omega), t \in T\}$  en correspondencia con todo  $\omega \in \Omega$ , podemos determinar la aplicación medible  $T_{\xi}$  del espacio  $(\Omega, \mathfrak{S})$  en el espacio  $(\mathfrak{X}^T, \mathfrak{B})$ .

Si  $T_{\xi}^{-1}$  es una aplicación realizada desde  $(\mathfrak{X}^T, \mathfrak{B})$  en  $(\Omega, \mathfrak{S})$  cuyo dominio de definición está constituido por los valores de la transformación  $T_{\xi}$ , entonces la transformación  $S_t$  del espacio  $\mathfrak{X}^T$  induce la transformación biunívoca  $\hat{S}_t$  del espacio  $\Omega$  según la fórmula

$$\hat{S}_t = T_{\xi}^{-1} S_t T_{\xi}. \quad (11.3)$$

La transformación  $\hat{S}_t$  conserva la medida  $P$ . La transformación  $\hat{S}_t^{-1}$  genera, a su vez, una transformación de magnitudes aleatorias con valores en  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$ : para cualquier magnitud aleatoria  $\xi(\omega) \in \mathfrak{X}$

$$[\hat{S}_t \xi](\omega) = \xi(\hat{S}_t^{-1} \omega). \quad (11.4)$$

Todo proceso estacionario en estrecho sentido puede ser representado en la forma

$$\xi(t) = \hat{S}_t \xi(0). \quad (11.5)$$

En particular, si el tiempo  $t$  del proceso  $\xi(t)$  es discreto, entonces

$$\xi(t) = \hat{S}_t \xi(0), \quad (11.6)$$

donde  $\hat{S} = \hat{S}_1$ .

**11.11.4. Teoremas ergódicos.** La teoría de los procesos aleatorios estacionarios en estrecho sentido, en aquella de sus partes donde se usa en gran escala el operador de desplazamiento, puede considerarse como un caso particular de la teoría ergódica concerniente a las transformaciones que conservan la medida (los endomorfismos) de un cierto espacio en sí mismo.

Una de las importantísimas propiedades de los procesos aleatorios  $\{\xi(t), t \in T\}$ , estacionarios en estrecho sentido, consiste en la existencia de límites de las medias de tiempo

$$\left. \begin{aligned} \eta^+(t) &= \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} \xi(s), \quad T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ &\quad \text{o bien } T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ \eta^-(t) &= \frac{1}{2t+1} \sum_{s=-t}^t \xi(s), \quad T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}; \\ \eta^+(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t \xi(s) ds, \quad T = (-\infty, \infty), \\ &\quad \text{o bien } T = [0, \infty); \\ \eta^-(t) &= \frac{1}{2t} \int_{-t}^t \xi(s) ds, \quad T = (-\infty, \infty) \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

para  $t \rightarrow \infty$ .

Designaremos mediante  $\mathfrak{E}^t \subset \mathfrak{E}$  y  $\mathfrak{E}^{\pm t} \subset \mathfrak{E}$  las  $\sigma$ -álgebras generadas por las magnitudes aleatorias  $\xi(s)$  para  $s \geq t$ , y  $s \geq t, s \leq -t, t \geq 0$ , respectivamente, y sea

$$\mathfrak{E}^\infty = \bigcap_{t \in T} \mathfrak{E}^t, \quad \mathfrak{E}^{\pm\infty} = \bigcap_{t \in T} \mathfrak{E}^{\pm t}.$$

**Teorema de Birkhoff—Ginčin.** Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso aleatorio estacionario en estrecho sentido para el cual  $M\xi(0), 0 < < \infty$ , entonces, con la probabilidad 1, existen los límites

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^+(t) &= \eta^+; \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^\pm(t) &= \eta^\pm, \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

con la particularidad de que

$$\left. \begin{aligned} \eta^+ &= M[\xi(0)/\mathfrak{E}^\infty]; \\ \eta^\pm &= M[\xi(0)/\mathfrak{E}^{\pm\infty}]; \end{aligned} \right\} \quad (11.9)$$

$$\left. \begin{aligned} M\eta^+ &= M\xi(0); \\ M\eta^\pm &= M\xi(0). \end{aligned} \right\} \quad (11.10)$$

El suceso  $A \in \mathfrak{E}$  se denomina invariante respecto de la transformación  $\hat{S}_t$  ( $\hat{S}_t$ -invariante), si

$$P\{\hat{S}_t^{-1}(A) \Delta A\} = 0,$$

donde  $\Delta$  es el símbolo de la diferencia simétrica de los conjuntos.

La clase de todos los conjuntos  $\hat{S}_t$ -invariantes constituye la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{E}^\infty$  y  $\mathfrak{E}^{\pm\infty}$  (lo último cuando  $T = (-\infty, \infty)$  o  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ).

Si todo conjunto  $\hat{S}_t$ -invariante tiene probabilidad 0 ó 1, la transformación  $\hat{S}_t$  se denominará **métrica transitiva**.

Es evidente, que si  $\hat{S}_t$  es una transformación métrica transitiva, en las condiciones del teorema de Birkhoff-Ginčin tienen lugar las igualdades

$$\begin{cases} \eta^+ = M\xi(0); \\ \eta^\pm = M\xi(0). \end{cases}$$

Un proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$ , estacionario en estrecho sentido, se denomina **ergódico**, si la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{E}^\infty$  es trivial, es decir, sólo contiene sucesos cuyas probabilidades son iguales a 0 ó 1.

**Teorema 1.** Para que un proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$  sea ergódico, es necesario y suficiente que se cumpla cualquiera de las dos condiciones:

- 1) la transformación  $\hat{S}_t$  es métrica transitiva;
- 2) para toda función  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x)$  tal que  $M|f(\xi(0))| < \infty$ , la función

$$\hat{f} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{t-1} f(\hat{S}_m \xi(0)) & \text{(tiempo discreto),} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\hat{S}_u \xi(0)) du & \text{(tiempo continuo)} \end{cases} \quad (11.11)$$

es constante con la probabilidad 1.

Del teorema de Birkhoff-Ginčin se desprende directamente el siguiente corolario.

**Teorema 2.** (Ley reforzada de los grandes números para los procesos estacionarios en estrecho sentido).

Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso aleatorio ergódico estacionario en estrecho sentido, para el cual  $M d(\xi(0), 0) < \infty$ , entonces, con la probabilidad 1,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^+(t) &= M\xi(0); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta^\pm(t) &= M\xi(0). \end{aligned}$$

**11.11.5. Ejemplos de procesos ergódicos.** 1. Una sucesión de magnitudes aleatorias independientes o igualmente distribuidas  $\{\xi(t), t \in T\}$  con  $M|\xi(0)| < \infty$  es ergódica.

2. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  un proceso gaussiano estacionario con la función de correlación  $B(t)$ . Si  $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$ , entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso ergódico.

3. Sea  $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\{\xi(t), t \in T\}$ ,  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , una cadena de Márkov con valores en  $X$  cuya matriz de las probabilidades de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(cadena de Márkov cíclica).

Si la distribución  $\xi(0)$  es del tipo  $P\{\xi(0) = k\} = \frac{1}{n}$ , entonces  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una sucesión estacionaria ergódica.

Si el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  es ergódico, entonces el proceso  $\{\eta(t), t \in T\}$ , donde  $\eta(t) = f(\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), \dots, \xi(t_n + t))$ ,  $t, t_k \in T$ ,  $k = 1, n$ ,  $n \geq 1$  y  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una función arbitraria  $\mathfrak{B}^n$ -medible, es también ergódico.

En particular, si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  y  $f(x) = \chi_A(x)$  es el indicador del conjunto  $A \in \mathfrak{B}$ , entonces

$\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \chi_A(\xi(s)) = \frac{v_n(A)}{n}$  es la frecuencia de aparición del suceso  $\xi(s) \in A$ . De conformidad con el teorema 2, con la probabilidad 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n(A)}{n} = M\chi_A(\xi(0)) = P\{\xi(0) \in A\}.$$

Esta afirmación se conoce como el teorema de Borel (véase el cap. 2).

11.11.6. Mezclado. Sean  $\xi_n$  las medias de tiempo introducidas en el punto anterior. Suele decirse que al proceso estacionario (multi-dimensional)  $\{\xi(t), t \in T\}$  puede aplicarse el teorema del límite central, si existen los límites

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s^* = C$$

para  $T = [0, \infty)$  o bien  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$  o

$$\lim_{s \rightarrow \infty} M 2s \hat{\xi}_s \hat{\xi}_s^* = C$$

para  $T = (-\infty, \infty)$  o bien  $T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , y si

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F_{\hat{\xi}_s}(x) = \Phi(x),$$

donde

$$F_{\xi(s)}(x) = \begin{cases} P(\sqrt{s}\bar{\xi}_s \leq x), & T = \{0, \infty\} \text{ o bien } T = \{0, 1, 2, \dots\}; \\ P(\sqrt{2s}\bar{\xi}_s \leq x), & T = \{-\infty, \infty\} \text{ o bien } T = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \end{cases}$$

(en el caso del proceso multidimensional la desigualdad se entiende por elementos),  $\Phi(x)$  es la función de distribución normal (multidimensional) con media nula y varianza (matriz de covarianza)  $C$ . La presencia de las medias de tiempo en  $F_{\xi(s)}(x)$  presupone la ergodicidad de los procesos a los cuales resulta aplicable el teorema del límite central. No obstante, a pesar de que todos los momentos necesarios están presentes, en el caso dado se requieren ciertas condiciones complementarias, más rigurosas que la ergodicidad.

El ejemplo 3 del punto antecedente (cadena de Markov cíclica) nos da una prueba más sencilla y bastante ilustrativa del proceso estacionario ergódico que dispone de todos los momentos y que, sin embargo, a él no puede ser aplicado el teorema del límite central. La razón radica en la dependencia de los sumandos en la suma

$$\sqrt{s}\bar{\xi}_s = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{t=0}^{s-1} \xi(t).$$

Sean  $\mathfrak{E}_{-\infty}^t$  y  $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}$ ,  $\tau > 0$ , las  $\sigma$ -álgebras generadas por el proceso  $\xi(t)$ :  $\mathfrak{E}_{-\infty}^t = \sigma\{\xi(s), s < t\}$ ,  $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty} = \sigma\{\xi(s), s \geq t+\tau\}$ .  $\mathfrak{E}_{-\infty}^t$  se interpreta como el pasado del proceso  $\xi(t)$  y  $\mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}$  como el futuro del mismo proceso. La posibilidad de aplicar el teorema del límite central a los procesos estacionarios está relacionada considerablemente con el cumplimiento de las condiciones que aseguran la disminución de la dependencia del pasado  $\mathfrak{E}^t$  del futuro  $\mathfrak{E}^{\infty}$  a medida que crece  $\tau$ . He aquí una de estas condiciones.

**Definición.** La condición

$$\alpha(\tau) = \sup_{\substack{A \in \mathfrak{E}_{-\infty}^t \\ B \in \mathfrak{E}_{t+\tau}^{\infty}}} |P(AB) - P(A)P(B)| \rightarrow 0$$

para  $\tau \rightarrow \infty$  se llama condición de mezclado fuerte.

La función  $\alpha(\tau)$  se denomina coeficiente de mezclado (fuerte). Los procesos que satisfacen la condición de mezclado fuerte son ergódicos, puesto que la condición de ergodicidad puede escribirse en forma de los límites de Cesaro:

$$\frac{1}{s} \sum_{\tau=1}^s \alpha(\tau, A, B) \rightarrow 0 \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ (tiempo discreto);}$$

$$\frac{1}{s} \int_0^s \alpha(\tau, A, B) d\tau \rightarrow 0 \text{ cuando } s \rightarrow \infty \text{ (tiempo continuo)}$$



para cualesquiera  $A \in \mathfrak{B}_{-\infty}^t$ ,  $B \in \mathfrak{B}_{t+\tau}^{\infty}$ , donde  $\alpha(\tau, A, B) = P(AB) - P(A)P(B)$ .

Unos criterios efectivos para comprobar la condición de mezclado fuerte existen para los procesos gaussianos.

Sean  $\xi(t)$  un proceso gaussiano estacionario y  $H_{-\infty}^t$  y  $H_{t+\tau}^{\infty}$ , los espacios de Hilbert generados por las magnitudes aleatorias  $\xi(s)$  para  $s < t$  y  $s \geq t + \tau$ , respectivamente.

Hagamos

$$\rho(\tau) = \sup_{\substack{\xi \in H_{-\infty}^t \\ \eta \in H_{t+\tau}^{\infty}}} M \xi \eta.$$

**Teorema de Kolmogórov—Rozánov.** Para los procesos gaussianos estacionarios se verifican las desigualdades

$$\alpha(\tau) \leq \rho(\tau) \leq 2\pi\alpha(\tau).$$

En el caso de sucesiones gaussianas estacionarias, para que se cumpla la condición de mezclado fuerte es suficiente que la densidad espectral  $f(\lambda)$  sea continua y positiva, es decir, que sea  $f(\lambda) > C > 0$ .

**11.11.7. Teorema del límite central.** Sea  $\xi(t)$  un proceso aleatorio (multidimensional) estacionario en estrecho sentido y supongamos que  $\xi_s$  son las medias de tiempo de dicho proceso.

**Teorema 3.** Si el proceso  $\xi(t)$  satisface la condición de mezclado fuerte y tiene densidad espectral continua acotada  $f(\lambda)$ , verificándose (en el caso de un proceso multidimensional)  $\det f(0) \neq 0$ , entonces para que el teorema del límite central pueda ser aplicado al proceso  $\xi(t)$ , es necesario y suficiente la siguiente condición: para todo  $\varepsilon > 0$  existen tales números  $N_\varepsilon$  y  $T_\varepsilon$  que

$$\int_{|x| > N_\varepsilon} \|x\|^2 dF_{\xi(s)}(x) < \varepsilon$$

para  $s > T_\varepsilon$ . Con ello la varianza (matriz de covarianza) de la distribución normal límite es  $C = 2\pi f(0)$ .

Las condiciones suficientes de aplicabilidad del teorema del límite central que se comprueban con mayor facilidad están relacionadas o bien con las suposiciones adicionales acerca de la manera de cómo el coeficiente  $\alpha(\tau)$  tiende a cero, o bien con las condiciones, aún más rígidas, que la condición de mezclado fuerte.

**Teorema 4.** Si: 1) el proceso  $\xi(t)$  satisface la condición de mezclado fuerte, con la particularidad de que

$$\alpha(\tau) = O(\tau^{-(1+\nu)})$$

y  $M \|\xi(t)\|^{2+\alpha} < \infty$  para ciertos  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha > \frac{4}{\nu}$ , y

2) la densidad espectral  $f(\lambda)$  del proceso es acotada, continua y (en el caso de un proceso multidimensional)  $\det f(0) \neq 0$ , entonces al proceso  $\xi(t)$  se le puede aplicar el teorema del límite central. Aquí, la varianza (matriz de covarianza) de la distribución normal límite es  $C = 2\pi f(0)$ .

## CAMPOS ALEATORIOS

## 12.1. Definiciones fundamentales

**12.1.1. Definición del campo aleatorio. Distribuciones de dimensiones finitas.** Se llama campo aleatorio una función aleatoria de varias variables reales. Demos a conocer una definición más precisa. Supongamos que  $(\Omega, \mathcal{E}, P)$  es un espacio probabilístico,  $D$  es cierto conjunto en  $R^m$ . Una función  $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m) = \xi(\omega, \vec{x})$ , definida para  $\omega \in \Omega$ ,  $(x_1, \dots, x_m) = \vec{x} \in D$ , se denomina campo aleatorio definido en el conjunto  $D$ , siempre que con  $x_1, \dots, x_m$  fijados, ella es  $\mathcal{E}$ -medible según  $\omega$ . Si el dominio de valores de la función aleatoria  $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m)$  es  $R^1$ , se habla de un campo escalar, si dicho dominio es  $R^n$  se habla de un campo vectorial. El caso más natural de un campo aleatorio es un campo definido en  $D \times [0, T]$ , donde  $D$  es cierto dominio en el espacio tridimensional y el segmento  $[0, T]$  se interpreta como un segmento de tiempo. Con la ayuda de tales campos se puede describir la evolución aleatoria de los medios continuos (por ejemplo, la distribución del calor en las condiciones de conductibilidad térmica aleatoria, siendo aleatorias las fuentes de calor, la filtración en un medio aleatorio, etc.). Las funciones  $\xi(\omega, x_1, \dots, x_m)$  para toda clase de  $\omega$  fijados, son funciones muestrales del campo aleatorio.

Las distribuciones de dimensiones finitas de un campo aleatorio  $\xi(\omega, \vec{x})$  ( $\vec{x} \in D \subset R^m$ ) se representan por el juego de distribuciones

$$F_{x^1, \dots, x^k}^{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k}(A_1, \dots, A_k) = P\left\{\bigcap_{j=1}^k \{\xi(\omega, \vec{x}^j) \in A_j\}\right\},$$

$$\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k \in D, \quad k=1, 2, \dots$$

( $A_1, \dots, A_k$  son los conjuntos borelianos del dominio de valores  $\xi(\cdot)$ ).

Con  $k$  fijado éstas son distribuciones  $k$ -dimensionales de un campo aleatorio.

Las distribuciones de dimensiones finitas de un campo aleatorio satisfacen las condiciones de concordancia:

I Para toda permutación  $i_1, \dots, i_k$  de los números  $1, \dots, k$

$$F_{x^{i_1}, \dots, x^{i_k}}^{\vec{x}^{i_1}, \dots, \vec{x}^{i_k}}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = F_{x^1, \dots, x^k}^{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k}(A_1, \dots, A_k).$$

11. Para todo  $k$

$$F_{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k} (A_1, \dots, A_{k-1}, R^n) = F_{\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^{k-1}} (A_1, \dots, A_{k-1})$$

( $R^n$  es el dominio de los valores de la función  $\xi(\cdot)$ )

El teorema de Kolmogórov (véase el p. 94) afirma que para toda familia concordada de las distribuciones de dimensiones finitas existe un campo aleatorio  $\xi(\omega, \vec{x})$  con las distribuciones dadas de dimensiones finitas

**12.1.2. Funciones de momento.** Examinemos un campo aleatorio con los valores numéricos  $\xi(\omega, \vec{x})$ . La función

$$m_k(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k) = M \xi(\omega, \vec{x}^1) \dots (\xi, \vec{x}^k)$$

(si está definida para  $\vec{x}_i \in D$ ,  $i = 1, \dots, k$ ) se llama función de momento de  $k$ -ésimo orden del campo aleatorio  $\xi(\omega, \vec{x})$ .

Una función de momento de primer orden

$$m_1(\vec{x}) = M \xi(\omega, \vec{x}) = a(\vec{x})$$

se llama valor medio del campo aleatorio. Una función

$$\tilde{m}_k(\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^k) = M \xi(\omega, \vec{x}^1) - a(\vec{x}^1) \dots (\xi(\omega, \vec{x}^k) - a(\vec{x}^k))$$

se llama función de momento central de  $k$ -ésimo orden del campo aleatorio  $\xi(\omega, \vec{x})$ . Una función de momento central de segundo orden lleva el nombre de función de correlación del campo aleatorio:

$$B(\vec{x}, \vec{y}) = M \xi(\omega, \vec{x}) \xi(\omega, \vec{y}) - M \xi(\omega, \vec{x}) M \xi(\omega, \vec{y}).$$

Sea  $\vec{\xi}(\omega, \vec{x})$  un campo aleatorio con valores en  $R^n$ ,  $\vec{\xi}(\omega, \vec{x}) = (\xi_1(\omega, \vec{x}), \dots, \xi_n(\omega, \vec{x}))$ . Una función vectorial

$$\vec{a}(\vec{x}) = (a_1(\vec{x}), \dots, a_n(\vec{x})) = (M \xi_{11}(\omega, \vec{x}), \dots, M \xi_{nn}(\omega, \vec{x}))$$

se llama valor medio del campo aleatorio vectorial. La función  $B(\vec{x}, \vec{y})$ , que está definida en  $D \times D$  y toma valores matriciales, para la cual los elementos de la matriz  $B(\vec{x}, \vec{y})$  se determinan por las igualdades

$$b_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) = M \xi_i(\vec{x}) \xi_j(\vec{y}) - a_i(\vec{x}) a_j(\vec{y}),$$

se denomina función matricial de correlación del campo aleatorio vectorial. Las funciones de momento de órdenes superiores de un campo vectorial se dan mediante las igualdades

$$m_{\vec{m}_1, \dots, \vec{m}_k}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k) = M \xi^{\vec{m}_1}(\vec{x}_1) \dots \xi^{\vec{m}_k}(\vec{x}_k),$$

donde  $\vec{m}_j = (m_j^{(1)}, \dots, m_j^{(n)})$ ,  $\xi^{\vec{m}} = \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_n^{m_n}$ . Sin embargo, estas funciones ya son de poco uso.

12.1.3. Representación de los campos vectoriales mediante las series ortogonales. Sea  $D$  un conjunto acotado y sea  $\vec{\xi}(\vec{x})$  un campo aleatorio numérico cuya función de correlación  $B(\vec{x}, \vec{y})$  existe y

$$\int_D B(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} < \infty$$

(integral según la medida de Lebesgue). En este caso existe una sucesión ortogonal completa de funciones  $\varphi_h(\vec{x})$  en  $D$  que son funciones propias del operador integral con núcleo  $B(\vec{x}, \vec{y})$

$$\lambda_h \varphi_h(\vec{x}) = \int B(\vec{x}, \vec{y}) \varphi_h(\vec{y}) d\vec{y},$$

siendo  $\lambda_h$ , en este caso, no negativos y  $\sum \lambda_h < \infty$ .

El campo aleatorio  $\vec{\xi}(\vec{x})$  puede ser representado en forma de la serie

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = a(\vec{x}) + \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h \varphi_h(\vec{x}), \quad (1.4)$$

donde  $\eta_h$  es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas,  $D\eta_h = 0$ ,  $D\eta_h = \lambda_h$ . La serie (1.4) converge en el siguiente sentido:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_D M \left| \vec{\xi}(\vec{x}) - a(\vec{x}) - \sum_{h=1}^N \eta_h \varphi_h(\vec{x}) \right|^2 d\vec{x} = 0.$$

Las magnitudes aleatorias  $\eta_h$  se determinan de las correlaciones

$$\eta_h = \int \vec{\xi}(\vec{x}) \varphi_h(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Un resultado análogo es también válido para los campos aleatorios vectoriales. Supongamos que el campo  $\vec{\xi}(\vec{x})$  tiene la función matricial de correlación  $B(\vec{x}, \vec{y}) = \|b_{ij}(\vec{x}, \vec{y})\|$ , para la cual

$$\int_D \sum b_{ij}^2(\vec{x}, \vec{x}) d\vec{x} < \infty.$$

En este caso existe tal sucesión  $\lambda_h \downarrow 0$ , para la cual el sistema de ecuaciones integrales

$$\lambda \varphi^i(\vec{x}) = \sum_j \int b_{ij}(\vec{x}, \vec{y}) \varphi^j(\vec{y}) d\vec{y}, \quad i=1, \dots, n, \quad (1.2)$$

tiene solución cuando  $\lambda = \lambda_h$ . Si

$$\vec{\varphi}_h(\vec{x}) = (\varphi_h^1(\vec{x}), \dots, \varphi_h^n(\vec{x}))$$

es la solución del sistema (1.2) cuando  $\lambda = \lambda_h$ , para la cual

$$\int \sum_{h=1}^n |\varphi_h^1(x)|^2 d\vec{x} = 1,$$

entonces

$$\xi(x) = a(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \eta_h \vec{\varphi}_h(x). \quad (1.3)$$

donde  $\eta_h$  es una sucesión de magnitudes aleatorias incorrelacionadas, para las cuales  $M\eta_h = 0$ ,  $D\eta_h = \lambda_h$ . La convergencia en (1.3) por coordenadas es la misma que en (1.1).

**EJEMPLO 1 Campos aleatorios gaussianos.** Un campo  $\xi(\vec{x})$  se denomina gaussiano, si para cualesquiera  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in D$  la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi(\vec{x}_1), \dots, \xi(\vec{x}_k)$  es gaussiana. Por analogía, un campo vectorial  $\vec{\xi}(\vec{x})$  se llama gaussiano, si la distribución conjunta de las magnitudes  $\xi_1(\vec{x}_1), \dots, \xi_n(\vec{x}_1), \dots, \xi_1(\vec{x}_k), \dots, \xi_n(\vec{x}_k)$  es gaussiana. Las distribuciones de dimensiones finitas para los campos gaussianos  $\vec{\xi}(\vec{x})$  se determinan completamente por las funciones  $a(x)$  y  $B(\vec{x}, \vec{y})$ . La función  $a(x)$  puede ser arbitraria, mientras que la función matricial de correlación debe ser positivamente definida: cualesquiera que sean  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in D$  y los números  $\alpha_1, \dots, \alpha_1^n, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_k^n$ , debe cumplirse la desigualdad

$$\sum_{i, j, h, l} b_{ij}(\vec{x}_h, \vec{x}_l) \alpha_i \bar{\alpha}'_j \geq 0$$

( $\bar{\alpha}$  es un número complejo conjugado de  $\alpha$ ).

**EJEMPLO 2 Campos con incrementos independientes.** Sea  $\xi(\vec{x})$  un campo aleatorio dado en  $R_+^n = \{\vec{x}; x_i \geq 0, i=1, \dots, n\}$ . Designemos para un rectángulo  $\Pi = \{\vec{x}; a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, m\}$

$$\Delta_{\Pi} F(\vec{x}) = \Delta_{[a_1, b_1]}^{(1)} \Delta_{[a_2, b_2]}^{(2)} \dots \Delta_{[a_m, b_m]}^{(m)} F(\vec{x}),$$

donde  $\Delta_{[a, b]}^{(h)} = F(x_1, \dots, x_{h-1}, b, x_{h+1}, \dots, x_m) - F(x_1, \dots, x_{h-1}, a, x_{h+1}, \dots, x_m)$ .

Si para los rectángulos disjuntos  $\Pi_1, \dots, \Pi_N$ , cualquiera que sea  $N$ , las magnitudes  $\Delta_{\Pi_1} \xi(\vec{x}), \dots, \Delta_{\Pi_N} \xi(\vec{x})$  son independientes entre sí, entonces  $\xi(\vec{x})$  se llama campo con incrementos independientes. Cuando  $\xi(\vec{x}) = 0$  en la frontera de  $R_+^n$ ,  $\xi(\vec{x})$  tiene una distribución determinada por la función característica

$$M e^{i\lambda \xi(\vec{x})} = \exp \left\{ i\lambda a(r) + \int \left( e^{i\lambda z} - 1 - \frac{i\lambda z}{1+z^2} \right) \frac{1+z^2}{z^2} G(\Pi_{\vec{x}}, dz) \right\}, \quad (1.4)$$

donde  $G(\cdot, dx)$  es una medida en  $R_+^m \times (-\infty, \infty)$ ,  $\prod_a^{\rightarrow} = \{\vec{x}; 0 \leq x_i \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$  para  $\vec{a} \in R_+^m$  (cuando  $x = 0$ , el integrando en (1.4) se considera igual a  $-\frac{\lambda^2}{2}$ ). En particular, el campo gaussiano con incrementos independientes tiene en estas suposiciones la función característica

$$\text{Me}^{i\lambda \xi(\vec{x})} = \exp \left\{ i\lambda a(\vec{x}) - \frac{\lambda^2}{2} \mu_2(\Pi_{\vec{x}}) \right\}, \quad (1.5)$$

donde  $a(\vec{x})$  es una función y  $\mu_2$  es la medida en  $R_+^m$ .

## 12.2. Propiedades de las funciones muestrales

**12.2.1. Campos aleatorios medibles. Integración.** El campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  con distribuciones de dimensiones finitas dadas, construido en el teorema de Kolmogórov (véase el resultado análogo para los procesos aleatorios en el p. 9.1) contiene en calidad de funciones muestrales todas las funciones en  $D$ . Es de interés la cuestión, bajo qué condiciones existe un campo aleatorio con distribuciones de dimensiones finitas dadas, cuyas funciones muestrales pertenecen a la clase dada (son medibles, continuas, derivables, etc.).

Diremos que dos campos aleatorios  $\xi(\vec{x})$  y  $\eta(\vec{x})$ , definidos en un mismo conjunto  $D \subset R^m$ , se llaman **equivalentes estocásticos**, si

$$\forall \vec{x} \in D \mathbf{P} \{ \xi(\vec{x}) = \eta(\vec{x}) \} = 1.$$

Sea  $D$  un conjunto (boreliano) medible. Un campo aleatorio  $\xi(\omega, \vec{x})$  se denomina **medible**, si la función  $\xi(\omega, \vec{x})$  es medible respecto de  $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}^m$ , donde  $\mathfrak{S}$  es una  $\sigma$ -álgebra en el espacio probabilístico,  $\mathfrak{S}^m$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos en  $R^m$ .

El campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  es **continuo estocástico** en el punto  $\vec{x}_0 \in D$ , si  $\forall \varepsilon$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \mathbf{P} \{ |\xi(\vec{x}) - \xi(\vec{x}_0)| > \varepsilon \} = 0.$$

**Teorema 1.** Supongamos que  $D$  es un conjunto medible y el campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  es continuo estocástico en  $D$ . En este caso existe un campo aleatorio medible  $\xi'(\vec{x})$  que es estocásticamente equivalente a  $\xi(\vec{x})$ .

Sea  $\mu(dx)$  una medida definida en los subconjuntos borelianos  $D$ . Para el campo medible  $\xi'(\vec{x})$  se puede examinar la cuestión acerca de la existencia de la integral

$$\int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}).$$

El conjunto de aquellos  $\omega$ , para los cuales esta integral está definida (es decir, el conjunto de aquellos  $\omega$ , para los cuales  $\int_D |\xi' \times \bar{x}(\vec{x})| \mu(d\vec{x}) < \infty$ ), es  $\mathcal{E}$ -medible y el propio valor de la integral es también  $\mathcal{E}$ -medible. El campo es integrable según la medida  $\mu$ , si

$$P \left\{ \int_D |\xi'(\vec{x})| \mu(d\vec{x}) < \infty \right\} = 1.$$

De condición suficiente de la integrabilidad del campo según la medida  $\mu$  sirve la expresión

$$\int_D M|\xi'(\vec{x})| \mu(d\vec{x}) < \infty. \quad (2.1)$$

Si (2.1) está cumplida, entonces (en virtud del teorema de Fubini),

$$M \int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}) = \int_D M\xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}). \quad (2.2)$$

Si  $\xi'(\vec{x})$  es un campo aleatorio gaussiano y  $\int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x})$  está definida, esta integral será también una magnitud aleatoria de Gauss. Además,

$$M \int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}) = \int_D a(\vec{x}) \mu(d\vec{x}),$$

$$D \left[ \int_D \xi'(\vec{x}) \mu(d\vec{x}) \right] = \int_D \int_D B(\vec{x}, \vec{y}) \mu(d\vec{x}) \mu(d\vec{y}), \quad (2.3)$$

donde  $a(\vec{x})$  y  $B(\vec{x}, \vec{y})$  son, respectivamente, el valor medio y la función de correlación del campo  $\xi'(\vec{x})$ . Ha de ser notado que la fórmula (2.3) es válida para cualesquiera campos, para los cuales queda cumplida (2.1) y la integral en el segundo miembro converge (absolutamente).

**12.2.2. Campo aleatorio separable.** Un campo  $\xi(\vec{x})$  se llama separable respecto del conjunto  $\Lambda \subset D$ , si  $\Lambda$  es numerable y denso en  $D$  y existe tal conjunto  $\Gamma \in \mathcal{E}$  que  $P(\Gamma) = 1$ , en tanto que para toda esfera  $S \in R^m$

$$\{\omega : \sup_{\vec{x} \in \Lambda \cap S} \xi(\vec{x}) = \sup_{\vec{x} \in D \cap S} \xi(\vec{x})\} \subset \Omega \setminus \Gamma;$$

$$\{\omega : \inf_{\vec{x} \in \Lambda \cap S} \xi(\vec{x}) = \inf_{\vec{x} \in D \cap S} \xi(\vec{x})\} \subset \Omega \setminus \Gamma.$$

**Teorema 2.** Para todo campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  existe el campo separable  $\xi'(\vec{x})$  estocásticamente equivalente a  $\xi(\vec{x})$ .

Igual que para los procesos aleatorios es cómodo utilizar el concepto de separabilidad en la investigación de las propiedades de las funciones muestrales del campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$ . Sea  $D$  compacto. Para que el campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  sea continuo con la probabilidad 1 (es decir, para que casi todas sus funciones muestrales sean continuas), es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

1)  $\xi(\vec{x})$  es separable respecto de cierto conjunto  $\Lambda \subset D$ ;

2)  $\xi(\vec{x})$  es uniformemente continuo en  $\Lambda$  con la probabilidad 1.

**Teorema de Chentsov.** Este teorema es una generalización del teorema de Kolmogórov de la continuidad de un proceso aleatorio en los campos aleatorios. Supongamos que un campo aleatorio separable está definido en el rectángulo  $\Pi_{\alpha}^{\vec{x}} = \{\vec{x}: 0 \leq x_i \leq a_i, i = 1, \dots, m\}$ . Si es continuo en los lados  $\Gamma_i = \Pi_{\alpha}^{\vec{x}} \cap \{\vec{x}: x_i = a_i\}$  y existen tales  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $\gamma > 0$  que para todo rectángulo  $\Pi \subset \Pi_{\alpha}^{\vec{x}}$

$$M|\Delta_{\Pi}\xi(\vec{x})|^{\alpha} \leq \gamma[\mu_{\Pi}(\Pi)]^{1+\beta}$$

( $\Delta_{\Pi}$  se determina en 12.1,  $\mu_{\Pi}$  es la medida de Lebesgue en  $R^m$ ), entonces el campo  $\xi(\vec{x})$  es continuo con la probabilidad 1.

**12.2.3. Continuidad de los campos gaussianos.** Para los campos aleatorios gaussianos se pueden obtener las condiciones de continuidad del campo aleatorio en términos de su función de correlación.

Supongamos que  $\xi(\vec{x})$  es un campo aleatorio de Gauss en el conjunto compacto  $D$ ,  $a(\vec{x})$  es el valor medio del campo,  $B(\vec{x}, \vec{y})$  es la función de correlación. Sean cumplidas las condiciones: a)  $\xi(\vec{x})$  es separable, b)  $a(\vec{x})$  es una función continua, c) existen  $\gamma$  y  $\delta > 0$  tales que para  $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \frac{1}{2}$  ( $\rho$  es una distancia en  $R^m$ )

$$B(\vec{x}_0, \vec{x}_0) - B(\vec{x}, \vec{x}) - 2B(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq \gamma \left[ \ln \frac{1}{\rho(\vec{x}, \vec{x}_0)} \right]^{-(1+\delta)}$$

En este caso el campo gaussiano  $\xi(\vec{x})$  es continuo con la probabilidad 1.

**12.2.4. Diferenciabilidad de los campos aleatorios.** El campo  $\xi(\vec{x})$  es diferenciable en el punto  $\vec{x}_0$  (en media cuadrática), si existen las magnitudes aleatorias

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \xi(\vec{x}_0), \quad k=1, 2, \dots, m$$

tales que

$$\lim_{\Delta \vec{x} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\rho(\vec{x}_0, \vec{x}_0 + \Delta \vec{x})} \right)^2 M \left[ \xi(\vec{x}_0 + \Delta \vec{x}) - \xi(\vec{x}_0) - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \xi(\vec{x}_0) \Delta x_k \right]^2 = 0.$$



Las magnitudes  $\frac{\partial}{\partial x_j} \xi(\vec{x}_0)$  se determinan, en este caso, como límites medios cuadráticos

$$\lim \frac{\Delta_h \xi(\vec{x}_0)}{\Delta x_h},$$

donde  $\Delta_h \xi(\vec{x}) = \xi(x_1, \dots, x_h + \Delta x_h, \dots, x_m) - \xi(x_1, \dots, x_h, \dots, x_m)$ . Para que  $\xi(\vec{x})$  sea diferenciable, es suficiente que sean diferenciables las funciones  $a(\vec{x})$  y  $B(\vec{x}, \vec{y})$  (respecto de cada variable). Si resulta que las derivadas parciales  $\frac{\partial}{\partial x_h} \xi(\vec{x})$  (que también son campos aleatorios) son continuas con la probabilidad 1, entonces las funciones muestrales del campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  serán funciones derivables  $\vec{x}$  para casi todos los  $\omega$ . Análogamente se determina la diferenciability múltiple del campo aleatorio. La condición suficiente de la diferenciability  $k$ -múltiple de un campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  se reduce a que las funciones  $a(\vec{x})$  y  $B(\vec{x}, \vec{y})$  tengan  $k$ -ésima diferencial respecto de cada variable.

### 12.3. Campos aleatorios homogéneos

**12.3.1. Definición del campo homogéneo.** Un campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$ , definido en  $D \subset R^m$ , se denomina homogéneo, si 1)  $D$  es un semigrupo por adición: si  $\vec{x} \in D$ ,  $\vec{y} \in D$ , entonces  $\vec{x} + \vec{y} \in D$ ; 2)  $M\xi(\vec{x})$  es constante,  $M\xi(\vec{x})\xi(\vec{y})$  sólo depende de  $\vec{x} - \vec{y}$ . Son de mayor uso los campos aleatorios para los cuales  $D$  es un grupo de todos los puntos de números enteros  $R^m$  y  $D = R^m$ . Llamaremos los primeros campos de argumento discreto. Análogamente se definen los campos aleatorios vectoriales.

**12.3.2. Campos numéricos de argumento discreto.** Sea  $\xi(\vec{x})$  un campo de esta índole. Como que  $M\xi(\vec{x}) = a$ , donde  $a$  es constante, podemos examinar un campo nuevo  $\xi'(\vec{x}) = \xi(\vec{x}) - a$ . Este último también será homogéneo. Por esta razón, sin limitar la generalidad de razonamientos, podemos considerar que el valor medio del campo es 0. La función de correlación del campo  $\vec{B}(\vec{x}, \vec{y})$  tiene la forma  $B(\vec{x} - \vec{y})$ , donde  $B(\vec{z})$  es una función definida en  $D$  y que satisface la condición de definición positiva

$$\sum_{h, j=1}^n B(\vec{z}_h - \vec{z}_j) \alpha_h \bar{\alpha}_j \geq 0, \quad (3.4)$$

cualesquiera que sean  $n$ ,  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in D$  y los números complejos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ( $\bar{\alpha}_j$  es un número complejo conjugado de  $\alpha_j$ ). De la con.

dicción (3.1) se deduce la siguiente representación espectral para  $B(\vec{z})$ :

$$B(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} F(d\vec{\lambda}), \quad (3.2)$$

donde  $F(d\vec{\lambda})$  es cierta medida finita en el rectángulo

$$[-\pi, \pi]^m = \{\vec{\lambda} : -\pi \leq \lambda_j \leq \pi, \quad j = 1, \dots, m\}.$$

$F(d\vec{\lambda})$  se denomina la **medida espectral** del campo aleatorio. Si esta medida es absolutamente continua respecto de la medida lebesguiana en  $[-\pi, \pi]^m$  y

$$F(C) = \int_C f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}$$

( $f$  es la densidad de  $F(d\vec{\lambda})$  respecto de la medida de Lebesgue), entonces  $f(\vec{\lambda})$  se denominará **densidad espectral** del campo aleatorio. En este caso (3.2) toma la forma

$$B(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} \quad (3.3)$$

Bajo ciertas condiciones la densidad espectral puede expresarse en términos de la función de correlación

$$f(\vec{\lambda}) = (2\pi)^{-m} \sum_{\vec{z} \in D} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} B_{(\vec{z})} \quad (3.4)$$

(la serie en el segundo miembro converge en media cuadrática y

la igualdad (3.4) se verifica, si  $\int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda} < \infty$ , o bien,

lo que es lo mismo,  $\sum_{\vec{z} \in D} B^2(\vec{z}) < \infty$ ).

Existe una medida aleatoria de valores complejos con valores ortogonales de  $\psi(d\vec{\lambda})$  en  $[-\pi, \pi]^m$ , para la cual

$$M\psi(A)\overline{\psi(B)} = F(A \cap B),$$

tal que para el campo aleatorio  $\xi(\vec{x})$  resulta válida la representación

$$\xi(\vec{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.5)$$

**Ley de los grandes números para un campo aleatorio.** Sea  $\xi(\vec{x})$  un campo homogéneo en  $R^m$ , para el cual  $M\xi(\vec{x}) = 0$ . Entonces existe un límite en media cuadrática:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2N+1} \right)^m \sum_{|x_i| \leq N, i=1, \dots, m} \xi(\vec{x}), \quad (3.6)$$

igual a  $\psi(\{0\})$ , donde  $\{0\}$  es un conjunto en  $R^m$  compuesto por un punto  $0 \in R^m$ . Para que el límite (3.6) sea igual, con la probabilidad 1, a  $0 = M\xi(\vec{x})$ , es necesario y suficiente que  $M|\psi(\{0\})|^2 = F(\{0\}) = 0$ , lo que quedará cumplido, si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{|x_i| \leq N, i=1, \dots, m} \left( \prod_{k=1}^m \frac{\sin z_k \delta}{z_k} \right) B(\vec{z}) = 0. \quad (3.7)$$

**12.3.3. Campos vectoriales de argumento discreto.** Supongamos que  $\xi(\vec{x})$  es un campo homogéneo en un retículo de números enteros  $R^m$  que toma los valores de  $R^l$  y  $\xi^i(\vec{x}), \dots, \xi^l(\vec{x})$  son los componentes del campo. Supondremos también que  $M\xi^i(\vec{x}) = 0$ . Hagamos

$$M\xi^i(\vec{x}) \xi^j(\vec{y}) = b_{ij}(\vec{x} - \vec{y}),$$

y designemos la matriz  $\|b_{ij}(\vec{x})\| = B(\vec{x})$ . Para que la matriz  $l \times l B(\vec{x})$  sea función matricial de correlación de un campo vectorial homogéneo de argumento discreto, es necesario y suficiente que para cualesquiera  $n$  y números complejos  $\alpha_1^i, \dots, \alpha_l^i, \alpha_1^j, \dots, \alpha_l^j$  y los puntos  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_n \in D$  se cumpla la desigualdad

$$\sum_{k, j=1}^n \sum_{p, q=1}^l b_{pq}(\vec{z}_k - \vec{z}_j) \alpha_k^p \alpha_j^{-q} \geq 0 \quad (3.8)$$

(ésta es la condición de definición positiva de la función matricial). La función matricial de correlación tiene la siguiente **representación espectral**: existen tales medidas de signo variable  $F_{pq}(d\vec{\lambda})$ ,  $p, q = 1, \dots, l$  en  $[-\pi, \pi]^m$  que

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m z_k \lambda_k \right\} F_{pq}(d\vec{\lambda}), \quad (3.9)$$

y en este caso la matriz

$$\|F_{pq}(A)\|_{p, q=1, \dots, l} \quad (3.10)$$

está definida de una manera no negativa para todo conjunto boreliano  $A$  de  $[-\pi, \pi]^m$ . La matriz (3.10) se llama **medida espectral matricial** del campo vectorial. Si las funciones  $F_{pq}(A)$  son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue en  $[-\pi, \pi]^m$ , es decir, si

$$F_{pq}(A) = \int_A f_{pq}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.11)$$

entonces la matriz  $\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, \dots, q=1, \dots, l}$  recibe el nombre de **densidad matricial espectral** del campo vectorial. Su definición es también no negativa.

En caso de que exista la densidad matricial espectral, la fórmula (3.9) adquiere la forma

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h \right\} f_{pq}(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}. \quad (3.12)$$

Si la densidad matricial espectral existe, puede ser definida con la ayuda de la siguiente fórmula

$$\|f_{pq}(\vec{\lambda})\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-m} \sum_{z \in D} e^{-i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h} B(\vec{z}) (1 - \varepsilon)^{|z_1| + \dots + |z_m|}. \quad (3.13)$$

El propio campo vectorial aleatorio admite también una **representación espectral**. Existe un juego de medidas estocásticas de valores complejos  $\Psi_p(d\vec{\lambda})$  en  $[-\pi, \pi]^m$ , que satisfacen las condiciones:

$$M\Psi_p(A) = 0; \quad M\Psi_p(A) \overline{\Psi_q(B)} = F_{pq}(A \cap B)$$

para cualesquiera conjuntos borelianos  $A$  y  $B$  de  $[-\pi, \pi]^m$ , siendo en este caso

$$\xi_p(\vec{z}) = \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m z_h \lambda_h \right\} \Psi_p(d\vec{\lambda}). \quad (3.14)$$

**12.3.4. Campos numéricos de argumento continuo.** Utilizaremos las mismas designaciones que se empleaban para los campos numéricos de argumento discreto. La condición de definición positiva será también del tipo (3.1), mas  $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_m$  son aquí unos puntos arbitrarios de  $R^m$ . La función de correlación admite una representación espectral

$$B(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h z_h \right\} F(d\vec{\lambda}), \quad (3.15)$$

donde  $F(A)$  es una medida finita en  $R^m$ . Esta medida se denomina **espectral**. Si es absolutamente continua y su densidad respecto de la medida lebesguiana es  $f(\vec{\lambda})$ , entonces  $f(\vec{\lambda})$  se llamará **densidad espectral**. En calidad de densidad espectral puedo intervenir cualquier

función no negativa que sea integrable en  $R^m$ . Una función de correlación que le corresponde se expresa mediante la fórmula

$$B(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k \right\} f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.16)$$

Si la densidad espectral existe, se expresará en términos de la función de correlación mediante la fórmula

$$f(\vec{\lambda}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots \int \exp \left\{ -i \sum_{k=1}^m \lambda_k z_k - \varepsilon \sum_{k=1}^m z_k^2 \right\} B(\vec{z}) d\vec{z}. \quad (3.17)$$

El campo aleatorio también tiene representación espectral

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k \right\} \psi(d\vec{\lambda}), \quad (3.18)$$

donde  $\psi(d\vec{\lambda})$  es una medida estocástica de valor complejo en  $R^m$ , para la cual  $M\psi(A) = 0$ ,  $M\psi(A)\psi(B) = F(A \cap B)$  para todos los conjuntos borelianos  $A$  y  $B \subset R^m$ .

**Ley de los grandes números.** Existe un límite en media cuadrática

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2T} \right)^m \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \vec{\xi}(\vec{x}) d\vec{x} = \psi(\{0\}). \quad (3.19)$$

Para que dicho límite sea nulo con la probabilidad 1, es necesario y suficiente que  $F(\{0\}) = 0$ . Lo último es equivalente a la condición

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \left( \prod_{k=1}^m \frac{\sin \delta z_k}{z_k} \right) B(\vec{z}) d\vec{z} = 0. \quad (3.20)$$

**12.3.5. Campos vectoriales de argumento continuo.** Supongamos que un campo homogéneo  $\vec{\xi}(\vec{x})$  está definido en  $R^m$  y toma valores de  $R^l$ ;  $\xi^1(\vec{x}), \dots, \xi^l(\vec{x})$  son sus componentes,  $M\xi^j(\vec{x}) = 0$ ,  $M\xi^p(\vec{x})\xi^q(\vec{y}) = b_{pq}(\vec{x} - \vec{y})$ .

Designemos mediante  $B(\vec{z}) = \| b_{pq}(\vec{z}) \|_{p, q=1, \dots, l}$  la función matricial de correlación del campo homogéneo. Al igual que en el caso de argumento discreto, la condición (3.8) es necesaria y suficiente para que la función continua  $B(\vec{z})$  de valores matriciales sea función matricial de correlación de un campo vectorial homogéneo. Existen unas medidas con signos variables de una variación acotada en  $R^m$  —  $F_{pq}(d\vec{\lambda})$  tales que resulta válida la representación espectral

$$b_{pq}(\vec{z}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{k=1}^m z_k \lambda_k \right\} F_{pq}(d\vec{\lambda}), \quad (3.21)$$

con lo cual para todo conjunto boreliano  $A \subset R^m$  la matriz  $\|F_{pq}(A)\|_{p, q=1, \dots, l}$  queda definida de modo no negativo. La medida matricial  $\|F_{pq}(\vec{d}\lambda)\|_{p, q=1, \dots, l}$  se llama medida espectral matricial del campo vectorial. Si esta medida es absolutamente continua respecto de la medida lebesguiana en  $R^m$ , la matriz

$$\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, q=1, \dots, l},$$

compuesta de las densidades  $f_{pq}(\vec{\lambda}) = \frac{F_{pq}(\vec{d}\lambda)}{d\vec{\lambda}}$ , lleva el nombre

de densidad espectral matricial (esta función para todo  $\vec{\lambda}$  es una matriz definida de modo no negativo). La función matricial  $\|f_{pq}(\vec{\lambda})\|_{p, q=1, \dots, l}$  puede intervenir en calidad de densidad espectral, si para todo  $\vec{\lambda}$  es simétrica según Hermite, no negativa y, además,

$$\int \dots \int |f_{pq}(\vec{\lambda})| d\vec{\lambda} < \infty \text{ para } p, q=1, \dots, l.$$

La representación espectral del campo vectorial tiene por expresión

$$\xi^p(\vec{x}) = \int \dots \int \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi_p(\vec{d}\lambda), \quad (3.22)$$

donde  $\psi_1(\vec{d}\lambda), \dots, \psi_l(\vec{d}\lambda)$  son las medidas estocásticas de valores complejos en  $R^m$ , para las cuales

$$M\psi_p(A)\overline{\psi_q(B)} = F_{pq}(A \cap B).$$

12.3.6. Derivación de los campos homogéneos. Puesto que las componentes aisladas de un campo vectorial son campos numéricos, será suficiente sólo considerar la diferenciabilidad del campo numérico. Sean  $\xi(\vec{x})$  un campo homogéneo numérico y  $F(\vec{d}\lambda)$ , su medida espectral. Para que exista la derivada parcial  $\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial x_h}$  en sentido de la convergencia en media cuadrática, es necesaria y suficiente la existencia de la derivada continua  $\frac{\partial^2 B(\vec{x})}{\partial x_h^2}$  o que sea

$$\int \dots \int |\lambda_h|^2 dF(\vec{d}\lambda) < \infty.$$

Si estas condiciones se cumplen,  $\frac{\partial \xi(\vec{x})}{\partial x_h}$  también será un campo homogéneo cuya función de correlación es  $-\frac{\partial^2 B(\vec{x})}{\partial x_h^2}$ , mientras

que la medida espectral tiene por expresión

$$F_1(A) = \int_A \dots \int |\lambda_h|^2 F(\vec{\lambda}).$$

Para hallar  $\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_h}$  se puede derivar la representación espectral (3.18):

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial x_h} = \int \dots \int (i\lambda_h) \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.23)$$

La condición de existencia de las derivadas parciales consiste en lo siguiente. Para que exista la derivada

$$\frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}} \quad (n = n_1 + \dots + n_m)$$

en sentido de la convergencia en media cuadrática y continua en el mismo sentido, es necesario y suficiente que se cumpla una de las condiciones a seguir:

a) existe  $\frac{\partial^{2n} B(x)}{(\partial x_1)^{2n_1} \dots (\partial x_m)^{2n_m}}$  y esta derivada es continua;

b)  $\int \dots \int |\lambda_1|^{2n_1} \dots |\lambda_m|^{2n_m} F(d\vec{\lambda}) < \infty$ .

Si estas condiciones quedan cumplidas, entonces

$$\frac{\partial^n \xi(x)}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}}$$

también será un campo homogéneo cuya función de correlación es

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} B(x)}{(\partial x_1)^{2n_1} \dots (\partial x_m)^{2n_m}},$$

mientras que la medida espectral de dicho campo tiene por expresión

$$F_{n_1, \dots, n_m}(A) = \int \dots \int (\lambda_1)^{2n_1} \dots (\lambda_m)^{2n_m} F(d\vec{\lambda}). \quad (3.24)$$

La representación espectral del campo  $\frac{\partial^n}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}} \xi(x)$  puede obtenerse por derivación de la fórmula (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{(\partial x_1)^{n_1} \dots (\partial x_m)^{n_m}} \xi(x) &= \\ &= \int \dots \int i^{n_1} \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_m^{n_m} \exp \left\{ i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h \right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.25) \end{aligned}$$

12.3.7. Operadores diferenciales de coeficientes constantes. Sea  $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$  un operador diferencial de coeficientes constantes, aquí  $L(t_1, \dots, t_m)$  es un polinomio de  $t_1, \dots, t_m$  de grado  $n$ .

Si el campo es tal que existen derivadas parciales hasta el orden  $n$  inclusivo y estas derivadas son continuas en media cuadrática, entonces se puede aplicar al campo  $\xi(\vec{x})$  el operador diferencial  $L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ . Designaremos

$$\eta(\vec{x}) = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \xi(\vec{x}). \quad (3.26)$$

Entonces  $\eta(\vec{x})$  es también un campo aleatorio homogéneo con la función de correlación

$$B_1(\vec{x}) = L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) L\left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_m}\right) B(\vec{x}) \quad (3.27)$$

y la medida espectral

$$F_1(A) = \int_A \dots \int |L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)|^2 F(d\vec{\lambda}). \quad (3.28)$$

Si  $\xi(\vec{x})$  posee la representación espectral (3.18),  $\eta(\vec{x})$  tiene por expresión

$$\eta(\vec{x}) = \int L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m) \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi(d\vec{\lambda}). \quad (3.29)$$

Consideraremos una ecuación diferencial

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) \xi(\vec{x}) = \eta(\vec{x}), \quad (3.30)$$

donde  $\eta(\vec{x})$  es cierto campo homogéneo. Supongamos que  $\eta(\vec{x})$  tiene medida espectral  $F_\eta(d\vec{\lambda})$  y la representación espectral del campo es

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi_\eta(d\vec{\lambda})$$

En este caso (3.30) tiene una sola solución que es un campo homogéneo, cuando, y sólo cuando,

$$\int \dots \int \frac{1}{|L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)|^2} F_\eta(d\vec{\lambda}) < \infty.$$

La solución de (3.30) tendrá la forma

$$\xi(\vec{x}) = \int \dots \int \frac{1}{L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_m)} \exp\left\{i \sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right\} \psi_\eta(d\vec{\lambda}), \quad (3.31)$$



y la medida espectral  $F_{\xi}^{\vec{x}}(\cdot)$  del campo  $\xi(\vec{x})$  será

$$F_{\xi}^{\vec{x}}(A) = \int_A \dots \int \frac{1}{|L(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n)|^2} F_{\eta}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda}). \quad (3.32)$$

12.3.8. Transformaciones integrales de los campos homogéneos numéricos. Sea  $\xi(\vec{x})$  un campo numérico con la función de correlación  $B(\vec{x})$  y la medida espectral  $F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda})$ . La transformación integral general tiene la forma

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x}, \vec{y}) \xi(\vec{y}) d\vec{y},$$

donde  $K(\vec{x}, \vec{y})$  es una función tal que para todos los  $\vec{x}$  existe

$$\int \dots \int K(\vec{x}, \vec{y}_1) K(\vec{x}, \vec{y}_2) B(\vec{y}_1 - \vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2 < \infty.$$

Si  $K(\vec{x}, \vec{y}) = K(\vec{x} - \vec{y})$  y  $K(\vec{z})$  es una función integrable, entonces la función

$$\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x} - \vec{y}) \xi(\vec{y}) d\vec{y} \quad (3.33)$$

también será un campo homogéneo. La función de correlación de este campo se da por la fórmula

$$B\eta(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{y}_1) K(\vec{y}_2) B(\vec{x} - \vec{y}_1 + \vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2, \quad (3.34)$$

y la medida espectral del campo  $\eta(\vec{x})$  tiene la forma

$$F_{\eta}^{\vec{x}}(A) = \int_A \dots \int |\hat{k}(\vec{\lambda})|^2 F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda}), \quad (3.35)$$

donde

$$\hat{k}(\vec{\lambda}) = \int \dots \int e^{-i \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k} K(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (3.36)$$

Si para el campo  $\xi(\vec{x})$  existe la densidad espectral  $f_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{\lambda})$ , el campo  $\eta(\vec{x})$  también tiene la densidad espectral

$$f_{\eta}^{\vec{x}}(\vec{\lambda}) = |\hat{k}(\vec{\lambda})|^2 f_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{\lambda}). \quad (3.37)$$

12.3.9. Transformación integral del campo homogéneo vectorial. Supongamos que  $\xi(\vec{x})$  es un campo homogéneo con valores en  $R^l$ .  $B_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{x})$  es la función matricial de correlación de  $\xi(\vec{x})$  y  $F_{\xi}^{\vec{x}}(d\vec{\lambda})$  la función espectral matricial del campo  $\xi(\vec{x})$ . Sea, ahora,  $K(\vec{x})$  una función matricial que aplica  $R^l$  en  $R^p$  (es decir, una matriz de

orden  $l \times p$ ). Si todos los elementos de esta matriz son absolutamente integrables en  $R^m$ , queda definida la integral

$$\vec{\eta}(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{x} - \vec{y}) \vec{\xi}(\vec{y}) d\vec{y} \quad (3.38)$$

(el resultado de la aplicación de  $K$  a  $\vec{\xi}$  es un vector de  $R^p$ ), con lo cual  $\vec{\eta}(\vec{x})$  es un campo vectorial homogéneo con sus valores en  $R^p$ . La función matricial de correlación  $B_{\eta}(\vec{x})$  es de la forma

$$B_p(\vec{x}) = \int \dots \int K(\vec{y}_1) B(\vec{x} - \vec{y}_1 + \vec{y}_2) K^*(\vec{y}_2) d\vec{y}_1 d\vec{y}_2, \quad (3.39)$$

y la medida espectral matricial es

$$F_{\eta}(A) = \int_A \dots \int \tilde{K}(\vec{\lambda}) dF_{\xi}(\vec{\lambda}) \tilde{K}^*(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad (3.40)$$

donde  $K^*$  es una matriz conjugada de  $K$ ;  $\tilde{K}$  es una matriz con los elementos

$$\tilde{k}_{ij}(\vec{\lambda}) = \int \dots \int \exp\left\{-i \sum_{h=1}^m \lambda_h x_h\right\} k_{ij}(\vec{x}) d\vec{x},$$

donde  $k_{ij}$  son los elementos de la matriz  $K$ ;  $\tilde{K}^*$  es una matriz conjugada de  $\tilde{K}$  según Hermite. Si existe la densidad matricial espectral del campo  $\vec{\xi}(\vec{x}) \parallel f_{\xi} \parallel(\vec{\lambda})$ , entonces existe también la densidad matricial espectral para  $\vec{\eta}(\vec{x})$ :

$$\parallel f_{\eta} \parallel(\vec{\lambda}) = \tilde{K}(\vec{\lambda}) \parallel f_{\xi} \parallel(\vec{\lambda}) \tilde{K}^*(\vec{\lambda}) \quad (3.41)$$

( $\parallel f_{\eta} \parallel(\vec{\lambda})$  es la matriz  $l \times l$ ).

## 12.4. Campos aleatorios isótopos

12.4.1. Campos isótopos homogéneos. Un campo aleatorio  $\vec{\xi}(\vec{x})$ , definido en  $R^m$  con los valores en  $R^l$ , se denomina homogéneo e isótopo, si es homogéneo y su función matricial de correlación  $B(\vec{x})$  depende sólo de  $|\vec{x}|$ , donde  $|\vec{x}|$  es la norma del vector en  $R^m$ . Sea  $B(|\vec{x}|)$  una función de correlación de un campo numérico homogéneo e isótopo. En este caso  $B(r)$  admite la siguiente representación:

$$B(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\infty} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi(\lambda), \quad (4.1)$$

donde  $J_k(\lambda)$  es una función de Bessel de la primera especie de orden  $k$ , y  $\Phi(\lambda)$  es una función de variación acotada no decreciente en  $[0, \infty)$ .

Se expresa en términos de la función espectral de un campo homogéneo según la fórmula

$$\Phi(\lambda) = \int_{|\vec{v}| < \lambda} F(\vec{dv}). \quad (4.2)$$

$\Phi(\lambda)$  es también una función espectral del campo homogéneo isótropo. Se expresa a través de  $B(r)$  del modo siguiente:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty J_{\frac{m}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{n}{2}} \frac{B(r)}{r} dr. \quad (4.3)$$

Ahora escribamos una representación espectral para el propio campo. Sean  $(r, \theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi)$  las coordenadas esféricas de un punto en  $R^m$  ( $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ ). Designaremos mediante

$$S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi), \quad k=1, 2, \dots, h(n, m) = \frac{(2n+m-2)(n+m-3)!}{(m-2)! n!}$$

la sucesión ortonormada de armónicas esféricas de grado  $n$ . En este caso, si  $M_{\xi}^{\vec{x}}(\vec{x}) = 0$ , entonces

$$\xi(\vec{x}) = c_n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{h(n, m)} S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi) \times \int_0^\infty J_{n+\frac{m-2}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{2-m}{2}} \psi_n^h(d\lambda), \quad (4.4)$$

donde  $c_n^2 = 2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \pi^{\frac{m}{2}}$ , y  $\psi_n^h(d\lambda)$ ,  $n=0, 1, \dots$ ;  $k=1, \dots, h(n, m)$ , son medidas aleatorias de valores complejos con valores ortogonales en  $[0, \infty)$ , con la particularidad de que para cualesquiera conjuntos de Borel  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  en  $[0, \infty)$

$$M\psi_n^h(\Lambda_1) \psi_p^j(\Lambda_2) = \delta_n^p \delta_h^j \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} d\Phi(\lambda),$$

$$M\psi_n^h(\Lambda_1) = 0.$$

12.4.2. Campos isótropos homogéneos con valores en  $R^l$ . Sean  $B(|z|)$  una función matricial de correlación de un campo isótropo homogéneo y  $b_{ij}(r)$ , los elementos de la matriz  $B(r)$ . En este caso

$$b_{ij}(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^\infty J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi_{ij}(\lambda), \quad (4.5)$$

donde las funciones  $\Phi_{lj}(\lambda)$  están definidas en  $[0, \infty)$ , siendo que para  $\lambda_1 < \lambda_2$  la matriz

$$\|(\Phi_{lj}(\lambda_2) - \Phi_{lj}(\lambda_1))\|$$

queda definida de modo no negativo. La matriz  $\|\Phi_{lj}(\lambda)\| = \Phi(\lambda)$  se denomina matriz espectral del campo isótropo homogéneo. En forma matricial la fórmula (4.5) puede escribirse así:

$$B(r) = 2 \frac{m-2}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^{\infty} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) d\Phi(\lambda). \quad (4.6)$$

La representación espectral de tal campo tiene la forma

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = c_n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=1}^{h(n,m)} S_n^h(\theta_1, \dots, \theta_{m-2}, \varphi) \times \\ \times \int_0^{\infty} J_{n+\frac{m-2}{2}}(\lambda r) (\lambda r)^{\frac{2-m}{2}} \vec{\psi}_n^h(d\lambda), \quad (4.7)$$

donde  $c_n$  y  $S_n^h$  son las mismas que en la fórmula (4.4), y  $\vec{\psi}_n^h(d\lambda)$  son medidas ortogonales a pares con los valores en  $R^1$ , para las cuales

$$\left. \begin{aligned} M_{ij} \vec{\psi}_n^h(\Lambda_1) \vec{\psi}_n^h(\Lambda_2) &= \int_{\Lambda_1 \cap \Lambda_2} d\Phi_{ij}(\lambda); \\ M \vec{\psi}_n^h(\Lambda_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

$(i_1 \vec{\psi}_n^h, \dots, i_k \vec{\psi}_n^h)$  son las coordenadas del vector  $\vec{\psi}_n^h$ .

**12.4.3. Campos isótropos en la esfera.** Un campo aleatorio  $\vec{\xi}(\vec{x})$ , que está dado en una esfera  $S$  del espacio  $R^m$  y que toma valores de  $R^l$ , se llama isótropo, si  $M \vec{\xi}(\vec{x})$  es constante y la función matricial de correlación  $B(\vec{x}, \vec{y})$  sólo depende de la distancia angular entre los puntos de la esfera  $\vec{x}, \vec{y}$ .

Sea  $\xi(\vec{x})$  un campo isótropo numérico en la esfera  $S$ . Su función de correlación tiene por expresión  $B(\cos \theta)$ , donde  $\theta$  es la distancia angular entre los puntos en la esfera. Existen tales coeficientes no negativos  $b_n$  que

$$B(\cos \theta) = \frac{1}{\omega_m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos \theta)}{C_n^{\frac{m-2}{2}}(1)} h(n, m), \quad (4.9)$$

donde  $\omega_m$  es el volumen  $(m-1)$ -dimensional lebesguiano de una esfera unitaria en  $R^m$ ,  $C_n^h(\cdot)$  son los polinomios de Gegenbauer (en el libro de G. Szegő, "Polinomios ortogonales", M., Fizmatgiz, 1962, pág. 500) y la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n h(n, m)$  converge.

Un campo aleatorio para  $M_{\xi}^{\vec{x}} = 0$  admite la siguiente representación:

$$\xi(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \sum_{h=1}^m \xi_n^h S_n^h(\vec{x}), \quad (4.10)$$

donde  $\xi_n^h$  son unas magnitudes aleatorias para las cuales  $M_{\xi_n^h} = 0$ ,  $M_{\xi_n^h \xi_p^j} = b_n \delta_j^h \delta_p^n$ .

Sea, ahora,  $\vec{\xi}(\vec{x})$  un campo isótropo vectorial en la esfera  $S$ . Su función material de correlación es de la forma

$$B(\cos \theta) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \frac{C_n^{\frac{m-2}{2}}(\cos \theta)}{C_n^{\frac{m-2}{2}}(1)} B_n, \quad (4.11)$$

donde  $B_n$  es una sucesión de matrices simétricas no negativas  $l \times l$ , para las cuales la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) B_n$$

converge. Si  $M_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = 0$ , el campo por sí mismo tiene la forma

$$\vec{\xi}(\vec{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n, m) \sum_{h=1}^m \vec{\xi}_n^h S_n^h(\vec{x}), \quad (4.12)$$

donde  $\vec{\xi}_n^h$  es una sucesión de vectores aleatorios incorrelacionados dos a dos, para los cuales

$$M_{\vec{\xi}_n^h} = 0, \quad M_{i \xi_n^h j \xi_n^k} = b_n^{ij}$$

( $i \xi_n^h, \dots, i \xi_n^k$  son las componentes del vector  $\vec{\xi}_n^h$ , en tanto que  $b_n^{i,j}$  son los elementos de la matriz  $B_n$ ).

**MARTINGALAS**

**13.1. Definiciones y ejemplos**

Una clase importante de magnitudes aleatorias que tienen numerosas aplicaciones la constituyen las martingalas y las semimartingalas.

Sean  $\{\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P}\}$  un espacio probabilístico básico,  $T$  un conjunto ordenado arbitrario de números enteros (tiempo discreto) o de números reales (tiempo continuo) y  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  un flujo de  $\sigma$ -álgebras,  $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$ , es decir, para  $s \leq t$

$$\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t.$$

**Definición 1.** Una familia de magnitudes aleatorias  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t; t \in T\}$ , en la que  $\xi(t)$  para todo  $t \in T$  son  $\mathfrak{F}_t$ -medibles y  $\mathbf{M}|\xi(t)| < \infty$ , se denomina **martingala**, si

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] = \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.1)$$

$\{\xi(t), \mathfrak{F}_t; t \in T\}$  se llama **submartingala**, si  $\mathbf{M}\xi^+(t) < \infty$  y

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] \geq \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T, \quad (1.2)$$

o bien **supermartingala**, si  $\mathbf{M}\xi^-(t) < \infty$  y

$$\mathbf{M}[\xi(t)/\mathfrak{F}_s] \leq \xi(s), \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.3)$$

Las supermartingalas y las submartingalas se llaman también **semimartingalas**.

En el caso continuo, cuando  $T$  es un intervalo del eje numérico real, las martingalas y semimartingalas en consideración se suponen separables.

De la definición se deduce que  $\mathfrak{F}_t$  siempre contiene una  $\sigma$ -álgebra generada por las magnitudes aleatorias  $\{\xi(s), s \leq t\}$ .

En la definición de la martingala (semimartingala) tal  $\sigma$ -álgebra se toma con frecuencia por  $\mathfrak{F}_t$ .

En aquellos casos cuando el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  está fijado, en la definición de la martingala (semimartingala) a menudo se omite.

De la definición de la esperanza matemática condicional se desprende la siguiente anotación de las propiedades (1.1)—(1.3):

$$\int_A \xi(t) dP = \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s; \quad (1.1')$$

$$\int_A \xi(t) dP \geq \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s; \quad (1.2')$$

$$\int_A \xi(t) dP \leq \int_A \xi(s) dP, \quad A \in \mathfrak{F}_s. \quad (1.3')$$

De las correlaciones (1.1')—(1.3') se deduce que para cualquier magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}_s$ -medible positiva  $\eta$  se verifican las siguientes correlaciones respectivas:

$$M[\xi_t \cdot \eta] = M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T; \quad (1.1'')$$

$$M[\xi_t \cdot \eta] \geq M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T; \quad (1.2'')$$

$$M[\xi_t \cdot \eta] \leq M[\xi_s \cdot \eta], \quad s < t, \quad s, t \in T. \quad (1.3'')$$

**EJEMPLO 1.** Supongamos que  $\xi$  es una magnitud aleatoria y está dado un flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ . La totalidad de las magnitudes aleatorias

$$\xi_t = M[\xi/\mathfrak{F}_t], \quad t \in T, \quad (1.4)$$

forma una martingala.

**EJEMPLO 2.** Sea  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes con  $M\zeta_n = 0$ . Hagamos  $\mathfrak{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}$  y  $\xi_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k$ . En este caso la sucesión  $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n; n \geq 1\}$  forma una martingala.

**EJEMPLO 3.** Sea  $\{\zeta_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias cuya densidad conjunta de probabilidades  $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para todo  $n \geq 1$  es estrictamente positiva. Sean  $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  las densidades de las probabilidades. Las razones de verosimilitud

$$\xi_n = \frac{q_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}{p_n(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)}, \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

forman una martingala respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras

$$\mathfrak{F}_n = \sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n), \quad n \geq 1.$$

### 13.2. Propiedades de las martingalas y semimartingalas

1. Si  $\xi(t)$  es una submartingala, entonces  $-\xi(t)$  será una supermartingala (y viceversa). Por ello, las propiedades de las submartingalas se pueden enunciar con facilidad para las supermartingalas (y viceversa).

2. Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una martingala, entonces  $M\xi(t) = \text{const.}$  Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una submartingala, entonces  $M\xi(t)$  será una función monótona no decreciente.

3. Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una submartingala y  $f(x)$  es una función convexa en  $T$ , continua y monótona no decreciente, mientras que  $Mf(\xi(t)) < \infty$  para  $t \in T$ , entonces  $\{f(\xi(t)), t \in T\}$  es también una submartingala.

4. Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una martingala, mientras que  $f(x)$  es una función convexa continua y  $M|f(\xi(t))| < \infty$  para  $t \in T$ , entonces  $\{f(\xi(t)), t \in T\}$  es una submartingala.

5. Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una martingala, entonces  $M|\xi(t)|$  no decrece en  $T$  de manera monótona.

6. Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una submartingala, entonces  $\{|\xi(t) - c|^p, t \in T\}$  es también una submartingala.

7. Desigualdades principales. Sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  una submartingala, entonces para toda constante positiva  $c$

$$P(\sup_{t \in T} \xi^+(t) \geq c) \leq \frac{1}{c} \sup_{t \in T} M\xi^+(t). \quad (2.1)$$

Si, en este caso,  $\sup_{t \in T} M|\xi^+(t)|^p < \infty$  para cierto  $p > 1$ , entonces

$$M[\sup_{t \in T} \xi^+(t)]^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sup_{t \in T} M|\xi^+(t)|^p. \quad (2.2)$$

Si  $\{\xi(t), t \in T\}$  es una martingala con  $\sup_{t \in T} M|\xi(t)|^p < \infty$ , entonces

$$P(\sup_{t \in T} |\xi(t)| \geq c) \leq \frac{1}{c^p} \sup_{t \in T} M|\xi(t)|^p. \quad (2.3)$$

Si el conjunto  $T$  posee el elemento máximo  $t_{\max} \geq t$  para cualquier  $t \in T$ , entonces las fronteras superiores exactas en los segundos miembros de las desigualdades (2.1)–(2.3) se alcanzan en el punto  $t_{\max}$ .

8. (Desigualdad de Doob). Introduzcamos  $v[a, b]$  que significa el número de intersecciones hechas en el semintervalo  $[a, b]$  por la submartingala  $\{\xi(t), t \in T\}$  de arriba abajo;  $v[a, b]$  es la frontera superior exacta de tales números  $s$  que existe una sucesión  $\{t_i, i = 1, 2, \dots, 2s\}$ ,  $t_i < t_{i+1}$ ,  $t_i \in T$ , para la cual

$$\xi(t_1) \geq b, \xi(t_2) < a, \xi(t_3) \geq b, \dots, \xi(t_{2s}) < a.$$

$v[a, b]$  es una magnitud aleatoria que satisface la desigualdad

$$Mv[a, b] \leq \frac{\sup_{t \in T} M[\xi(t) - b]^+}{b - a}. \quad (2.4)$$

### 13.3. Clausura, integrabilidad y existencia del límite

**Definición 1.** Una magnitud aleatoria  $\xi$  se llama *clausura* a la derecha de la submartingala  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$ , si  $M\xi^+ < \infty$  y  $\xi$  es medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F} = \sigma\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  y para todo  $t \in T$  se tiene

$$\xi(t) \leq M[\xi/\mathfrak{F}_t]. \quad (3.1)$$



Si el conjunto  $T$  dispone del elemento máximo  $t_{\max} \geq t$  para todos los  $t \in T$ , entonces la submartingala  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  está cerrada a la derecha por la magnitud aleatoria  $\bar{\xi} = \xi(t_{\max})$ .

**Teorema 1.** Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  una submartingala dada en el intervalo  $T$ . Las tres condiciones a seguir son equivalentes:

- $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  está cerrada a la derecha;
- la familia  $\{\xi(t), t \in T\}$  es uniformemente integrable;
- existe un límite en sentido de la convergencia en  $\mathcal{L}_1$ :

$$\lim_{t \uparrow t_{\max}} M |\xi(t) - \bar{\xi}| = 0.$$

Si se cumple siquiera una de dichas condiciones, el límite  $\lim_{t \uparrow t_{\max}} \xi(t) = \bar{\xi}$  existe con la probabilidad 1 y  $\bar{\xi}$  es la clausura de la submartingala a la derecha.

**Observación.** En la definición 1 y en el teorema 1 el término submartingala puede sustituirse por martingala, al sustituir el signo de desigualdad en (3.1) por el de igualdad.

**Teorema 2.** Sea  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  una martingala. Las tres condiciones a seguir son equivalentes:

- la familia  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  es uniformemente integrable;
- la martingala  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  tiene clausura a la derecha;
- $M |\xi_n - \xi_m| \rightarrow 0$ , cuando  $n, m \rightarrow \infty$ .

Si una de estas condiciones queda cumplida, con la probabilidad 1 existe el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \bar{\xi}$  y  $\bar{\xi}$  es la clausura de la martingala a la derecha.

Además, si se cumple la condición

$$\sup_{n \geq 1} M \xi_n^* < \infty, \quad (3.2)$$

con la probabilidad 1 existe el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \bar{\xi}$  y  $\bar{\xi}$  es la clausura a la derecha de la submartingala (martingala).

En los teoremas posteriores del presente punto,  $T$  se considera como un intervalo de un eje numérico real (puede ser infinito).

**Teorema 3.** Una submartingala separable  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  no tiene en el intervalo  $T$  discontinuidades de segunda especie.

Introducimos  $\mathfrak{F}_{t+0}$  que es la intersección de todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_s$  para  $s > t$ . En este caso  $\xi(t+0)$  será una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}_{t+0}$ -medible.

**Teorema 4.** (Regularización de la submartingala a la derecha). Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  una submartingala definida en el intervalo  $T$ . Entonces,  $\{\xi(t=0), \mathfrak{F}_{t+0}, t \in T\}$  es también una submartingala cuyas funciones muestrales son continuas a la derecha con la probabilidad 1. En este caso  $P(\xi(t) = \xi(t+0)) = 1$  en cada punto, donde  $M \xi(t)$  es continuo y  $\mathfrak{F}_{t+0} = \mathfrak{F}_t$ .

Si  $T$  dispone del elemento máximo  $t_{\max}$ , entonces  $\xi(t_{\max} + 0) = \xi(t_{\max})$ .

### 13.4. Momentos de Márkov y sustitución aleatoria del tiempo

Sea  $T$  un conjunto de momentos de tiempo en los que se realizan ciertos experimentos y sea  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  un flujo de  $\sigma$ -álgebras de los sucesos que se observan en los experimentos. Según los resultados de los experimentos realizados se determina la aparición del suceso  $A$  que tiene lugar en cierto momento aleatorio de tiempo  $\tau$ .

El suceso  $\{\tau \leq t\}$  significa que  $A$  sucedió antes o en el momento de tiempo  $t$ , por lo cual debe ser observable para la sucesión de experimentos que se ejecutan en los momentos de tiempo  $s \leq t; s \in T$ , es decir, el suceso  $\{\tau \leq t\}$  debe ser  $\mathfrak{F}_t$ -medible:  $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ . Las magnitudes aleatorias de este tipo  $\tau$  llámanso momento aleatorio de tiempo no dependiente del futuro o momento de Márkov, o bien momento de paro.

La definición formal consiste en lo siguiente.

**Definición 1.** Se llama tiempo aleatorio (momento de Márkov en el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$  dado en el espacio probabilístico básico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  una magnitud aleatoria  $\tau = \tau(\omega)$  con valores en  $T$ , definida en cierto subconjunto  $\Omega_\tau$  de un espacio de sucesos elementales  $\Omega$ , tal que para todo  $t \in T$  el suceso  $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ .

El momento de Márkov se denomina también tiempo aleatorio no dependiente del futuro o momento de paro.

El conjunto  $\Omega_\tau$  corresponde al suceso:  $\tau$  ha tenido lugar en uno de los momentos de tiempo  $T$ . Si en  $T$  está contenido el valor máximo  $t_{\max}$ , entonces  $\Omega_\tau = \{\tau \leq t_{\max}\}$ . Si en  $T$  no hay valor máximo, entonces  $\Omega_\tau = \bigcup_h \{\tau \leq t_h\}$  para la sucesión  $t_h \uparrow \sup \{t: t \in T\}$ .

Hemos de notar que la condición  $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$  es equivalente al requisito:  $\{\tau > t\} \in \mathfrak{F}_t$ , o en el caso cuando  $T$  es numerable,  $\{\tau = t\} \in \mathfrak{F}_t$  para cualquier  $t \in T$ .

El momento de Márkov  $\tau$  define la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos observados hasta el momento de tiempo  $\tau$ .

**Definición 2.** Una  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_\tau$  de todos los sucesos  $B$ , para los cuales  $B \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{F}_t$ , se denomina  $\sigma$ -álgebra generada por el tiempo aleatorio  $\tau$ .

**Propiedades de los momentos de Márkov.**

1. Una constante  $\tau = t_0 \in T$  es un momento de Márkov.
2. Si  $K$  es un conjunto boreliano en el eje real y  $\{\sup x: x \in K\} \leq t$ , entonces el suceso  $\{\tau \in K\}$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible.
3. Si una función boreliana real  $\theta(t)$  aplica el conjunto  $T$  en  $T$  y satisface la condición  $\theta(t) \geq t$  para todo  $t \in T$ , entonces  $\theta(\tau)$  es un momento de Márkov.
4. Si  $\tau$  y  $\rho$  son momentos de Márkov, entonces  $\max(\tau, \rho) = \tau \vee \rho$  y  $\min(\tau, \rho) = \tau \wedge \rho$  son ambos momentos de Márkov.
5. Si los momentos de Márkov  $\tau$  y  $\rho$  satisfacen la desigualdad  $\tau \leq \rho$  con la probabilidad 1, entonces  $\mathfrak{F}_\tau \subset \mathfrak{F}_\rho$ .
6. Supongamos que  $T$  es un conjunto numerable o finito y sea  $\{\xi(t), t \in T\}$  una totalidad de magnitudes aleatorias subordinadas al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in T\}$ , mientras que  $\tau$  es un momento de Márkov con  $\Omega_\tau = \Omega$ . En este caso, la magnitud aleatoria  $\xi(\tau)$  es  $\mathfrak{F}_\tau$ -medible y está definida para todos los  $\omega \in \Omega$ .
7. Supongamos que  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  es una submartingala cerrada a la derecha (continua a la derecha, en el caso continuo) y los momentos de Márkov  $\tau$  y  $\rho$ , definidos para todos los  $\omega \in \Omega$ ,

satisfacon la desigualdad  $\tau \ll \rho$ . En este caso

$$M[\xi(\rho)/\mathfrak{F}_\tau] \geq \xi(\tau). \quad (4.1)$$

Si  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  es una martingala cerrada a la derecha, entonces (4.1) es justa con el signo de igualdad.

8. Supongamos que  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  es una submartingala cerrada a la derecha (continua a la derecha, en el caso continuo) y  $\{\tau_s, s \in S\}$  es una familia creciente de los momentos de paro, definidos en  $\Omega$  ( $\tau_{s_1} \leq \tau_{s_2}$  para  $s_1 \leq s_2$ ). En estas condiciones  $\{\xi(\tau_s), \mathfrak{F}_{\tau_s}, s \in S\}$  es también una submartingala.

Un proceso aleatorio  $\{\xi(\tau_s), \mathfrak{F}_{\tau_s}, s \in S\}$  se denomina transformación del proceso  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  con ayuda de la sustitución aleatoria del tiempo  $\{\tau_s, s \in S\}$ .

9. Supongamos que  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  es una martingala,  $\tau$  es un momento de Márkov,  $M|\xi_\tau| < \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{\tau > n\}} \xi_n dP = 0$ . Entonces

$$M\xi_\tau = M\xi_1.$$

10. Si  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  es una martingala acotada:  $|\xi_n| \leq c$  con la probabilidad 1 para todo  $n \geq 1$ , entonces  $M\xi_\tau = M\xi_1$ .

11. (Identidad de Wald). Sean  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas con  $M|\zeta_n| < \infty$  y  $\tau$ , un momento de Márkov respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_n = \sigma\{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n\}, n \geq 1\}$  con  $M\tau < \infty$ . En este caso

$$M \sum_{h=1}^{\tau} \zeta_h = M\zeta_1 M\tau. \quad (4.2)$$

12. Supongamos que  $\tau$  es un momento de Márkov respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  y  $\eta$  es una magnitud aleatoria con esperanza matemática finita. En este caso tiene lugar la fórmula

$$M[\eta/\mathfrak{F}_\tau] = \sum_{n=1}^{\infty} M[\eta/\mathfrak{F}_n] \chi_{\{\tau \geq n\}} + M[\eta/\mathfrak{F}_\infty] \chi_{\{\tau = \infty\}}. \quad (4.3)$$

Aquí,  $\mathfrak{F}_\infty = \sigma\{\mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ .

Ha de ser notado que se verifica la desigualdad

$$M[\eta \chi_{\{\tau \geq n\}}/\mathfrak{F}_\tau] = M[\eta \chi_{\{\tau \geq n\}}/\mathfrak{F}_n]. \quad (4.4)$$

### 13.5. Algunas aplicaciones

Las propiedades de las martingalas y semimartingalas, en particular, la existencia de los límites (véase el p. 13.3) desempeñan un papel importante en la teoría moderna de procesos aleatorios.

1. **Juegos probabilísticos.** Consideremos una sucesión de magnitudes aleatorias  $\{\zeta_n, n \geq 1\}$  en la cual  $\zeta_n$  puede ser interpretada como una ganancia (positiva o negativa) en la  $n$ -ésima repetición del juego

(partida). En este caso  $\zeta_n = \sum_{h=1}^n \zeta_h$  representa la ganancia sumaria en  $n$  partidas. El juego se considera inofensivo, si queda cumplida

la condición: para todo  $n \geq 1$

$$M\{\zeta_{n+1}/\zeta_1, \dots, \zeta_n\} = 0.$$

En este caso la sucesión  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  forma una martingala con  $M\xi_n = 0$ .

El juego se considera favorable, si está cumplida la condición: para todo  $n \geq 0$ :

$$M\{\zeta_{n+1}/\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \geq 0.$$

En este caso la sucesión  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  forma una submartingala.

La imposibilidad del sistema de un juego inofensivo, basado en un momento de Márkov de paro  $\tau$ , fluye de la propiedad de los momentos de Márkov  $M\xi_\tau = 0$ . De suerte que mediante la elección de un momento de Márkov de paro resulta imposible aumentar la ganancia media.

**2. Fluctuación de Bernoulli en un segmento.** Sea  $\{\zeta_k, k \geq 1\}$  una sucesión de magnitudes aleatorias de Bernoulli independientes:

$$P(\zeta_k = 1) = p, P(\zeta_k = -1) = q = 1 - p. \text{ Sea } s_n = \sum_{k=1}^n \zeta_k, n \geq 1.$$

En este caso la sucesión de magnitudes aleatorias  $\{\xi_n = (q/p)^{s_n}, n \geq 1\}$  forma una martingala, o sea  $M\xi_n = 1$ . Introduzcamos el momento de la primera salida de una fluctuación de Bernoulli  $\{s_n, n \geq 1\}$  del intervalo  $(a, b)$  y el momento de paro  $\tau = \inf\{n: s_n \notin (a, b)\}$ , donde  $a$  y  $b$  son unos números enteros,  $a < 0 < b$ .

Sea  $P(s_\tau = a) = p_a, P(s_\tau = b) = 1 - p_a$ . De la ecuación  $M\xi_\tau = 1$  se determina  $p_a = [1 - (q/p)^b] / [(q/p)^a - (q/p)^b]$  para  $p > q$ .

**3. Ley de cero y de unidad.** Sean  $\{\tilde{x}_n, n \geq 1\}$  un flujo de  $\sigma$ -álgebras y  $\tilde{\sigma} = \sigma\{\tilde{x}_n, n \geq 1\}$ . Si es que  $A \in \tilde{\sigma}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} M[\chi_A / \tilde{\sigma}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A / \tilde{\sigma}_n) = \chi_A$  con la probabilidad 1. En particular, si  $A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\tilde{x}_{n+k}, k \geq 1\}$ , entonces  $M[\chi_A / \tilde{\sigma}_n] = P(A) = 1$  ó 0, cualquiera que sea  $n$ .

**4. Convergencia de las series.** Supongamos que la sucesión de sumas  $\{\sum_{k=1}^n \zeta_k, \tilde{\sigma}_n; n \geq 1\}$  forma una martingala y los sumandos

son uniformemente acotados:  $|\zeta_k| \leq c < \infty$ . La serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$  converge con la probabilidad 1 hacia una magnitud aleatoria finita cuando y sólo cuando hacia una magnitud aleatoria finita converge con la probabilidad 1 la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} M\{\zeta_n^2 / \tilde{\sigma}_{n-1}\}$ .

En particular, para el caso de sumandos aleatorios independientes  $\{\zeta_k, k \geq 1\}$  con  $M\zeta_k = 0$ , del carácter finito de la suma  $\sum_{n=1}^{\infty} M\zeta_k^2$  se desprende la convergencia de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k$ .

5. Ley reforzada de los grandes números. Supongamos que la sucesión de sumas  $\left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k, n \geq 1 \right\}$  forma una martingala. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} M \xi_n^2 < \infty, \text{ entonces, con la probabilidad 1, } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

6. Continuidad absoluta de las medidas. Sea  $\mathfrak{X}, \mathfrak{B}, P$  un espacio probabilístico y sea  $q(A)$  una medida en  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$  absolutamente continua respecto de  $P$ , con  $q(\mathfrak{X}) < \infty$ . Supongamos que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  se genera por una sucesión numerable de conjuntos  $\mathfrak{B} = \sigma \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$ . Entonces, en el espacio medible  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{B})$  existe una sucesión completa de particiones:  $\{A_{nk}; n \geq 1, k \geq 1\}$  que satisface las condiciones: a)  $A_{nk} \in \mathfrak{B}$ ,  $A_{nk} \cap A_{nr} = \emptyset$ , cuando  $k \neq r$ ;  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} = \mathfrak{B}$ ; b) la  $(n+1)$ -ésima partición es la subpartición de la  $n$ -ésima partición, es decir, para cualquier  $A_{n+1k} \subset \subset A_{nr}$  con cierto  $r = r(k)$ ; c) la  $\sigma$ -álgebra mínima en la que están contenidas todas las  $A_{nk}$ ,  $n \geq 1, k \geq 1$  coincide con  $\mathfrak{B}$ .

Hagamos

$$g_n(x) = \frac{q(A_{nk}(x))}{P(A_{nk}(x))}, \quad (5.1)$$

para  $P(A_{nk}(x)) > 0$ , donde  $A_{nk}(x)$  es aquel conjunto de la partición  $\{A_{nk}, k \geq 1\}$  que contiene el punto  $x$ . Si, en cambio,  $P(A_{nk}(x)) = 0$ , entonces hacemos  $g_n(x) = 0$ . En este caso la sucesión  $\{g_n, \mathfrak{X}_n, n \geq 1\}$  forma una martingala para  $\mathfrak{X} = \sigma \{A_{nk}, k \geq 1\}$ . Existe el límite  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \pmod{P}$ , no dependiente de la elección de la sucesión completa de particiones  $\{A_{nk}; n \geq 1, k \geq 1\}$ . Para  $B \in \mathfrak{B}$  arbitrario tiene lugar la fórmula

$$q(B) = \int_B g(x) P(dx), \quad B \in \mathfrak{B}. \quad (5.2)$$

7. Medidas estocásticas. Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  una martingala separable en un intervalo del eje numérico real  $T$  con  $M|\xi(t)|^2 < \infty$ . En el semianillo  $\mathfrak{R}$  de todos los semiintervalos  $\Delta = (s, t] \subset T$  introduzcamos una familia de magnitudes aleatorias de Hilbert

$$\zeta(\Delta) = \xi(t) - \xi(s).$$

De la propiedad de la martingala  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \in T\}$  se deduce que  $\{\zeta(\Delta), \Delta \in \mathfrak{R}\}$  es una medida estocástica ortogonal elemental con la función estructural  $m(\Delta) = M|\zeta(\Delta)|^2$  que admite prolongación hasta una medida en  $T$ .

### 13.6. Descomposición de las semimartingalas

#### 13.6.1. Tiempo discreto.

Definición 1. Una submartingala no negativa  $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  se llama potencial, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\pi_n = 0. \quad (6.1)$$

Observemos que para un potencial  $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = 0$  con la probabilidad 1.

**Teorema 1 (descomposición de Riesz).** Si la supermartingala  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  mayor a cierta submartingala  $\{\zeta_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$ :  $\xi_n \geq \zeta_n$  para todo  $n \geq 1$ , entonces existen una martingala  $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  y un potencial  $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  tales que para cualquier  $n \geq 1$  se verifica

$$\xi_n = \mu_n + \pi_n, \quad n \geq 1. \quad (6.2)$$

La descomposición (6.2) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Sea  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  una supermartingala. Definamos las magnitudes aleatorias  $\mu_n$  y  $\alpha_n$  del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \xi_0, & \alpha_0 &= 0, \\ \mu_1 &= \mu_0 + [\xi_1 - M[\xi_1/\mathfrak{F}_0]], & \alpha_1 &= \xi_0 - M[\xi_1/\mathfrak{F}_0], \\ & \dots & & \dots \\ \mu_n &= \mu_{n-1} + (\xi_n - M[\xi_n/\mathfrak{F}_{n-1}]), & \alpha_n &= \alpha_{n-1} + (\xi_{n-1} - M[\xi_n/\mathfrak{F}_{n-1}]). \end{aligned}$$

El proceso  $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  es una martingala, mientras que  $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 1\}$  es un proceso creciente:  $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n$ , con la particularidad de que  $\alpha_n$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{F}_{n-1}$ -medible.

Tiene lugar la siguiente descomposición

$$\xi_n = \mu_n - \alpha_n, \quad n \geq 0.$$

**Definición 2.** Un proceso aleatorio  $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  se llama creciente, si  $\alpha_{n+1} \geq \alpha_n \pmod{P}$  para todo  $n \geq 1$  y  $\alpha_0 = 0$  y natural, si  $\alpha_{n+1}$  son magnitudes aleatorias  $\mathfrak{F}_n$ -medibles ( $n \geq 1$ ).

**Teorema 2 (descomposición de Doob).** Toda submartingala  $\{\xi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  admite una única descomposición (con la exactitud salvo la equivalencia estocástica)

$$\xi_n = \mu_n + \alpha_n, \quad n \geq 0, \quad (6.3)$$

en la cual  $\{\mu_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  es una martingala;  $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$ , un proceso natural creciente.

En particular, el potencial  $\{\pi_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  puede ser representado en la forma

$$\pi_n = M[\alpha_\infty/\mathfrak{F}_n] - \alpha_n, \quad (6.4)$$

donde  $\{\alpha_n, \mathfrak{F}_n, n \geq 0\}$  es un proceso natural creciente.

### 13.6.2. Tiempo continuo.

**Definición 3.** Un proceso aleatorio continuo a la derecha  $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  se denomina creciente, si  $\alpha(0) = 0$  y  $\alpha(s) \leq \alpha(t)$ , cuando  $s \leq t \pmod{P}$  y natural, si para toda martingala acotada y no negativa con la probabilidad 1  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  con límites a la izquierda se verifica la correlación

$$M \int_0^\infty \xi(t-0) d\alpha(t) = M \bar{\xi} \bar{\alpha}. \quad (6.5)$$

Aquí,

$$\bar{\xi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t), \quad \bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t).$$

Un proceso creciente se llama integrable, si  $\sup M\alpha(t) < \infty$ .

Un proceso creciente integrable  $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  es natural cuando y sólo cuando, para toda martingala  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ , acotada, continua a la derecha y que tiene límites a la izquierda,

$$M \int_0^T \xi(t) d\alpha(t) = M \int_0^T \xi(t-0) d\alpha(t) \quad (6.6)$$

para cualquier  $T > 0$ .

**Teorema 3 (descomposición de Doob—Meyer).** Sea  $\{\pi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  tal potencial continuo a la derecha que la familia de magnitudes aleatorias  $\{\pi(\tau), \tau \in \mathfrak{Z}\}$ , donde  $\mathfrak{Z}$  es una totalidad de momentos de Márkov  $\tau$  con  $P\{\tau < \infty\} = 1$ , es uniformemente integrable. Entonces, existe tal proceso  $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ , natural creciente e integrable, que

$$\pi(t) = M[\bar{\alpha}; \mathfrak{F}_t] - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}, \quad (6.7)$$

donde  $\bar{\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t)$ . La descomposición (6.7) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

**Corolario.** Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  una supermartingala continua a la derecha, para la cual la familia de magnitudes aleatorias  $\{\xi(\tau), \tau \in \mathfrak{Z}\}$  es uniformemente integrable. En este caso existen una martingala continua a la derecha y uniformemente integrable  $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y un proceso natural creciente e integrable  $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  tales que

$$\xi(t) = \mu(t) - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}. \quad (6.8)$$

La descomposición (6.8) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

**Observación.** La descomposición de Doob—Meyer (6.7) y (6.8) es válida también en el caso en que en lugar de una totalidad de momentos de Márkov finitos  $\mathfrak{Z} = \{\tau: P(\tau < \infty) = 1\}$  se utiliza la totalidad de momentos de Márkov acotados  $\mathfrak{Z}_a = \{\tau: P(\tau \leq a) = 1\}$ . Sólo en este caso  $M\bar{\alpha} < \infty$ .

**Definición 4.** Un proceso aleatorio  $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  se llama martingala local, si existe una sucesión creciente de momentos de Márkov  $\{\tau_n, n \geq 1\}$  respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  tal que: a)  $P(\tau_n \leq n) = 1$ ,  $P(\lim \tau_n = \infty) = 1$ ; b) para todo  $n \geq 1$   $\{\mu(t \wedge \tau_n), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  es una martingala uniformemente integrable.

Señalemos que toda martingala con trayectorias continuas a la derecha es local.

**Teorema 4.** Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  una supermartingala continua a la derecha y no negativa. Existen una martingala local continua a la derecha  $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y un proceso natural creciente e integrable  $\{\alpha(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  tales que

$$\xi(t) = \mu(t) - \alpha(t), \quad t \geq 0 \pmod{P}. \quad (6.9)$$

La descomposición (6.9) es única con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

### 13.7. Martingalas integrables de modo cuadrático

**Definición 1.** Una martingala continua a la derecha  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  se llama **integrable de modo cuadrático**, si

$$\sup_{t \in T} M_{\mathfrak{F}_t}^2(t) < \infty. \quad (7.1)$$

La descomposición de Doob—Meyer para la martingala integrable de modo cuadrático  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  tiene la forma

$$\xi^2(t) = \mu(t) + \langle \xi \rangle_t, \quad t \geq 0, \quad (7.2)$$

donde  $\{\mu(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  es una martingala,  $\alpha(t) = \langle \xi \rangle_t$  es un proceso natural creciente correspondiente a  $\xi(t)$ . El proceso  $\langle \xi \rangle_t$  se denomina **característica** de la martingala integrable de modo cuadrático  $\xi(t)$ . En este caso, para  $s \leq t$

$$M[(\xi(t) - \xi(s))^2 / \mathfrak{F}_s] = M[(\langle \xi \rangle_t - \langle \xi \rangle_s) / \mathfrak{F}_t]. \quad (7.3)$$

Para dos martingalas integrables de modo cuadrático:  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y  $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  la característica recíproca  $\langle \xi \eta \rangle_t$  se determina mediante la correlación

$$\langle \xi \eta \rangle_t = \frac{1}{2} [\langle \xi + \eta \rangle_t - \langle \xi \rangle_t - \langle \eta \rangle_t]. \quad (7.4)$$

La utilidad de la introducción de la característica recíproca de dos martingalas está asociada con el hecho de que el proceso  $\xi(t)\eta(t) - \langle \xi \eta \rangle_t$  es una martingala.

**Definición 2.** Dos martingalas integrables en cuadrado  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y  $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  se llaman **ortogonales**, si el proceso  $\xi(t)\eta(t) - \langle \xi \eta \rangle_t$  es una martingala.

Si  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y  $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  son martingalas ortogonales integrables en cuadrado, entonces su característica recíproca es  $\langle \xi \eta \rangle_t = 0 \pmod{P}$ .

Unas martingalas integrables de modo cuadrático  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  y  $\{\eta(t), \mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$  son ortogonales cuando y sólo cuando queda cumplida la correlación

$$\langle \xi + \eta \rangle_t = \langle \xi \rangle_t + \langle \eta \rangle_t \pmod{P}.$$

**EJEMPLO 1.** El proceso de Wiener  $\{W_t, \mathfrak{F}_t^W, 0 \leq t \leq T\}$  con  $\mathfrak{F}_t^W = \sigma\{W_s, s \leq t\}$  es una martingala integrable en cuadrado con  $\langle W \rangle_t = t$ .

**EJEMPLO 2.** Supongamos que  $a(t, \omega)$  es  $\mathfrak{F}_t^W$ -medible para todo  $t$  y  $M \int_0^T a^2(t, \omega) dt < \infty$ . Entonces, el proceso  $\left\{ \int_0^t a(s, \omega) dW_s, \mathfrak{F}_t^W, 0 \leq t \leq T \right\}$  es una martingala integrable de modo cuadrático con

$$\left\langle \int_0^t a(s, \omega) dW_s \right\rangle_t = \int_0^t a^2(s, \omega) ds.$$



**Teorema.** Supongamos que  $\{\xi(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  es una martingala integrable de modo cuadrático y  $\{W_t, \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ , un proceso de Wiener. En este caso existen un proceso  $\mathfrak{F}_t$ -medible para todo  $t$  a  $(t, \omega)$

con  $M \int_0^T a^2(t, \omega) dt < \infty$  y una martingala integrable de modo cuadrático  $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$  tales que

$$\xi(t) = \int_0^t a(s, \omega) dW_s + \zeta(t), \quad 0 \leq t \leq T \pmod{P}, \quad (7.5)$$

y

$$(\xi W)_t = \int_0^t a(s, \omega) ds, \quad 0 \leq t \leq T \pmod{P}, \quad (7.6)$$

siendo, con ello, ortogonales las martingalas  $\left\{ \int_0^t a(s, \omega) dW_s, \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T \right\}$  y  $\{\zeta(t), \mathfrak{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$ .

## PROCESOS DE MÁRKOV

## 14.1. Funciones aleatorias de Márkov

**14.1.1. Propiedad de Márkov.** En la base del concepto de proceso markoviano radica la idea de ciertos sistemas estocásticos que evolucionan en tiempo y poseen la propiedad de «ausencia del efecto posterior» («ausencia de memorias»). Los procesos de este género con tiempo discreto, llamados cadenas de Márkov, se han considerado en el capítulo 8. En el presente capítulo se consideran los procesos de Márkov con tiempo continuo. Supondremos que el tiempo varía dentro de cierto segmento (intervalo, semiintervalo)  $\mathcal{T}$  que está contenido en el conjunto de todos los números reales no negativos. En particular, es posible que  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

Supongamos que se dan:

a) cierto espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ ;  
 b) un flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ , es decir, una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , tal que  $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}_s$  y  $\mathfrak{F}_s \subset \mathfrak{F}_t$  para  $s \leq t$ ,  $s, t \in \mathcal{T}$ ;

c) una función de dos variables  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\omega \in \Omega$  con valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  tal que  $\xi(t)$ , con cada  $t \in \mathcal{T}$ , es la aplicación medible del espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}_t)$  en  $(X, \mathfrak{B})$ .

De este modo queda definido el proceso aleatorio  $\xi(t)$  subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ . En particular, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$  puede coincidir con la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos generada por todos los sucesos del tipo  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ ,  $s \in \mathcal{T}$ ,  $s \leq t$ . No obstante, en el caso general, es una  $\sigma$ -álgebra más amplia.

**Definición 1.** Decen que un proceso aleatorio  $\xi(t)$ , subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ , posee la propiedad de Márkov respecto de este flujo, si para cualesquiera  $s \leq t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ ),  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , se cumple con la probabilidad 1 la correlación

$$P\{\xi(t) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s\} = P\{\xi(t) \in \Gamma | \xi(s)\}.$$

Tal proceso lo llamaremos **función aleatoria de Márkov**. El término «proceso de Márkov» lo reservaremos para otro concepto, más cómodo (desde el punto de vista del estudio de la propiedad de Márkov) y relacionado con toda una familia de funciones aleatorias de Márkov (véase también el cap. 8).

Al interpretar  $\xi(t)$  como un estado (una posición) de cierto sistema (partícula) en el momento de tiempo  $t$ , la propiedad de Márkov significa que tal sistema posee la propiedad de ausencia del efecto posterior: en la pronosticación (en la media) del comportamiento del sistema en los momentos «futuros» de tiempo según las observaciones

del sistema en todos los momentos «pasados» de tiempo hasta el momento «presente» inclusive, lo esencial es conocer la posición del sistema en consideración sólo en el momento «presente» de tiempo.

Sea  $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$  un proceso aleatorio con los valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ , subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ . Designaremos mediante  $\mathfrak{N}_t$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos generada por los sucesos del tipo  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}, s \leq t (s, t \in \mathcal{T}), \Gamma \in \mathfrak{B}$ , y mediante  $\mathfrak{N}_t^+$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos que contiene todos los sucesos del tipo  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}, s \geq t (s, t \in \mathcal{T}), \Gamma \in \mathfrak{B}$ . Observemos que  $\mathfrak{N}_t \subset \mathfrak{N}_t^+$  y, si  $\xi(t)$  posee la propiedad de Márkov respecto del flujo  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ , entonces  $\xi(t)$  posee la misma propiedad respecto del flujo  $\{\mathfrak{N}_t, t \in \mathcal{T}\}$ .

La propiedad de Márkov del proceso  $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$  respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$  es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

1) para toda función acotada  $\mathfrak{B}$ -medible  $f(x), x \in X$ , y cualesquiera  $s \leq t (s, t \in \mathcal{T})$

$M\{f(\xi(t))/\mathfrak{N}_s\} = M\{f(\xi(t))/\xi(s)\}$  casi por cierto respecto a  $\mathbf{P}$ ;

2) para toda magnitud aleatoria acotada y  $\mathfrak{N}^t$ -medible  $\eta$  y cualesquiera  $s \leq t (s, t \in \mathcal{T})$

$$M\{\eta/\mathfrak{N}_t\} = M\{\eta/\xi(s)\} \text{ casi por cierto respecto a } \mathbf{P}_t$$

3) para cualesquiera sucesos  $A \in \mathfrak{N}^t$  y  $B \in \mathfrak{N}_t^+$

$$\mathbf{P}\{A \cap B/\xi(t)\} = \mathbf{P}\{A/\xi(t)\} \mathbf{P}\{B/\xi(t)\} \text{ casi por cierto respecto a } \mathbf{P}.$$

La última propiedad significa que para un proceso que posee la propiedad de Márkov los sucesos del «futuro» y del «pasado», para el «presente» fijado, son condicionalmente independientes.

**14.1.2. Probabilidad de paso.** Sea  $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$  una función aleatoria de Márkov con sus valores en  $(X, \mathfrak{B})$  respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in \mathcal{T}\}$ . Como corolario de la propiedad de Márkov y de la fórmula de probabilidad total interviene la siguiente correlación

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in \Gamma/\xi(t_1)\} = M\{\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in \Gamma/\xi(t_2)\}/\xi(t_1)\},$$

válida casi por cierto respecto a la medida  $\mathbf{P}$  para cualesquiera  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $t_1 \leq t_2 \leq t_3 (t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$ . Esta correlación lleva el nombre de ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Es de particular interés el caso en que para la probabilidad condicional  $\mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(s)\}$  existe una probabilidad condicional regular, es decir, tal función  $P(s, x, t, \Gamma), x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}, s < t (s, t \in \mathcal{T})$  que quedan cumplidas las condiciones:

a) para  $s, x, t$  fijados la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una medida probabilística en  $(X, \mathfrak{B})$ ;

b) para  $s, t, \Gamma$  fijados la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible;

c) con la probabilidad 1 para cualesquiera  $s, t, \Gamma$  se tiene

$$P(s, \xi(s), t, \Gamma) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in \Gamma/\xi(s)\}.$$

Si, para una función aleatoria de Márkov dada, existe la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  que satisface las condiciones a)—c), ésta se denomina **probabilidad de paso**. Para suposiciones bastante amplias (por ejemplo, si  $X$  es un espacio separable métrico completo y  $\mathfrak{B}$  es una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos  $X$ ) la existencia de la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  con las propiedades mencionadas se garantiza.

En términos de la probabilidad de paso, la ecuación de Chapman—Kolmogórov se escribirá en la forma

$$P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma) = \int_X P(t_2, y, t_2, \Gamma) P(t_1, \xi(t_1), t_2, dy)$$

casi por cierto respecto a  $P$ ,

donde  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $(t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . Siempre supondremos cumplida una correlación más fuerte para la probabilidad de paso que también se llama ecuación de Chapman—Kolmogórov. "A saber, supondremos que para cualesquiera  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $(t_1, t_2, t_3 \in \mathcal{T})$

$$P(t_1, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(t_2, y, t_2, \Gamma) P(t_1, x, t_2, dy).$$

**14.1.3. Equivalencia estocástica.** Las distribuciones de dimensiones finitas de una función aleatoria de Márkov no se definen solamente por la probabilidad de paso. Si en  $\mathcal{T}$  existe un elemento mínimo  $t_0$ , entonces, conociendo la distribución inicial

$$\mu(\Gamma) = P(\xi(t_0) \in \Gamma), \Gamma \in \mathfrak{B},$$

y la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  de la función aleatoria de Márkov, podemos determinar todas sus distribuciones de dimensiones finitas. En efecto, para  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ,  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$  tenemos

$$\begin{aligned} P(\xi(t_0) \in \Gamma_0, \xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n) = \\ = \int_{\Gamma_0} \mu(dx_0) \int_{\Gamma_1} P(t_0, x_0, t_1, dx_1) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \end{aligned}$$

Así, pues, si para dos funciones aleatorias de Márkov, definidas, quizás, en diferentes espacios probabilísticos, las distribuciones iniciales y las probabilidades de paso coinciden, entonces coinciden también las distribuciones de dimensiones finitas de estas funciones. Esto significa que dichas dos funciones aleatorias de Márkov son equivalentes.

Si en  $\mathcal{T}$  existe un elemento mínimo  $t_0$  y si están definidas la medida probabilística en  $(X, \mathfrak{B})$  y la función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $t_0 \leq s < t$ ,  $s, t \in \mathcal{T}$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , que satisface las condiciones a), b) del p. 14.1.2 y la ecuación de Chapman—Kolmogórov (véase la última correlación en el p. 14.1.2.), entonces en cierto espacio probabilístico siempre podemos construir una función aleatoria de Márkov, para la cual la medida  $\mu$  sería la distribución inicial y la función  $P(s, x, t, \Gamma)$ , la probabilidad de paso.

Supongamos ahora que en  $\mathcal{T}$  no hay ningún elemento mínimo. Si  $\{\xi(t), t \in \mathcal{T}\}$  es una función aleatoria de Márkov, hagamos

$$\mu_t(\Gamma) = P(\xi(t) \in \Gamma), t \in \mathcal{T}, \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

Para todo  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\mu_t$  será una medida probabilística en  $(X, \mathfrak{B})$ , llamada ley de entrada de la función aleatoria de Márkov en consideración. La ley de entrada está relacionada con la probabilidad de paso me-

diante la siguiente correlación:

$$\mu_t(\Gamma) = \int_X \mu_s(dx) P(s, x, t, \Gamma), \quad s < t (s, t \in \mathcal{T}), \quad \Gamma \in \mathfrak{B}. \quad (1.1)$$

Conociendo la ley de entrada y la probabilidad de paso de la función aleatoria de Márkov, se puede determinar todas sus distribuciones de dimensiones finitas

$$\begin{aligned} P\{\xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n\} = \\ = \int_{\Gamma_1} \mu_{t_1}(dx_1) \int_{\Gamma_2} P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \dots \int_{\Gamma_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n), \end{aligned}$$

donde  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  ( $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathcal{T}$ ),  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$ .

De este modo, una función aleatoria de Márkov en el caso dado se define por medio de sus ley de entrada y probabilidad de paso unívocamente con la exactitud salvo la equivalencia estocástica.

Y, viceversa, si están dadas una familia de medidas probabilísticas  $\mu_t(\Gamma)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y una función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $s < t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ ),  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , satisficente las condiciones a), b) del p. 14.1.2. y la ecuación de Chapman—Kolmogórov, tales que la correlación (1.1) queda cumplida, entonces en cierto espacio probabilístico existe una función aleatoria de Márkov, para la cual la ley de entrada coincide con  $\mu_t$ , y la probabilidad de paso, con  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

**14.1.4. Funciones aleatorias de Márkov interrumpidas.** En la práctica nos encontramos a veces con sistemas, para cuya descripción resulta insuficiente la definición de función aleatoria de Márkov citada arriba.

Supongamos, por ejemplo, que  $\xi(t)$  significa el número de individuos en cierta población biológica en el momento de tiempo  $t$ . En este caso  $\xi(t)$  es un proceso aleatorio y todos los números naturales constituyen su espacio fásico. Puede resultar que la intensidad de reproducción en dicha población es tan considerable que, transcurrido cierto tiempo finito (aleatorio, en el caso general), el número de individuos en la población en consideración se hace infinitamente grande. Así pues, aquí tropezamos con una situación en la cual el proceso  $\xi(t)$  se define sólo en cierto intervalo aleatorio de tiempo al expirar el cual se produce la desaparición del proceso del espacio fásico (interrupción, explosión, destrucción). La definición de una función aleatoria de Márkov que viene abajo, toma en consideración tal posibilidad.

Convengamos en considerar que  $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$ . Sean:

a) un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ ;

b) una magnitud aleatoria  $\xi = \xi(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , que toma los valores en el intervalo ampliado  $[t_0, \infty)$ ;

c) para todo  $t \in \mathcal{T}$  la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{N}_t$  de subconjuntos del conjunto  $\Omega_t = \{\omega: \xi(\omega) > t\}$ , con la particularidad de que  $\mathfrak{N}_s[\Omega_t] \subset \mathfrak{N}_t \subset \mathfrak{N}$  para  $s < t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ ), donde  $\mathfrak{N}_s[\Omega_t]$  es la traza de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{N}_s$  en el conjunto  $\Omega_t$ , se decir, una totalidad de todos los conjuntos del tipo  $A \cap \Omega_t$ ,  $A \in \mathfrak{N}_s$ ;

d) una función de dos variables  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ ,  $t \in [t_0, \xi(\omega))$  con sus valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  tal que

para cualesquiera  $t \in \mathcal{T}$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  queda cumplida la inclusión  $\{\omega: \xi(t, \omega) \in \Gamma\} \in \mathfrak{F}_t$ .

**Definición 2.** El sistema de objetos a)—d) determina una función aleatoria de Márkov interrumpida, si para cualesquiera  $s \ll t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ ),  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , se cumple la correlación

$$P \{ \xi(t) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s \} = P \{ \xi(t) \in \Gamma | \xi(s) \}$$

casi por cierto respecto de la medida  $P$  en el conjunto  $\Omega_s$ . (En otras palabras, esta correlación se cumple para casi todos los  $\omega \in \Omega_s$  respecto de la medida  $P$ ).

El momento de tiempo  $\zeta(\omega)$  se llama **momento de interrupción** de la función aleatoria de Márkov, en tanto que la magnitud  $\zeta(\omega) - t_0$ , su tiempo de vida.

El segundo miembro de la igualdad en la definición 2 es la probabilidad condicional respecto de la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos del conjunto  $\Omega_s$  generada por los conjuntos del tipo  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma\}$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .

Supongamos que para  $P \{ \xi(t) \in \Gamma | \xi(s) \}$  existe una probabilidad condicional regular, es decir, una función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $x \in X$ ,  $s \ll t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ ),  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , que satisface las condiciones:

- 1) para  $s, t, \Gamma$  fijados la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una función  $\mathfrak{B}$ -medible de  $x$ ;
- 2) para  $s, x, t$  fijados  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una medida en  $(X, \mathfrak{B})$  (no forzosamente probabilística, puesto que  $P(s, x, t, X) \leq 1$ );
- 3) para cualesquiera  $s \ll t$  ( $s, t \in \mathcal{T}$ )  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se tiene

$$P \{ (t) \in \Gamma | \xi(s) \} = P(s, \xi(s), t, \Gamma)$$

casi por cierto respecto de  $P$  en el conjunto  $\Omega_s$  (c.p.c.  $\Omega_s, P$ ).

En este caso la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  se llama **probabilidad de paso** de la función aleatoria de Márkov. Se interpreta como una probabilidad condicional del suceso  $\{ \xi(t) \in \Gamma \}$  a condición de que  $\xi(s) = x$ . En particular, la magnitud  $1 - P(s, x, t, X)$  es la probabilidad condicional de que para el momento de tiempo  $t$  la función aleatoria de Márkov ya se ha interrumpido (ha desaparecido del espacio fásico) a condición de que  $\xi(s) = x$ .

Observemos que si  $\zeta(\omega) = +\infty$ , la definición 2 se transforma en una definición para la función aleatoria de Márkov ininterrumpida definida en  $\mathcal{T} = [t_0, \infty)$  (véase la definición 1).

Una función aleatoria de Márkov interrumpida siempre puede ser transformada en una función ininterrumpida. Con este fin extendemos el espacio  $X$ , añadiéndole cierto punto «impropios» a  $X$ : Hagamos  $X^{(a)} = X \cup \{a\}$ . Designaremos mediante  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos del conjunto  $X^{(a)}$ , compuesta por los conjuntos  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y los del tipo  $\Gamma \cup \{a\}$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .

Ahora, para  $\omega \in \{ \zeta(\omega) < +\infty \}$  hagamos  $\xi^{(a)}(t, \omega) = a$ , cuando  $t \geq \zeta$ . Para  $t \in [t_0, \zeta(\omega))$  hagamos  $\xi^{(a)}(t, \omega) = \xi(t, \omega)$ . Por fin, definamos la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t^{(a)}$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ , como una  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos  $\Omega$  en la que están contenidas todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_s$  cuando  $s \ll t$ . En este caso las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^{(a)}$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , forman un flujo y el proceso  $\{ \xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T} \}$  está subordinado a este flujo. Es fácil de comprobar que  $\{ \xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T} \}$  es una función aleatoria de Márkov respecto del flujo  $\{ \mathfrak{F}_t^{(a)}, t \in \mathcal{T} \}$  en el sentido de la defini-

ción  $\Gamma$  (es decir, no ininterrumpida). La probabilidad de paso  $\hat{P}(s, x, t, \Gamma)$  de esta función aleatoria es

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = \begin{cases} P(s, x, t, \Gamma \cap X) + \chi_{\Gamma}(a) [1 - P(s, x, t, X)] & \text{para } x \neq a; \\ \chi_{\Gamma}(a) & \text{para } x = a, \end{cases}$$

donde  $P(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso de la función aleatoria inicial (interrumpida). Para el proceso  $\{\xi^{(a)}(t), t \in \mathcal{T}\}$  el estado  $a$  es absorbente. Esto significa que al alcanzar este estado, el proceso nunca saldrá de él. Por supuesto, éste no es el único procedimiento que tiene por objeto convertir una función aleatoria de Márkov interrumpida en una función ininterrumpida.

## 14.2. Procesos de Márkov. Definición y propiedades fundamentales

14.2.1. Definición. Como ya se ha indicado en el cap. 2, al estudiar la propiedad de Márkov de los procesos aleatorios resulta cómodo no fijar la distribución inicial del proceso (como también el momento inicial de tiempo), sino que considerar toda una familia de funciones aleatorias de Márkov que tienen comienzo en un momento de tiempo arbitrario en un punto arbitrario del espacio fásico. Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades esto significa que en el espacio probabilístico ya se tiene no una sola medida probabilística fijada, sino una familia de las medidas  $P_{sx}$  que dependen de la variable de tiempo y la fásica y están entrelazadas por medio de la propiedad de Márkov. En este caso  $P_{sx}$  se interpreta como la probabilidad condicional de cierto suceso que puede efectuarse después del momento de tiempo  $s$ , a condición de que  $\xi(s) = x$ . Tal objeto ya se determina unívocamente (con la exactitud salvo la equivalencia estocástica) mediante la probabilidad de paso y, por consiguiente, es más cómodo en el estudio de la propiedad de Márkov que la noción de función aleatoria de Márkov. Pusemos a las definiciones precisas. Supondremos que  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  y al principio definiremos el proceso de Márkov ininterrumpido.

Supongamos que tenemos:

a) un espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , llamado espacio de sucesos elementales;

b) una familia de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^s$ ,  $0 \leq s \leq t \leq \infty$ , tal que  $\mathfrak{F}_t^s \subset \mathfrak{F}_{t_1}^{s_1} \subset \mathfrak{A}$  para  $0 \leq s_1 \leq s \leq t \leq t_1 \leq \infty$ ; convengamos en escribir  $\mathfrak{F}_t$  en lugar de  $\mathfrak{F}_t^0$  y  $\mathfrak{F}_\infty^s$  en lugar de  $\mathfrak{F}_\infty^s$ ;

c) una función de dos variables  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\omega \in \Omega$ , con valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  tal que para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$  la aplicación  $\xi(t, \cdot)$  del espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}_t)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  es medible; se supone que en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  están contenidos todos los conjuntos de un solo punto;

d) una familia de medidas probabilísticas  $\{P_{sx}, s \in \mathcal{T}, x \in X\}$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_\infty^s$ .

**Definición 1.** Un sistema de objetos a)—d) se llamará proceso de Márkov (ininterrumpido), si están cumplidas las condiciones:

1) para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , la función

$$P(s, x, t, \Gamma) = P_{sx}(\xi(t) \in \Gamma)$$

es una función de  $x$   $\mathfrak{B}$ -medible, con la particularidad de que  $P(s, x, s, \Gamma) = \chi_{\Gamma}(x)$ , donde  $\chi_{\Gamma}(x)$  es el indicador del conjunto  $\Gamma$ ;

2) para cualesquiera  $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , con la  $P_{sx}$ -probabilidad 1, se cumple la correlación

$$P_{sx}(\xi(t_2) \in \Gamma / \mathfrak{F}_{t_1}^s) = P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma).$$

El proceso de Márkov se denota  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ . El espacio  $(X, \mathfrak{B})$  se denomina espacio físico del proceso, la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso. Observemos que  $P(s, x, t, X) = 1$  y, según se deduce de la condición 2),

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma)$$

para cualesquiera  $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , es decir, la probabilidad de paso satisface la ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Sea  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  un proceso de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$ . Designemos mediante  $\mathfrak{M}_t^s$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos en la que están contenidos todos los sucesos del tipo  $\{\xi(u) \in \Gamma\}$  para  $u \in [s, t]$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , y mediante  $\mathfrak{N}^s$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos que contiene todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{M}_t^s$  para  $t \geq s$ ; como siempre, en lugar de  $\mathfrak{M}_t^s$  escribiremos  $\mathfrak{M}_t$ . Es evidente que  $\mathfrak{M}_t^s \subseteq \mathfrak{F}_t^s$ ,  $\mathfrak{N}^s \subseteq \mathfrak{F}^s$  y el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{M}_t^s, P_{sx})$  es también de Márkov.

Las siguientes propiedades del proceso de Márkov constituyen sencillos corolarios de la definición 1:

1) para todo  $A \in \mathfrak{N}^s$  la función  $P_{sx}(A)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible como función de  $x$ ;

2) para toda magnitud aleatoria  $\eta$ , acotada (no negativa) y  $\mathfrak{N}^s$ -medible, la función  $M_{sx}\eta$  es  $\mathfrak{B}$ -medible como función de  $x$ ;

3) para todo  $A \in \mathfrak{N}^t$  con la  $P_{sx}$ -probabilidad 1 se verifica

$$P_{sx}(A / \mathfrak{F}_t^s) = P_{\xi(t)}(A), \quad s \leq t;$$

4) para toda magnitud aleatoria acotada  $\mathfrak{N}^t$ -medible  $\eta$  con la  $P_{sx}$ -probabilidad 1 se verifica

$$M_{sx}(\eta / \mathfrak{F}_t^s) = M_{\xi(t)}(\eta), \quad s \leq t;$$

5) Si  $A \in \mathfrak{F}_t^s$ ,  $B \in \mathfrak{N}^t$ , entonces

$$P_{sx}(A \cap B) = \int_A P_{\xi(t)}(B) P_{sx}(d\omega), \quad s \leq t.$$

**14.2.2. Dilatación de las  $\sigma$ -álgebras fundamentales.** Sea  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  un proceso de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$ . Resulta que es posible (y con frecuencia suele ser útil) cierta dilatación de las  $\sigma$ -álgebras fundamentales que figuran en la definición de un proceso quedando válidas las propiedades de Márkov. Tal dilatación



es conveniente a causa de que las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{R}_t^s$ ,  $\mathfrak{R}^s$  están privadas de varios sucesos, importantes desde el punto de vista de la teoría de probabilidades. La dilatación mencionada consiste en la operación de completar las  $\sigma$ -álgebras según los sistemas de medidas.

Sea  $\mu$  una medida finita en  $(X, \mathfrak{B})$ . Designemos mediante  $\mathfrak{B}_\mu$  la completación de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  según la medida  $\mu$ . Esto significa que  $A \in \mathfrak{B}_\mu$ , si existen los conjuntos  $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}$  tales que  $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$  y  $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ . Denotemos con  $\mathfrak{B}^*$  una  $\sigma$ -álgebra que es la intersección de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{B}_\mu$  según todas las medidas finitas  $\mu$  prefijadas en  $\mathfrak{B}$ . Los conjuntos de  $\mathfrak{B}^*$  se llaman conjuntos medibles universales generados por la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$ . Luego, completamos las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{B}^s$  según la familia de medidas  $\{P_{ux}, u \leq s, x \in X\}$  y designemos esta completación por  $\overline{\mathfrak{B}}^s$ . Esto significa que  $A \in \overline{\mathfrak{B}}^s$ , si para cualesquiera  $u \leq s, x \in X$ , existen los conjuntos  $A_1, A_2 \in \mathfrak{B}^s$  tales que  $P_{ux}(A_1) = P_{ux}(A_2)$  y  $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ . Supongamos que  $\overline{\mathfrak{B}}_t^s$  simboliza una  $\sigma$ -álgebra en la cual están contenidos todos los sucesos  $A \in \overline{\mathfrak{B}}^s$  tales que para cualesquiera  $u \leq s, x \in X$  existe un suceso  $A_1 \in \overline{\mathfrak{B}}_t^s$ , para el cual  $P_{ux}(A \Delta A_1) = 0$ , donde  $A \Delta A_1$  designa la diferencia simétrica de los conjuntos  $A$  y  $A_1$ . Por analogía, sea  $\overline{\mathfrak{B}}^s$  una completación de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{R}^s$  según la familia de medidas  $P_{u\mu}$ , donde  $u \leq s$  y  $\mu$  es una medida probabilística arbitraria en  $(X, \mathfrak{B})$ , mientras que  $P_{u\mu}$  se determina por la fórmula

$$P_{u\mu}(A) = \int \mu(dx) P_{ux}(A), \quad A \in \mathfrak{R}^s.$$

Por fin, designemos mediante  $\overline{\mathfrak{R}}_t^s$  la  $\sigma$ -álgebra de los sucesos  $A \in \overline{\mathfrak{R}}^s$  tales que para cualesquiera  $u \leq s$  y la medida probabilística  $\mu$  en  $(X, \mathfrak{B})$  existe un suceso  $A_1 \in \overline{\mathfrak{R}}_t^s$ , para el cual  $P_{u\mu}(A \Delta A_1) = 0$ .

Se puede demostrar que para toda función aleatoria acotada  $\overline{\mathfrak{R}}^s$ -medible  $\eta$  la función  $M_{sx}\eta$  es  $\mathfrak{B}^*$ -medible como función de  $x$  y que la aplicación  $\xi(t, \cdot)$  del espacio  $(\Omega, \overline{\mathfrak{B}}_t^s)$  (y, consecuentemente, del espacio  $(\Omega, \overline{\mathfrak{B}}_t^s)$ , dado que  $\overline{\mathfrak{R}}_t^s \subset \overline{\mathfrak{B}}_t^s$ ) en el espacio  $(X, \mathfrak{B}^*)$  es medible para  $s \leq t$  cualesquiera. Además, para cualesquiera  $s \leq t$  y  $A \in \overline{\mathfrak{R}}_t^s$  con la  $P_{sx}$ -probabilidad 1 queda cumplida la correlación

$$P_{sx}(A/\overline{\mathfrak{B}}_t^s) = P_{\xi(t)}(A).$$

Así pues, el proceso  $(\xi(t), \overline{\mathfrak{B}}_t^s, P_{sx})$  es de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B}^*)$ . Por eso, siempre, cuando sea cómodo, podemos considerar que  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^*$ ,  $\overline{\mathfrak{B}}_t^s = \overline{\mathfrak{B}}_t^s$ ,  $\overline{\mathfrak{R}}_t^s = \mathfrak{R}_t^s$ .

**14.2.3. Condiciones de regularidad.** Sea  $(\xi(t), \overline{\mathfrak{B}}_t^s, P_{sx})$  un proceso de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con el espacio de sucesos elementales  $(\Omega, \mathfrak{R})$ . Fijemos cierto  $s_0 \geq 0$  y sea  $\mu$  una medida probabilística en  $(X, \mathfrak{B})$ . Consideremos una función aleatoria  $\{\xi(t), t \geq s_0\}$  subordinada al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathfrak{R}_t^{s_0}, t \geq s_0)$  y definida en

el espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{R}^{\otimes 0}, P_{s_0\mu})$ , donde

$$P_{s_0\mu}(A) = \int_{\tilde{X}} P_{s_0x}(A) \mu(dx), \quad A \in \mathfrak{R}^{\otimes 0}.$$

Es fácil ver que esta función aleatoria es de Márkov, definida para  $t \geq s_0$ , con la distribución inicial  $\mu$  y la probabilidad de paso  $P(t_1, x, t_2, \Gamma)$  que coincide con la probabilidad de paso del proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ . De este modo, al disponer de un proceso de Márkov, podemos construir una infinidad de funciones aleatorias de Márkov escogiendo el origen de referencia del tiempo y prefijando la distribución inicial. Dos procesos de Márkov definidos en un mismo espacio físico (quizás, en espacios probabilísticos diferentes), se llamarán equivalentes, si las funciones aleatorias de Márkov, construidas según dichos procesos, con un mismo origen de referencia y una misma distribución inicial son equivalentes estocásticas (es decir, cuentan con iguales distribuciones de dimensiones finitas). De aquí se deduce que los procesos de Márkov son equivalentes, cuando y sólo cuando, sus probabilidades de paso coinciden. De este modo, el proceso de Márkov se determina unívocamente por su probabilidad de paso con la exactitud salvo la equivalencia.

Examinemos ahora la cuestión de si existe siempre un proceso de Márkov con la probabilidad de paso prefijada. La respuesta nos la da el teorema que sigue.

**Teorema 1.** Sean  $X$  un espacio separable métrico completo y  $\mathfrak{B}$ , la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos  $X$ ,  $\mathcal{F} = [0, \infty)$ . Supongamos que está definida una función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , que satisface las condiciones:

- 1) para  $s, t, \Gamma$  fijados  $P(s, x, t, \Gamma)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible;
- 2) para  $s, t, x$  fijados  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una medida probabilística en  $(X, \mathfrak{B})$ ;
- 3) para todos los  $x \in X$ ,  $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 < \infty$ ,

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma).$$

En este caso existe un proceso de Márkov (ininterrumpido) en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

Está claro que tanto en la definición del proceso de Márkov, como en el teorema enunciado el conjunto  $\mathcal{F}$  puede ser un segmento finito o incluso cierto subconjunto del conjunto  $[0, \infty)$ .

Parece natural preguntar, ¿en qué condiciones para la probabilidad de paso existe, entre todos los procesos equivalentes de Márkov, un proceso cuyas funciones muestrales o las trayectorias del cual (es decir, las funciones  $\xi(t, \omega)$  para  $\omega$  fijado como función de  $t$ ) posean una u otra propiedad de regularidad, digamos, sean continuas, tengan límites a la izquierda, etc.? Antes de dar la respuesta a esta pregunta aduzcamos algunas definiciones.

**Definición 2.** Un proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  ( $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos) se llama continuo (continuo a la derecha), si para cualesquiera  $s \geq 0$  y  $x \in X$

sus trayectorias son continuas (continuas a la derecha) con la  $P_{s,x}$ -probabilidad 1, cualquiera que sea  $t \geq s$ .

**Definición 3.** Se dice que el proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  no tiene discontinuidades de segunda especie, si para cualesquiera  $s \geq 0$  y  $x \in X$  sus trayectorias no tienen discontinuidades de segunda especie con la  $P_{s,x}$ -probabilidad 1, cualquiera que sea  $t \geq s$ .

Designemos mediante  $U_\varepsilon(x)$  una bola en  $X$  de radio  $\varepsilon$  con el centro en el punto  $x$  y hagamos  $\bar{U}_\varepsilon(x) = X \setminus U_\varepsilon(x)$ .

**Teorema 2.** Supongamos que  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  es un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ , donde  $X$  es un espacio métrico separable, localmente compacto y completo. Sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos en  $X$  con la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

1) Si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{0 \leq s \leq t \leq s + \delta} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

entonces el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  será equivalente a un proceso de Márkov privado de las discontinuidades de segunda especie y continuo a la derecha.

2) Si

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} \sup_{0 \leq s \leq t \leq t + \delta} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  será equivalente a un proceso de Márkov continuo.

**14.2.4. Propiedad rigurosa de Márkov.** Sea  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ . Una magnitud aleatoria  $\tau = \tau(\omega)$  con valores en  $[s, \infty)$  se llamará momento de Márkov respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$  ( $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ,  $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ), si para todo  $t \geq s$  se cumple la condición  $(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{F}_t^s$  ( $(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{R}_t^s$ ,  $(\omega: \tau(\omega) < t) \in \mathfrak{R}_t^s$ ). Los momentos de Márkov se llaman, a veces, magnitudes independientes del futuro, puesto que la condición  $(\tau < t) \in \mathfrak{F}_t^s$  muestra de manera evidente que la aparición o no aparición del suceso  $(\tau < t)$  sólo depende de los fenómenos que se observan durante el tiempo a partir del momento  $s$  hasta el momento  $t$ .

A todo momento de Márkov del tiempo  $\tau$  respecto al flujo  $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$  ( $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ,  $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ ) se le puede poner en correspondencia la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{R}_\tau^s$  ( $\mathfrak{R}_\tau^s$ ,  $\mathfrak{R}_\tau^s$ ), determinada como una totalidad de todas aquellas  $A \in \mathfrak{R}^s$  ( $A \in \mathfrak{R}^s$ ,  $A \in \mathfrak{R}^s$ ), para las cuales  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{R}_t^s$  con todo  $t \in [s, \infty)$  ( $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{R}_t^s$ ,  $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathfrak{R}_t^s$ ).

Es evidente que la magnitud  $\tau$  es  $\mathfrak{R}_\tau^s$ -medible y si  $\tau_1$  y  $\tau_2$  son dos momentos de Márkov respecto al flujo  $\{\mathfrak{R}_t^s, t \geq s\}$ , para los cuales  $(\tau_1 \leq \tau_2)$ , entonces  $\mathfrak{R}_{\tau_1}^s \subset \mathfrak{R}_{\tau_2}^s$ .

A menudo suele ser necesario considerar el valor de una función aleatoria  $\xi(t)$  en el momento aleatorio de tiempo  $\tau$ . Para que de

resulta se obtenga una magnitud aleatoria, hace falta que las funciones  $\xi(t)$  (como funciones de  $t$ ) sean medibles. Más aún, si nuestro deseo es que  $\xi(\tau)$  sea  $\mathfrak{F}_\tau^s$ -medible, se debe exigir que el proceso  $\xi(t)$  posea la tal llamada medibilidad progresiva.

**Definición 4.** Un proceso de Markov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  se llama progresivo medible, si para cualesquiera  $s, t$  ( $0 \leq s < t < \infty$ ) la aplicación  $\xi(u, \omega)$  del espacio  $(\{s, t\} \times \Omega, \mathfrak{F}_t^s \times \mathfrak{F}_t^s)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  es medible. Aquí,  $\mathfrak{F}_t^s$  es la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos del segmento  $[s, t]$ .

Observemos que si el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  es continuo a la derecha, es progresivo medible. Si un proceso de Markov es progresivo medible y  $\tau$  es un momento de Markov finito respecto del flujo  $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$ , entonces el elemento aleatorio  $\xi(\tau) = \xi(\tau(\omega), \omega)$  con valores en  $(X, \mathfrak{B})$  es  $\mathfrak{F}_\tau^s$ -medible. Más aún, si  $\{\tau_t, t \geq s\}$  es una familia de momentos de Markov finitos respecto del flujo  $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$ , mientras que  $\tau_t$ , para  $\omega$  fijado, representa en sí una función de  $t$ , monótona no decreciente y continua a la derecha, entonces el proceso aleatorio  $\eta(t) = \xi(\tau_t(\omega), \omega)$  será progresivo medible respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t^s, t \geq s\}$ .

He aquí la definición de un proceso rigurosamente de Markov.

**Definición 5.** Un proceso de Markov progresivo medible  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  se llama rigurosamente de Markov, si se cumplen las siguientes condiciones:

1) para  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  fijado la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  del proceso es una función de  $(s, x, t) \in \mathfrak{F}^0 \times \mathfrak{B} \times \mathfrak{F}^0$ -medible en el conjunto  $0 \leq s \leq t < \infty, x \in X$ ; aquí,  $\mathfrak{F}^0$  es la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos del semieje  $[0, \infty)$ ;

2) para cualesquiera  $s \geq 0, t \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$  y un momento de Markov arbitrario  $\tau$  respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_u^s, u \geq s\}$  se verifica la correlación

$$P_{sx}(\xi(t + \tau) \in \Gamma / \mathfrak{F}_\tau^s) = P(\tau, \xi(\tau), t + \tau, \Gamma)$$

casi por cierto en el conjunto  $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \infty\}$  respecto de la medida  $P_{sx}$ .

Hemos de notar que en el caso particular, cuando  $\tau(\omega) \equiv t_0$ , es decir, cuando  $\tau(\omega)$  no es aleatorio, la condición 2) de la definición 5 coincide con la condición 2) de la definición 1. De este modo, el concepto de proceso rigurosamente de Markov destaca en la totalidad de todos los procesos de Markov aquellos que poseen la propiedad de Markov también en ciertos momentos aleatorios de tiempo, a saber, en los momentos de Markov.

Si  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$  es un proceso rigurosamente de Markov, y la función  $f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1, x_2, \dots, x_n \in X$  es acotada,  $\mathfrak{B}^n$ -medible y real, entonces para todo momento de Markov  $\tau$  y para cualesquiera  $t_1, t_2, \dots, t_n$  positivos queda cumplida la correlación

$$\begin{aligned} M_{sx} \{f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n)) / \mathfrak{F}_\tau^s\} = \\ = M_{\tau, \xi(\tau)} \{f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n))\} \end{aligned}$$

casi por cierto en el conjunto  $\Omega_\tau = \{\tau < \infty\}$  respecto de la medida  $P_{s,x}$ . En este caso el segundo miembro se debe entender así: hagamos  $h(s, x, t_1, t_2, \dots, t_n) = M_{s,x} f(\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n))$ , donde  $x \in X$ ,  $s \leq \min(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Entonces

$$M_{\tau, \xi(\tau)} f(\xi(\tau + t_1), \xi(\tau + t_2), \dots, \xi(\tau + t_n)) = h(\tau, \xi(\tau), \tau + t_1, \tau + t_2, \dots, \tau + t_n).$$

Formulemos ahora el criterio de la propiedad rigurosa del proceso de Márkov. Con este objeto definamos primeramente el operador  $R_\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , que actúa sobre la función acotada real medible  $f(t, x)$ ,  $t \in [0, \infty)$ ,  $x \in X$ , rigiéndonos por la fórmula

$$(R_\lambda f)(s, x) = M_{s,x} \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(s+t, \xi(s+t)) dt.$$

Se puede mostrar que si la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  es, para  $\Gamma$  fijado, una función medible de las variables  $(s, x, t)$ , entonces la función  $(R_\lambda f)(s, x)$  es medible según un par de variables  $s, x$  y, además, acotada, cualesquiera que sean  $\lambda > 0$  y la función medible acotada  $f(s, x)$ .

**Teorema 3.** Sean  $X$  un espacio métrico y  $\mathfrak{A}$ , la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles universales del espacio  $X$ . Supongamos que está dado un proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{A})$  que satisface las siguientes condiciones:

a) para  $t$  y  $\Gamma$  fijados, la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  es medible según un par de variables  $(s, x)$ ;

b) para cualesquiera  $s \geq 0$ ,  $x \in X$ , las trayectorias del proceso (es decir, las funciones  $\xi(t)$  como funciones de  $t$ ,  $t \geq s$ ) son continuas a la derecha casi por cierto respecto de  $P_{s,x}$ ;

c) para cualesquiera  $s \geq 0$ ,  $x \in X$ , y para toda función continua acotada  $f(x)$ ,  $x \in X$ , casi por cierto respecto de la medida  $P_{s,x}$ , las trayectorias del proceso  $(R_\lambda f)(t, \xi(t))$ ,  $t \geq s$ , son continuas a la derecha.

En este caso, el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_{t+}^s, P_{s,x})$  es riguroso de Márkov. (Aquí,  $\mathfrak{F}_{t+}^s = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathfrak{F}_{t+\epsilon}^s$ ).

**14.2.5. Procesos estándar.** La definición que sigue destaca una clase de procesos de Márkov que poseen toda una serie de buenas propiedades.

**Definición 6.** Un proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{A})$ , donde  $X$  es un espacio métrico compacto local y  $\mathfrak{A}$ , la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos del espacio  $X$ , se denomina estándar, si se cumplen las siguientes condiciones:

1)  $\mathfrak{F}_t^s = \mathfrak{F}_{t+}^s = \mathfrak{F}_t^s$  para cualesquiera  $s, t$ ,  $(0 \leq s \leq t < \infty)$ ;

2) el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  es continuo a la derecha y tiene límites a la izquierda (véase la definición 2);

3) el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  es riguroso de Márkov;

4) el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t^s, P_{s,x})$  es casi continuo a la izquierda, lo que significa que para cualesquiera  $s \geq 0$ ,  $x \in X$ , y toda sucesión no decreciente de momentos de Márkov  $\tau_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , respecto del flujo  $(\mathfrak{F}_t^s, t \geq s)$  tiene lugar la correlación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\tau_n) = \xi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n)$ .

casi por cierto en el conjunto  $\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < \infty\}$  respecto de la medida  $P_{s,x}$ .

Ahora indiquemos las condiciones para la probabilidad de paso en las cuales se puede garantizar la existencia de un proceso estándar con la probabilidad de paso prefijada. Previamente demos a conocer la definición de la probabilidad de paso de Feller.

Sean  $X$  un espacio métrico separable localmente compacto y  $\mathfrak{A}$ , la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos de  $X$ , mientras que  $P(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso en  $(X, \mathfrak{A})$ , es decir, una función satisficente las condiciones del teorema 1. Designemos mediante  $C_0(X)$  una totalidad de todas las funciones continuas reales que están definidas en  $X$  y que tienden a cero, cuando  $x$  sale de todos los compactos contenidos en  $X$ . Esto significa que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un compacto  $K_\varepsilon \subset X$  tal que  $|f(x)| < \varepsilon$  para todos los  $x \in X \setminus K_\varepsilon$ . Ha de ser notado que si  $X$  es un compacto, entonces  $C_0(X)$  coincide con el conjunto de todas las funciones continuas de valores reales definidas para  $x \in X$ .

**Definición 7.** Una probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  es de Feller, si quedan cumplidas las siguientes condiciones:

1) para cualesquiera  $s, t$  ( $0 \leq s < t < \infty$ ) y  $f \in C_0(X)$  la función

$$(T_{st}f)(x) = \int_X f(y) P(s, x, t, dy)$$

es continua por la totalidad de variables  $(s, t, x)$ ,  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in X$ ;

2) para toda función  $f \in C_0(X)$

$$\lim_{t \downarrow s} \sup_{x \in X} |(T_{st}f)(x) - f(x)| = 0.$$

**Teorema 4.** Si  $P(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso de Feller en un espacio métrico separable localmente compacto  $(X, \mathfrak{A})$ , entonces existe un proceso de Márkov estándar con la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

**14.2.6. Procesos interrumpidos.** Aduzcamos, ahora, la definición del proceso de Márkov que se interrumpe. Sean:

a) un espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , llamado espacio de los sucesos elementales;

b) una magnitud aleatoria  $\zeta(\omega)$  que toma valores en el segmento dilatado  $[0, \infty)$ ;

c) para todos los  $s, t$ ,  $0 \leq s \leq t$ , las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^s \subset \mathfrak{A}$  en el espacio  $\Omega_t = \{\omega: \zeta(\omega) > t\}$  son tales que si  $s \leq t \leq u$  y  $A \in \mathfrak{F}_t^s$ , entonces  $A \cap \Omega_u \in \mathfrak{F}_u^s$ ;

d) una función de dos variables  $\xi(t) = \xi(t, \omega)$ ,  $t \in [0, \zeta(\omega))$ ,  $\omega \in \Omega$ , con valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ , tal que para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$  la aplicación  $\xi(t, \cdot)$  del espacio  $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t^s)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  es medible; se supone que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene todos los conjuntos de un solo punto;

e) para cada  $s \geq 0$ ,  $x \in X$  las medidas probabilísticas  $P_{s,x}$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_s^s = \mathfrak{F}_s^s$ .

**Definición 8.** El sistema de objetos a) — e) se llamará proceso (que se interrumpe) de Márkov, siempre que están cumplidas las siguientes condiciones:

1) para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , la función

$$P(s, x, t, \Gamma) = P_{sx}(\xi(t) \in \Gamma)$$

es una función de  $x \in \mathfrak{B}$ -medible, con la particularidad de que  $P(s, x, s, X \setminus \{x\}) = 0$ ;

2) para cualesquiera  $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se verifica la correlación

$$P_{sx}(\xi(t_2) \in \Gamma / \mathfrak{B}_{t_1}^x) = P(t_1, \xi(t_1), t_2, \Gamma)$$

cast por cierto en el conjunto  $\Omega_{t_1}$  respecto de la medida  $P_{sx}$  (c.p.c.  $\Omega_{t_1}, P_{sx}$ ).

El momento de tiempo  $\xi$  se denomina momento de interrupción. El proceso de Márkov que se interrumpe lo designaremos  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{B}_t^x, P_{sx})$ . Es evidente que si  $\xi(\omega) = +\infty$ , entonces la definición 8 se transforma en la definición 1 para un proceso de Márkov que no se interrumpe.

La función  $P(s, x, t, \Gamma)$ , definida en la condición 1) de la definición 8, se llama probabilidad de paso del proceso de Márkov. De la condición 2) se deduce que esta función satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov. Se debe tener en cuenta que  $P(s, x, t, X) \leq 1$  y la magnitud  $1 - P(s, x, t, X)$  representa en sí la probabilidad de que, al salir del punto  $x$  en el momento de tiempo  $s$ , el proceso se interrumpe para el momento de tiempo  $t$ .

La probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  se denomina normal, si para cualesquiera  $s \geq 0$  y  $x \in X$  se verifica  $P(s, x, s+, X) = \lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, X) = 1$ . El hecho de que el límite citado exista, proviene de la desigualdad ( $s \leq t_1 < t_2$ )

$$P(s, x, t_2, X) = \int_X P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, X) \leq P(s, x, t_1, X),$$

que significa que  $P(s, x, t, X)$  no crece de modo monótono como función de  $t$ , cuando  $t \geq s$ .

El proceso de Márkov con la probabilidad de paso normal se denomina normal.

Múltiples resultados obtenidos para los procesos de Márkov que no se interrumpen pueden ser aplicados con ciertas reservas a los procesos que se interrumpen. Por ejemplo, de análogo del teorema 1 sirve el

**Teorema 1'.** Sean  $X$  un espacio métrico completo y  $\mathfrak{B}$ , la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $X$ . Supongamos que la función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , satisface las condiciones 1) y 3) del teorema 1 y la condición 2') para  $s, x, t$  fijados  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una medida (no forzosamente probabilística) en  $(X, \mathfrak{B})$ , con la particularidad de que  $P(s, x, t, \Gamma) \leq 1$  y  $P(s, x, s+, X) = 1$ .

En este caso, en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  existe un proceso de Márkov normal con la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

Los procesos que tienen una misma probabilidad de paso se denominan equivalentes. Si construimos, según los procesos equivalentes, unas funciones aleatorias de Márkov (que se interrumpen), igual que en el p. 14.2.3, éstas serán equivalentes estocásticas (es decir, tendrán distribuciones de iguales dimensiones finitas)

La definición del proceso riguroso de Márkov interrumpido coincide con la definición 5, con la única modificación consistente en que la correlación en la condición 2) debe cumplirse casi por cierto en el conjunto  $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \xi(\omega)\}$  respecto de la medida  $P_{s,x}$ .

La definición del proceso de Márkov interrumpido estándar es enteramente análoga a la definición 6. Conviene tener en cuenta que como las funciones  $\xi(t)$  están definidas solamente en el intervalo semabierto  $[0, \xi)$ , entonces la continuidad del proceso a la derecha, como también la existencia de límites a la izquierda, se refieren a los puntos  $t \in [0, \xi)$ .

Análogamente, en la definición deasicontinuidad a la izquierda la correlación  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\tau_n) = \xi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n)$  debe verificarse en el conjunto  $\{\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n < \xi(\omega)\}$  casi por cierto respecto de  $P_{s,x}$ .

El teorema que sigue ofrece las condiciones de existencia de un proceso estándar que se interrumpe.

**Teorema 5.** Sean  $X$  un espacio métrico separable completo y localmente compacto y  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos borelianos de  $X$ , mientras que  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una probabilidad de paso normal (es decir, una función que satisface las condiciones del teorema 1'). Supongamos cumplidas las condiciones:

1) cualquiera que sea la función acotada continua  $f(x)$ ,  $x \in X$ , con valores reales, la función

$$(T_{st}f)(x) = \int_X P(s, x, t, dy) f(y), \quad s \leq t, x \in X,$$

posee la siguiente propiedad de continuidad:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ s \downarrow s_0}} (T_{st}f)(x) = (T_{s_0 t}f)(x_0);$$

$$2) \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{0 \leq s \leq t \leq s + \delta \\ x \in X}} P(s, x, t, \bar{U}_\varepsilon(x)) = 0,$$

donde  $\bar{U}_\varepsilon(x)$  es una bola en  $X$  con el centro en el punto  $x$  de radio  $\varepsilon$ , y  $\bar{U}_\varepsilon(x) = X \setminus U_\varepsilon(x)$ .

En este caso existe un proceso de Márkov estándar normal con la dprobabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

### 14.3. Funcionales multiplicativas de los procesos de Márkov

**14.3.1. Definición y propiedades.** Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{B}_t^0, P_{s,x})$  un proceso de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$ .

**Definición 1.** Una familia de magnitudes aleatorias de valores reales  $\alpha_t^s = \alpha_t^s(\omega)$ ,  $0 \leq s \leq t$ ,  $\omega \in \Omega_t$ , se denomina funcional multiplicativa del proceso de Márkov, si se cumplen las siguientes condiciones:

a) la magnitud aleatoria  $\alpha_t^s$  es  $\mathfrak{B}_t^s$ -medible;

b) para cualesquiera  $x \in X$ ,  $0 \leq s \leq t \leq u$  casi por cierto en el conjunto  $\Omega_u$  queda cumplida, respecto a la medida  $P_{s,x}$ , la igualdad

$$\alpha_t^s \alpha_u^t = \alpha_u^s;$$

c)  $0 \leq \alpha_t^s \leq 1$  para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$ ,  $\omega \in \Omega_t$ .



Una funcional multiplicativa se llama continua a la derecha, si para cualesquiera  $t \geq s \geq 0$ ,  $x \in X$ , casi por cierto en el conjunto  $\Omega_t$  se verifica, respecto de  $P_{sx} \lim_{t_n \downarrow t} \alpha_{t_n}^s = \alpha_t^s$ .

Demos un ejemplo de una funcional multiplicativa. Supongamos que un proceso de Márkov es progresivo medible respecto de las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{R}_t^s$  (esto significa que en la definición 4 del p. 14.2 en lugar de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{R}_t^s$  se debe poner la  $\tilde{\mathfrak{R}}_t^s$  y en lugar de  $\Omega$ ,  $\Omega_t$ ). Sea  $v(s, x)$  una función no negativa, medible según un par de variables  $(s, x) \in [0, \infty) \times X$ . Hagamos

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}, \quad 0 \leq s \leq t, \quad \omega \in \Omega_t.$$

Si la integral en esta fórmula es finita con cualesquiera  $0 \leq s \leq t < \zeta(\omega)$ , entonces  $\alpha_t^s$  es una funcional multiplicativa del proceso  $\xi(t)$ . Se llama funcional multiplicativa de tipo integral. Indiquemos que tal funcional es continua para todo  $t \geq s$ ,  $\omega \in \Omega_t$ .

Sean  $\alpha_t^s$  y  $\beta_t^s$  dos funcionales multiplicativas del proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$ . Se denominan estocásticas equivalentes, si para cualesquiera  $s \geq 0$ ,  $x \in X$ ,  $t > s$ , la medida  $P_{sx}(\alpha_t^s \neq \beta_t^s) = 0$ .

De la definición se deduce que si  $\alpha_t^s$  es una funcional multiplicativa, entonces  $\alpha_s^s = (\alpha_s^s)^2$ , de suerte que  $\alpha_s^s$  puede tomar solamente dos valores: 0 ó 1. Más aún,  $P_{sx}(\alpha_s^s = 1) = 0$  ó 1, lo que se desprende de la siguiente ley de 0 ó 1.

**Ley de 0 ó 1.** Si es que  $A \in \mathfrak{R}_s^s$ , entonces  $P_{sx}(A) = 0$  ó 1.

Para  $s$  dado designemos mediante  $X_\alpha^s$  una totalidad de todos los  $x \in X$ , para los cuales  $P_{sx}(\alpha_s^s = 1)$ . Evidentemente,  $X_\alpha^s \in \mathfrak{B}$ . Hagamos

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_\Gamma(\xi(t)) \alpha_t^s,$$

donde  $0 \leq s \leq t < \infty$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ ,  $\chi_\Gamma(x)$  es el indicador del conjunto  $\Gamma$ . Es fácil ver que para  $s, x, t$  fijados la función  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  es una medida en  $\mathfrak{B}$  y para  $s, t, \Gamma$  fijados esta función es  $\mathfrak{B}$ -medible. Además,  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  satisface la condición de Chapman—Kolmogórov:

$$\tilde{P}(s, x, t_2, \Gamma) = \int_X \tilde{P}(s, x, t_1, dy) \tilde{P}(t_1, y, t_2, \Gamma),$$

$$0 \leq s \leq t_1 \leq t_2, \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

En este caso

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) \leq P(s, x, t, \Gamma), \quad (3.1)$$

donde  $P(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$ . Si este proceso es normal, entonces

$$\tilde{P}(s, x, s, \Gamma) = \chi_{\Gamma \cap X_\alpha^s}(x).$$

Así pues, toda funcional multiplicativa del proceso de Márkov engendra una probabilidad de paso  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  que satisface la desigualdad (3.1). Con ello, dos funcionales multiplicativas son estocásticas equivalentes, cuando y sólo cuando, engendran una misma probabilidad de paso.

El teorema que sigue muestra que bajo ciertas condiciones toda probabilidad de paso que satisfaca la desigualdad (3.1) es engendada por cierta funcional.

**Teorema 1.** *Supongamos que se dan un proceso de Márkov normal  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  y una probabilidad de paso  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  que satisface la desigualdad (3.1). Supongamos cumplidas las condiciones:*

1) *la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  se genera por cierta familia numerable de subconjuntos de  $X$ ;*

2) *en el semieje  $[0, \infty)$  existe un subconjunto numerable siempre denso  $J$  tal que las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{R}_t^s$  se generan por los sucesos del tipo  $\{\xi(u) \in \Gamma\}$  para  $u \in J \cap [s, t]$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .*

*En estas condiciones existe una funcional multiplicativa  $\alpha_t^s$  del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$  tal que*

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^s.$$

Con ello, si el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathfrak{R}_t^s, t \geq s)$  es continuo a la derecha (lo que significa que  $\mathfrak{R}_{t+}^s = \mathfrak{R}_t^s$ ) y la función  $\tilde{P}(s, x, t, X)$  es también continua a la derecha respecto de  $t$  en el punto  $t = s$  para todos los  $s$  y  $x$ , entonces la funcional multiplicativa  $\alpha_t^s$  puede ser definida de tal modo que sea continua a la derecha.

**Observación.** Las condiciones 1) y 2) del teorema se consideran cumplidas, si  $X$  es un espacio métrico separable,  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio  $X$ , y el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t^s, P_{sx})$  es continuo a la derecha.

Como conclusión de este punto demos a conocer una ecuación integral a la que satisface la probabilidad de paso  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$ , si se genera por una funcional de tipo integral.

Sea  $v(s, x)$  una función no negativa medible según un par de variables, definida para  $s \geq 0$ ,  $x \in X$ . Supongamos que para  $0 < s < t$ ,  $\omega \in \Omega_t = \{\omega: \zeta(\omega) > t\}$

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}.$$

Supondremos que la integral en el segundo miembro es finita para cualesquiera  $0 < s < t < \zeta(\omega)$ . Si

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{sx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^s,$$

entonces la función  $P(s, x, t, \Gamma)$  satisface la siguiente ecuación integral:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(s, x, t, \Gamma) &= P(s, x, t, \Gamma) - \\ &- \int_s^t \int_X P(s, x, u, dy) \nu(u, y) \tilde{P}(u, y, t, \Gamma) du. \end{aligned}$$

14.3.2. Subprocesos. Sean dados dos procesos de Márkov:  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$  y  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  con un mismo espacio de sucesos elementales  $\Omega$ . Supongamos cumplidas las condiciones:

- $\tilde{\zeta}(\omega) \leq \zeta(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ ;
- $\tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi} = \mathfrak{F}_t^{\xi}$  para  $0 \leq t < \tilde{\zeta}(\omega)$ ;
- $\tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi} = \mathfrak{F}_t^{\xi}[\tilde{\Omega}_t]$ , donde  $\tilde{\Omega}_t = \{\omega: \tilde{\zeta}(\omega) > t\}$ , y  $\mathfrak{F}_t^{\xi}[\Omega_t]$  es la traza de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t^{\xi}$  en el conjunto  $\tilde{\Omega}_t$ , es decir, una totalidad de sucesos del tipo  $A \cap \tilde{\Omega}_t$ ,  $A \in \mathfrak{F}_t^{\xi}$ .

En este caso suele decirse que el proceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$  se ha obtenido por reducción del tiempo de vida del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ .

**Definición 2.** Un proceso de Márkov  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$  se llamará subproceso del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ , si el primero puede ser obtenido por reducción de la vida de cierto proceso equivalente al segundo.

Si  $P(s, x, t, \Gamma)$  es una probabilidad de paso del proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ , en tanto que  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  es la probabilidad de paso de su subproceso, entonces, evidentemente,

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) \leq P(s, x, t, \Gamma).$$

Por esta razón del teorema 1 se deduce el

**Teorema 2.** Si un proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$  satisface las condiciones del teorema 1, y el proceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$  es su subproceso, entonces la probabilidad de paso  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  del subproceso se genera por cierta funcional multiplicativa  $\alpha_t^{\xi}$  del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$  en el sentido que

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = M_{xx} \chi_{\Gamma}(\tilde{\xi}(t)) \alpha_t^{\xi}.$$

En cierto sentido es válida también la afirmación inversa.

**Teorema 3.** Sea  $\alpha_t^{\xi}$  una funcional multiplicativa continua a la derecha del proceso de Márkov normal  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^{\xi}, P_{xx})$ . Si es así, existe la subproceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^{\xi}, \tilde{P}_{xx})$  de este proceso que su probabilidad de paso  $\tilde{P}(s, x, t, \Gamma)$  se genera por la funcional  $\alpha_t^{\xi}$ , es decir,

$$\tilde{P}(s, x, t, \Gamma) = \tilde{M}_{xx} \chi_{\Gamma}(\tilde{\xi}(t)) = M_{xx} \chi_{\Gamma}(\xi(t)) \alpha_t^{\xi}$$

para cualesquiera  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .

Si  $P_{sx}(\alpha_t^s = 1) = 1$  para cualesquiera  $s \geq 0$  y  $x \in X$ , entonces el subproceso mencionado es normal.

Examinemos ahora un subproceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^s, \tilde{P}_{sx})$  del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ , el cual se genera por la funcional multiplicativa de tipo integral

$$\alpha_t^s = \exp \left\{ - \int_s^t v(u, \xi(u)) du \right\}$$

con la función acotada medible no negativa  $v(u, x)$ . Entonces,

$$\tilde{P}(s, x, t, X) = M_{sx} \alpha_t^s.$$

Hagamos  $t = s + h$  y sea que  $h \downarrow 0$ . Con la exactitud salvo las magnitudes infinitamente pequeñas de orden superior tendremos

$$P(s, x, s+h, X) - \tilde{P}(s, x, s+h, X) \approx M_{sx} \int_s^{s+h} v(u, \xi(u)) du.$$

Supongamos que la función  $v(u, \xi(u))$  es continua a la derecha y el proceso es normal. Entonces, para  $h \downarrow 0$ ,

$$P(s, x, s+h, X) - \tilde{P}(s, x, s+h, X) \approx v(s, x) h$$

con la exactitud salvo las magnitudes infinitamente pequeñas de orden superior. Si el subproceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\zeta}, \tilde{\mathfrak{F}}_t^s, \tilde{P}_{sx})$  se obtiene por reducción del tiempo de vida del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t^s, P_{sx})$ , entonces el primer miembro de la última correlación se escribirá en la forma

$$P_{sx} \{ \tilde{\zeta} \leq s + h < \zeta \},$$

lo que representa en sí la probabilidad de que el subproceso  $\tilde{\xi}(t)$ , al salir del estado  $x$  en el momento de tiempo  $s$ , se interrumpa hasta que llegue el momento  $s + h$ , mientras que el proceso  $\xi(t)$  no se interrumpe hasta el momento de tiempo indicado.

**PROCESOS DE MÁRKOV HOMOGÉNEOS**

**15.1. Definiciones y propiedades fundamentales**

15.1.1. **Definición.** El proceso de Márkov homogéneo puede imaginarse intuitivamente como un proceso en el cual los pasos de un estado  $x$  a cierto conjunto de estados  $\Gamma$  durante el lapso desde  $s$  hasta  $s+h$  ocurren con una probabilidad que no depende de  $s$ . Esto significa que la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  de un proceso homogéneo debe poseer la propiedad de que la función  $P(s, x, s+h, \Gamma)$  no depende de  $s$ . Si hacemos  $P(h, x, \Gamma) = P(s, x, s+h, \Gamma)$ , entonces para las distribuciones de dimensiones finitas del proceso tendremos

$$\begin{aligned} P_{sx} \{ \xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n \} &= \\ &= \int_{\Gamma_1} P(t_1-s, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2-t_1, y_1, dy_2) \dots \\ &\dots \int_{\Gamma_n} P(t_n-t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n) = \\ &= P_{sx} \{ \xi(t_1-s) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n-s) \in \Gamma_n \}, \\ &0 \leq s < t_1 < t_2 < \dots < t_n. \end{aligned}$$

De este modo, en lugar de la familia de medidas  $P_{sx}$ , dependientes de la variable de tiempo y de la espacial, en el caso homogéneo será suficiente examinar una familia de medidas  $P_x = P_{sx}$  que sólo dependen de la variable espacial. En otras palabras, cada vez, cuando un proceso sale del estado  $x$  en el momento de tiempo  $s$ , realizamos un desplazamiento del tiempo de una manera tal que el punto  $s$  se haga inicial (nulo). Por supuesto, que debemos contar con la posibilidad de desplazar también todas las trayectorias del proceso, lo que significa que el espacio de sucesos elementales ha de ser suficientemente rico.

He aquí la definición exacta. Sean:

- a) un espacio de sucesos elementales  $(\Omega, \mathfrak{A})$ ;
- b) una magnitud aleatoria  $\xi(\omega)$  con valores en el segmento extendido  $[0, \infty[$ ;
- c) para todo  $t \geq 0$  la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$  en el espacio  $\Omega_t = \{ \omega: \xi(\omega) > t \}$ , con la particularidad de que si  $s \leq t$ , entonces  $\mathfrak{F}_s[\Omega_t] \subseteq \mathfrak{F}_t \subseteq \mathfrak{A}$ , donde  $\mathfrak{F}_s[\Omega_t]$  es una traza de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_s$  en el conjunto  $\Omega_t$ , es decir, una totalidad de conjuntos del tipo  $A \cap \Omega_t, A \in \mathfrak{F}_s$ ;
- d) una función de dos variables  $\xi(t) = \xi(t, \omega), t \in [0, \xi(\omega)), \omega \in \Omega$ , que toma valores en cierto espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ , tal que

para todo  $t \geq 0$  la aplicación  $\xi(t, \cdot)$  del espacio  $(\Omega_t, \mathfrak{F}_t)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  es medible; se supone que la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$  contiene todos los conjuntos de un solo punto;

e) para todo  $x \in X$ , la medida probabilística  $P_x$  en cierta  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}$  en el espacio  $\Omega$  que contiene todas las  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \geq 0$ .

**Definición 1.** El sistema de objetos a) — e) forma un proceso de Márkov homogéneo, si se cumplen las condiciones:

1) para cualesquiera  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  la función

$$P(t, x, \Gamma) = P_x\{\xi(t) \in \Gamma\}$$

es  $\mathfrak{F}_t$ -medible como función de  $x$ , siendo  $P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$ ;

2) para cualesquiera  $s, t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se tiene

$$P_x\{\xi(t+s) \in \Gamma | \mathfrak{F}_s\} = P(t, \xi(s), \Gamma)$$

casi por cierto respecto de la medida  $P_x$  en el conjunto  $\Omega_s$ ;

3) para todo  $\omega \in \Omega_t$  existe  $\omega' \in \Omega$  tal que  $\xi(\omega') = \xi(\omega) - y$  y  $\xi(s, \omega') = \xi(s+t, \omega)$  para  $0 \leq s < \xi(\omega')$ .

La condición 2) reúne en sí la propiedad markoviana del proceso y la de su homogeneidad en el tiempo. La condición 3) significa, en términos generales, que junto con toda trayectoria del proceso un trozo arbitrario de ésta también es, pasado cierto momento de tiempo, una trayectoria posible. Al hacer extender, si es necesario, el espacio  $\Omega$ , siempre podemos lograr que la condición 3) esté cumplida.

La función  $P(t, x, \Gamma)$ , definida en la condición 1), se denomina probabilidad de paso. De 2) se deduce que esta función satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov

$$P(s+t, x, \Gamma) = \int_X P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma), \quad s, t \geq 0, \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

Con ello,  $P(s, x, X) \leq 1$ . Si  $P(+0, x, X) = \lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, X) = 1$ , entonces la probabilidad de paso se llama normal y el proceso correspondiente también es normal.

Un proceso de Márkov homogéneo se designará por  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t, P_x)$ . Si  $\zeta = +\infty$ , el proceso se denomina **ininterrumpido** y se denota por  $(\xi(t), \mathfrak{F}_t, P_x)$ . Para un proceso ininterrumpido  $P(t, x, X) \equiv 1$ .

Designemos mediante  $\mathfrak{B}^0$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de subconjuntos  $\Omega$ , que contiene todos los conjuntos del tipo  $\{\xi(t) \in \Gamma\}$  para  $t \geq 0$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , y mediante  $\mathfrak{R}_t$ , la  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos  $\Omega_t$  que contiene todos los conjuntos del tipo  $\{\xi(s) \in \Gamma\} \cap \Omega_t$  para  $s \in [0, t]$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ .

Supongamos que  $\mathfrak{B}$  designa una traza de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}^0$  en el conjunto  $\Omega_0 = \{\zeta > 0\}$ . Es evidente que  $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{B}^0 \subseteq \mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{R}_t \subseteq \mathfrak{F}_t$  y junto con el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{F}_t, P_x)$  el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  también será homogéneo de Márkov.

Como se ha indicado en el p. 14.2, las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{R}_t$  pueden ser privadas de varios conjuntos importantes. Por ejemplo, el conjunto  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma \text{ con } s \in [u, t] \text{ cualquiera}\}$  puede no entrar en  $\mathfrak{R}_t$ , ya que es la intersección de un número innumerable de conjuntos cilíndricos. No obstante, con frecuencia los conjuntos de este tipo están contenidos en la intersección de las completaciones de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{R}_t$  según el sistema de medidas  $P_x$ . Designaremos esta  $\sigma$ -álgebra con  $\overline{\mathfrak{R}}_t$ . En lo sucesivo consideraremos que  $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{R}_t$  ó  $\mathfrak{F}_t = \overline{\mathfrak{R}}_t$ .

**15.1.2. Procesos de Márkov equivalentes.** Si se tienen un proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{N}_t, P_x)$  (el término «homogéneo» lo omitiremos con frecuencia, puesto que se trata aquí solamente de este tipo de procesos) y una medida probabilística  $\mu$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{B}$ , podemos construir una función aleatoria de Márkov (véase el p. 14.1)  $\xi(t), t \in [0, \infty)$  que posea el tiempo de vida  $\zeta$ , el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{N}_t$  y la medida  $P_\mu(A), A \in \mathfrak{N}^0$ , definida por la fórmula

$$P_\mu(A) = \int_X \mu(dx) P_x(A).$$

(Señalemos que de la condición 1) de la definición 1 se desprende que para todo  $A \in \mathfrak{N}^0$  la función  $P_x(A)$  es  $\mathfrak{B}$ -medible). Las distribuciones de dimensiones finitas de esta función aleatoria tienen por expresión

$$\begin{aligned} P_\mu(\xi(t_1) \in \Gamma_1, \xi(t_2) \in \Gamma_2, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n) = \\ = \int_X \mu(dx) \int_{\Gamma_1} P(t_1, x, dy_1) \int_{\Gamma_2} P(t_2 - t_1, y_1, dy_2) \dots \\ \dots \int_{\Gamma_n} P(t_n - t_{n-1}, y_{n-1}, dy_n), \end{aligned}$$

donde  $0 < t_1 < \dots < t_n, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathfrak{B}$ , y  $P(t, x, \Gamma)$  es la probabilidad de paso del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{N}_t, P_x)$ . La medida  $\mu$  recibe el nombre de distribución inicial de la función aleatoria construida. Si dos procesos de Márkov tienen una misma probabilidad de paso, las correspondientes funciones aleatorias de Márkov con una misma distribución inicial serán estocásticas equivalentes (es decir, tienen iguales distribuciones de dimensiones finitas). Los procesos de Márkov se llaman equivalentes, si tienen una misma probabilidad de paso. En conformidad con el teorema 1' del p. 14.2, según cualquier probabilidad de paso homogénea normal podemos construir un proceso de Márkov homogéneo. Con ello, por probabilidad de paso homogénea en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  entendemos la función  $P(t, x, \Gamma), t \geq 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$ , que sirve de medida por  $\Gamma$  con  $t, x$  fijados (a condición de que  $P(t, x, X) \leq 1, P(0, x, X \setminus \{x\}) = 0$ ), que representa en sí una función de  $x$   $\mathfrak{B}$ -medible para  $t, \Gamma$  fijados y que satisface la ecuación de Chapman — Kolmogórov.

**15.1.3. Operadores de desplazamiento.** Definamos una operación de desplazamiento  $\theta_t, t \geq 0$ , de los conjuntos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{N}$ . Para un conjunto del tipo  $\{\omega: \xi(s) \in \Gamma, s \geq 0, \Gamma \in \mathfrak{N}\}$ , hagamos

$$\theta_t \{\xi(s) \in \Gamma\} = \{\xi(t+s) \in \Gamma\}.$$

Además, exigiremos que los operadores  $\theta_t$  conserven todas las operaciones teóricas de multiplicación. De esta manera, la acción del operador  $\theta_t$  en todo conjunto  $A \in \mathfrak{N}$  se determina unívocamente. Por ejemplo,  $\theta_t \Omega_s = \Omega_{s+t}$ , mientras que los conjuntos cilíndricos

$$\{\xi(t_1) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n) \in \Gamma_n\}$$

bajo el efecto del operador  $\theta_t$  se transforman en los conjuntos

$$\{\xi(t_1 + t) \in \Gamma_1, \dots, \xi(t_n + t) \in \Gamma_n\}.$$

Los operadores  $\theta_t$  pueden determinarse también en las funciones  $\mathfrak{B}$ -medibles de  $\omega$ . A saber: suponemos que  $(\theta_t \eta)(\omega) = \alpha$ , si  $\omega \in \theta_t \{\eta = \alpha\}$ . Es evidente que  $\theta_t \theta_s \eta = \theta_{t+s} \eta$ , de modo que los operadores  $\theta_t$  forman un semigrupo. En particular,  $\theta_t \zeta = \zeta - t$  para  $\omega \in \Omega_t$ .

En términos de los operadores  $\theta_t$  la condición 2) de la definición 1 puede ser escrita en la forma

$$P_x \{ \theta_s \{ \xi(t) \in \Gamma \} / \mathfrak{B}_s \} = P_{\xi(t)} \{ \xi(t) \in \Gamma \}$$

casi por cierto respecto de  $P_x$  en el conjunto  $\Omega_x$  (c.p.c.  $\Omega_x, P_x$ ).

Las propiedades a seguir del proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  constituyen sencillos corolarios de la definición 1.

1) Si  $A \in \mathfrak{R}$ , entonces

$$P_x \{ \theta_t A / \mathfrak{R} \} = P_{\xi(t)} \{ A \} \text{ (c.p.c. } \Omega_t, P_x).$$

2) Si  $A \in \mathfrak{R}_t, B \in \mathfrak{R}$ , entonces

$$P_x (A \cap \theta_t B) = \int_A P_{\xi(t)} (B) P_x (d\omega).$$

3) Si  $\eta$  es una magnitud aleatoria acotada  $\mathfrak{R}$ -medible, entonces

$$M_x \{ \theta_t \eta / \mathfrak{R}_t \} = M_{\xi(t)} \text{ (c.p.c. } \Omega_t, P_x).$$

4) Si la magnitud  $\varkappa$  es acotada y  $\mathfrak{R}_t$ -medible, mientras que  $\eta$  es acotada y  $\mathfrak{R}$ -medible, entonces

$$M_x (\varkappa \theta_t \eta) = M_x (\varkappa M_{\xi(t)} \eta).$$

## 15.2. Semigrupos de los operadores relacionados con los procesos homogéneos de Márkov

15.2.1. Semigrupo de los operadores correspondiente a la probabilidad de paso. Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso homogéneo de Márkov en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ . Designemos con  $B(X)$  un espacio de Banach de todas las funciones  $\mathfrak{B}$ -medibles acotadas reales en  $X$ , cuya norma es  $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ . Examinamos en  $B(X)$  una familia de operadores  $T_t, t \geq 0$ , que se definen mediante la fórmula

$$T_t f(x) = \int_X f(y) P(t, x, dy), \quad f \in B(X).$$

De las propiedades de la probabilidad de paso se deducen con facilidad las siguientes propiedades de la familia de operadores  $T_t (t \geq 0)$ :

- 1) para todo  $t \geq 0$   $T_t$  es un operador acotado lineal que aplica  $B(X)$  en  $B(X)$ , con la particularidad de que  $\|T_t\| \leq 1$ ;
- 2) para cualesquiera  $s, t \geq 0$   $T_{t+s} = T_t T_s$ ;
- 3) si  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in X$ , entonces  $T_t f(x) \geq 0$  para cualesquiera  $x \in X$ , y  $t \geq 0$ ;
- 4) si  $f(x_0) = 0$ , entonces  $T_t f(x_0) = 0$ ;



5) si para todo  $x \in X$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , donde  $f_n \in B(X)$ , siendo  $\sup_n \|f_n\| < \infty$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n f(x) = T f(x)$ .

Una familia de operadores  $\{T_t, t \geq 0\}$ , satisfaciendo las condiciones 1) y 2) se llama semigrupo contrayente de operadores. La propiedad 3) significa que el operador  $T_t$  deja invariante el cono de funciones no negativas en  $B(X)$ .

De este modo, todo proceso de Márkov homogéneo en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  engendra un semigrupo contrayente de operadores  $\{T_t, t \geq 0\}$ , que satisface las condiciones 3)—5). Con ello, los procesos de Márkov equivalentes engendran un mismo semigrupo.

Se puede mostrar que todo semigrupo contrayente de operadores, que actúan en  $B(X)$  y satisfacen las condiciones 3)—5), engendra una probabilidad de paso homogénea, con la particularidad de que  $P(t, x, \Gamma) = T_t \chi_\Gamma(x)$ .

Así pues, con el fin del estudio de los procesos de Márkov se puede emplear la teoría de semigrupos.

15.2.2. Operador infinitesimal. Sea  $(X, \mathfrak{B})$  un espacio medible, y supongamos que  $\{T_t, t \geq 0\}$  es un semigrupo contrayente de operadores que actúan en  $B(X)$ . Definamos el operador infinitesimal  $A$  del semigrupo  $T_t$  mediante la fórmula  $Af = g$ , si

$$\lim_{t \downarrow 0} \left\| g - \frac{T_t f - f}{t} \right\| = 0.$$

Su dominio de definición  $D_A$  consta de todas las funciones  $f \in B(X)$ , para las cuales el límite

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}$$

existe uniformemente respecto de  $x \in X$ . Es evidente que  $D_A \subset B_0(X) = \{f: f \in B(X), \lim_{t \downarrow 0} \|T_t f - f\| = 0\}$ .

Indiquemos algunas propiedades del operador infinitesimal.

1) La clausura del conjunto  $D_A$  (en el sentido de convergencia según la norma) coincide con  $B_0(X)$ .

2) Si  $f \in D_A$ , entonces  $Af \in B_0(X)$  y

$$T_t f - f = \int_0^t T_s A f ds.$$

3) Si  $f \in D_A$ , entonces la función  $T_t f$  es fuertemente derivable respecto de  $t$ ,  $t \geq 0$  y

$$\frac{dT_t f}{dt} = A T_t f = T_t A f.$$

4) El operador  $A$  es cerrado.

Para los números positivos  $\lambda$  definamos los operadores  $R_\lambda$  en  $B_0(X)$  mediante la fórmula

$$R_\lambda g(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t g(x) dt, \quad g \in B_0(X).$$

(Ha de ser notado que para  $g$  de esta índole  $T_t g$  es una función acotada fuertemente continua, razón por la cual la integral que figura en la fórmula siempre existe para  $\lambda > 0$  y determina cierta función de  $B(X)$ . La familia de los operadores  $R_\lambda$  se denomina **resolvente** del semigrupo  $T_t$ . Las propiedades de la resolvente:

1) para  $\lambda, \mu > 0$  se verifica la ecuación de resolvente

$$R_\lambda R_\mu = \frac{1}{\lambda - \mu} [R_\mu - R_\lambda];$$

2)  $\|R_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ ;

3) la función  $f = R_\lambda g$  es la única solución de la ecuación  $\lambda f - Af = g$ ,  $\lambda > 0$ ,  $g \in B_0(X)$ .

De este modo,  $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ , donde  $I$  es un operador unidad y  $R_\lambda$  aplica biunívocamente  $B_0(X)$  sobre  $D_A$ .

Hagamos  $R_\lambda(x, \Gamma) = R_\lambda \chi_\Gamma(x)$ ,  $\lambda > 0$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . La función  $R_\lambda(x, \Gamma)$  se llama núcleo de resolvente. Evidentemente,

$$R_\lambda g(x) = \int_X R_\lambda(x, dy) g(y), \quad g \in B_0(X).$$

**15.2.3. Procesos continuos estocásticos en los espacios topológicos.** Sea  $P(t, x, \Gamma)$  una probabilidad de paso homogénea en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$ . De acuerdo con el p. 15.2.1 ella genera un semigrupo de operadores  $T_t$  que actúan en el espacio  $B(X)$ . El operador infinitesimal  $A$  de este semigrupo lo vamos a llamar operador infinitesimal de la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ . De conformidad con el p. 15.2.2

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_X f(y) P(t, x, dy) - f(x)}{t},$$

con la particularidad de que  $f \in D_A$ , si este límite existe uniformemente respecto de  $x \in X$ .

Surge una pregunta: ¿en qué condiciones la probabilidad de paso se determina unívocamente por su operador infinitesimal?

Antes de enunciar el teorema que da la respuesta a la pregunta planteada introduzcamos la noción de probabilidad de paso continua estocástica.

Sea  $X$  un espacio topológico, mientras que  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $X$ . Una probabilidad de paso homogénea  $P(t, x, \Gamma)$  se llamará continua estocástica, si para todo  $x \in X$  y todo entorno  $U$  del punto  $x$  queda cumplida la correlación

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, U) = 1.$$

Designemos mediante  $C(X)$  un espacio de funciones acotadas continuas reales definidas en  $X$ . Si  $P(t, x, \Gamma)$  es la probabilidad de paso continua estocástica en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$ , y  $T_t$  es un semigrupo de operadores en  $B(X)$  que corresponde a dicha probabilidad, entonces para toda  $f \in C(X)$  se verifica

$$\lim_{t \rightarrow 0} T_t f(x) = f(x),$$

cualquiera que sea  $x \in X$ . Más aún, si cierto semigrupo  $T_t$ , engendrado por la probabilidad de paso de Feller  $P(t, x, \Gamma)$ , posee dicha propiedad, entonces  $P(t, x, \Gamma)$  es continua estocástica.

**Teorema 1.** *Toda probabilidad de paso continua estocástica en el espacio físico topológico se define unívocamente por su operador infinitesimal.*

Observemos que la probabilidad de paso continua estocástica es normal. Por esta razón, si  $A$  es un operador infinitesimal de la probabilidad de paso continua estocástica, entonces define unívocamente (con la exactitud salvo la equivalencia) cierto proceso de Márkov. De este modo, el problema de descripción de todos los procesos continuos estocásticos en  $(X, \mathfrak{B})$  se reduce a la descripción de todos los operadores de esta clase en  $B(X)$  que son operadores infinitesimales de las probabilidades de paso continuas estocásticas.

Puede ocurrir que el semigrupo  $T_t$ , generado por cierta probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ , deje invariante cierto subespacio  $\tilde{B}$  del espacio  $B(X)$ . Al considerar el semigrupo  $T_t$  en el espacio  $\tilde{B}$ , podemos determinar su operador infinitesimal en  $\tilde{B}$ . Este se llama operador  $\tilde{B}$ -infinitesimal de la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ . Si el subespacio  $\tilde{B}$  es suficientemente rico, se puede esperar que la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$  se define unívocamente por su operador  $\tilde{B}$ -infinitesimal.

Sean  $X$  un espacio topológico y  $\mathfrak{B}$ , la  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Se dice que la probabilidad de paso homogénea  $P(t, x, \Gamma)$  en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  lleva el nombre de Feller, si para cualesquiera  $t > 0$  y  $f \in C(X)$  se verifica

$$T_t f(x) = \int_X P(t, x, dy) f(y) \in C(X).$$

En otras palabras, una probabilidad de paso es de Feller, si el semigrupo que le corresponde deja invariante el espacio  $C(X)$ . Un proceso de Márkov que tiene probabilidad de paso de Feller también recibe el nombre de Feller. Un semigrupo engendrado por la probabilidad de paso de Feller, se puede considerar en el espacio  $C(X)$ . Su operador infinitesimal en este espacio se denomina operador  $C$ -infinitesimal de la probabilidad de paso correspondiente.

**Teorema 2.** *Si el espacio topológico  $X$  satisface el primer axioma de numerabilidad, entonces el operador  $C$ -infinitesimal de una probabilidad de paso continua y estocástica de Feller define unívocamente esta probabilidad de paso.*

**15.2.4. Procesos en los compactos y semicompactos.** Veamos ahora qué operadores pueden ser infinitesimales para cierta probabilidad de paso.

Supongamos primero que  $X$  es un compacto,  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos borelianos y  $P(t, x, \Gamma)$ , la probabilidad de paso de Feller en  $(X, \mathfrak{B})$ , continua y estocástica. Se puede mostrar que en este caso  $C(X) \stackrel{=}{{}} B_{\mathfrak{B}}(X)$  (véase en el p. 15.2.2 la definición del espacio  $B_{\mathfrak{B}}(X)$ ). Esto significa que para toda  $f \in C(X)$ ,  $\|T_t f - f\| \rightarrow 0$ , cuando  $t \rightarrow 0$ .

Toda probabilidad de paso continua estocástica de Feller es, en el compacto  $(X, \mathfrak{B})$ , uniformemente continua estocástica en el siguiente sentido. Supongamos que  $\rho$  es una métrica en el espacio  $X$  que en-

genera su topología,  $U_\varepsilon(x)$  es una bola en  $X$  de radio  $\varepsilon$  y centro en el punto  $x \in X$ . La probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$  en  $(X, \mathfrak{B})$  se llama uniformemente continua estocástica, si

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in X} (1 - P(t, x, U_\varepsilon(x))) = 0$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

De este modo, en concordancia con el teorema 5 del p. 14.2, entre los procesos de Márkov en un compacto, que son equivalentes entre sí y cuya probabilidad de paso es continua estocástica de Feller, existe un proceso que no tiene discontinuidades de segunda especie y que es continuo a la derecha. El teorema a seguir ofrece la descripción de los operadores infinitesimales de tales procesos.

**Teorema 3.** Sean  $X$  un compacto y  $A$ , un operador lineal en el espacio  $C(X)$ . Para que el operador  $A$  sea operador  $C$ -infinitesimal de cierta probabilidad de paso en  $(X, \mathfrak{B})$ , continua estocástica de Feller, es necesario y suficiente que se cumplan las siguientes condiciones:

- 1) el dominio de definición  $D_A$  del operador  $A$  es siempre denso en  $C(X)$  (en el sentido de una métrica uniforme);
- 2) la ecuación

$$\lambda f - Af = g$$

tiene la solución  $f \in D_A$  para cualesquiera  $g \in C(X)$  y  $\lambda > 0$ ;

- 3) si  $f \in D_A$ ,  $f(x_0) \geq 0$  y  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x \in X$ , entonces  $Af(x_0) \leq 0$ .

Una probabilidad de paso se llama conservativa, si para todo  $t \geq 0$  y todo  $x \in X$  tenemos  $P(t, x, X) = 1$ . La probabilidad de paso será conservativa cuando y sólo cuando, su operador infinitesimal  $A$  posea la siguiente propiedad:  $1 \in D_A$  y  $A1 = 0$ .

Si  $A$  es un operador infinitesimal de cierta propiedad de paso conservativa, se considera cumplida la siguiente propiedad:

- 3') si  $f \in D_A$  y  $f(x_0) \geq f(x)$  para todo  $x \in X$ , entonces  $Af(x_0) \leq 0$ .

Por ello, el operador lineal  $A$  en el espacio  $C(X)$ , donde  $X$  es un compacto, es un operador  $C$ -infinitesimal de cierta probabilidad de paso continua estocástica de Feller conservativa cuando y sólo cuando, quedan cumplidas las condiciones 1), 2), 3') y la condición:  $1 \in D_A$  y  $A1 = 0$ .

Supongamos ahora que  $X$  es un semicompacto (es decir, un espacio de Hausdorff localmente compacto con base numerable).  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Designemos mediante  $C_0(X)$  el espacio de todas las funciones continuas reales en  $X$  que tienden a cero cuando  $x$  sale de todos los compactos (esto significa que para todo  $\varepsilon > 0$  el conjunto  $\{x \in X, |f(x)| > \varepsilon\}$  es un compacto en  $X$ ). Sea  $P(t, x, \Gamma)$  la probabilidad de paso en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$ . Diremos que ella satisface la condición  $C_0$ , si  $T_t f \in C_0(X)$  para cualesquiera  $t > 0$  y  $f \in C_0(X)$ . El operador infinitesimal del semigrupo  $T_t$  en el espacio  $C_0(X)$  se denomina operador  $C_0$ -infinitesimal de la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ .

**Teorema 4.** La probabilidad de paso continua estocástica en el semicompacto  $X$  que satisface la condición  $C_0$  se determina unívocamente por su operador  $C_0$ -infinitesimal.

Una probabilidad de paso que satisface las condiciones del teorema 4 posee las siguientes propiedades:

- a) es uniformemente continua estocástica en los compactos;

b) para dicha probabilidad  $C_0(X) \subseteq B_0(X)$ .

Por consiguiente, si la probabilidad de paso de un proceso de Márkov satisface las condiciones del teorema 4, también en este caso se puede elegir el proceso de un modo tal que sea continuo a la derecha y no tenga discontinuidades de segunda especie.

El teorema que sigue describe los operadores infinitesimales de tales procesos.

**Teorema 5.** Sean  $X$  un semicompacto y  $A$ , un operador lineal en el espacio  $C_0(X)$ . Para que  $A$  sea operador  $C_0$ -infinitesimal de cierta probabilidad de paso en  $X$ , continua estocástica y satisficente la condición  $C_0$ , es necesario y suficiente que dicho operador satisfaga las condiciones 1)—3) del teorema 3 (en las condiciones 1), 2) se debe sustituir  $C(X)$  por  $C_0(X)$ ).

### 15.3. Operadores característicos de los procesos rigurosos de Márkov

**15.3.1. Procesos rigurosos de Márkov.** Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso de Márkov homogéneo en el espacio físico  $(X, \mathfrak{B})$  con un espacio de sucesos elementales  $\Omega$ . Una función  $\tau = \tau(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , de valores numéricos se llama momento de Márkov, si están cumplidas las siguientes condiciones:

- a)  $0 \leq \tau(\omega) \leq \zeta(\omega)$  para todo  $\omega \in \Omega$ ;  
 b) para todo  $t \geq 0$   $\{\tau(\omega) \leq t < \zeta(\omega)\} \in \mathfrak{R}_t$ .

Designemos  $\Omega_\tau = \{\omega: \tau(\omega) < \zeta(\omega)\}$ . Para  $\omega \in \Omega_\tau$  se tiene  $\tau(\omega) = \zeta(\omega)$ .

Es evidente que, al hacer  $\tau(\omega) = t_0$  para  $\bar{\omega} \in \Omega_{t_0}$  y  $\tau(\omega) = \zeta(\omega)$  para  $\omega \notin \Omega_{t_0}$ , obtendremos un momento de Márkov (aquí,  $t_0$  es un número no aleatorio).

Hagamos ahora

$$\tau_\Gamma(\omega) = \inf \{s: 0 \leq s < \zeta(\omega), \xi(s, \omega) \in \Gamma\}, \Gamma \in \mathfrak{B},$$

si el conjunto entre las llaves es no vacío; de lo contrario, hacemos  $\tau_\Gamma(\omega) = \zeta(\omega)$ . La magnitud  $\tau_\Gamma$  se llama momento de la primera salida del conjunto  $\Gamma$ . Si  $X$  es un espacio topológico, el proceso es continuo a la derecha y el conjunto  $\Gamma$  es abierto o cerrado, entonces la magnitud  $\tau_\Gamma$  es un momento de Márkov.

Sea, ahora,  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un momento de Márkov progresivo medible (esto significa que la aplicación  $\xi(s, \omega)$  del espacio  $([0, t] \times \Omega_t, \mathcal{F}_t^0 \times \mathfrak{R}_t)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$  es medible para todo  $t$ ). Si  $\tau$  es un momento de Márkov, entonces la aplicación  $\xi(\tau(\omega), \omega)$  define una aplicación medible del espacio  $(\Omega_\tau, \mathfrak{R}_\tau)$  en el espacio  $(X, \mathfrak{B})$ . (Recordemos que  $\mathfrak{R}_\tau$  es una totalidad de todos los  $A \in \mathfrak{R}$  tales que  $A \cap \{\tau \leq t < \zeta\} \in \mathfrak{R}_t$ ).

**Definición.** Un proceso de Márkov progresivo medible  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  se llama rigurosamente de Márkov, si para cualesquiera  $t \geq 0$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  y para todo momento de Márkov  $\tau$  se verifica la correlación

$$P_x \{\xi(t + \tau) \in \Gamma | \mathfrak{R}_\tau\} = P(t, \xi(\tau), \Gamma) \text{ (c.p.c. } \Omega_\tau, P_x).$$

El teorema que sigue proporciona una condición suficiente para que un proceso de Márkov sea riguroso.

**Teorema 1.** *Un proceso de Márkov de Feller continuo a la derecha es en el espacio fásico topológico rigurosamente de Márkov.*

Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso riguroso de Márkov. Determinemos los operadores de desplazamiento  $\theta_\tau$  para  $A \in \mathfrak{R}$  y el momento de Márkov  $\tau$ , haciendo uso de la fórmula

$$\theta_\tau A = \bigcup_{t \geq 0} (\theta_t A) \cdot \{\tau - t\}.$$

Si  $\eta$  es una magnitud aleatoria  $\mathfrak{R}$ -medible, entonces hagamos

$$\theta_\tau \eta(\omega) = \theta_\tau \eta(\omega)$$

para  $\omega \in \{\tau(\omega) - t < \zeta(\omega)\}$ . La función  $\theta_\tau \eta$  está definida solo en el conjunto  $\Omega_\tau$ .

Las siguientes propiedades del proceso riguroso de Márkov son sencillos corolarios de la definición. Si  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  es un proceso riguroso de Márkov y  $\tau$  es un momento de Márkov, entonces:

- 1)  $P_x\{\theta_\tau A \in \mathfrak{R}_\tau\} = P_{\xi(\tau)}(A)$  (c.p.c.  $\Omega_\tau, P_x$ ) para todo  $A \in \mathfrak{R}$ ;
- 2) para cualesquiera  $A \in \mathfrak{R}_\tau$  y  $B \in \mathfrak{R}$  tenemos

$$P_x\{A \cap \theta_\tau B\} = \int_A P_{\xi(\tau)}(B) P_x(d\omega),$$

- 2) para toda magnitud aleatoria acotada  $\mathfrak{R}$ -medible  $\eta$  se tiene

$$M_x\{\theta_\tau \eta \in \mathfrak{R}_\tau\} = M_{\xi(\tau)} \eta \text{ (c.p.c. } \Omega_\tau, P_x);$$

- 4) para toda magnitud aleatoria acotada  $\mathfrak{R}_\tau$ -medible  $\eta$  y toda magnitud acotada  $\mathfrak{R}$ -medible  $\kappa$  se verifica

$$M_x\{\eta \theta_\tau \kappa\} = M_x\{\eta M_{\xi(\tau)} \kappa\}.$$

En conformidad con la definición 6 del p. 14.2, un proceso de Márkov homogéneo normal  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$ , donde  $X$  es un semicompacto y  $\mathfrak{B}$ , la  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos borelianos, se llama estándar, siempre que estén cumplidas las condiciones:

- a)  $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}_{t+}, t \geq 0$ ;
- b) el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  es continuo a la derecha y tiene límites a la izquierda;
- c) el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  es rigurosamente de Márkov;
- d) el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  es casi continuo a la izquierda.

**Teorema 2.** *Si  $P(t, x, \Gamma)$  es una probabilidad de paso de Feller, estocástica continua en un compacto, o bien una probabilidad de paso estocástica continua en un semicompacto satisficente la condición  $C_0$ , entonces existe un proceso de Márkov estándar con la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ .*

Como conclusión de este punto daremos un ejemplo de un proceso de Márkov que no es rigurosamente de Márkov.

**EJEMPLO.** Sea  $X = (-\infty, \infty)$  y  $\mathfrak{B}$ , una  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos en  $X$ . Hagamos para  $t > 0, x \in X, \Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\Gamma} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2t}\right\} dy, & \text{si } x \neq 0; \\ \chi_{\Gamma}(x), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que según esta probabilidad de paso se puede construir un proceso de Márkov  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  que sea homogéneo continuo y que no se interrumpa. Para este proceso la magnitud aleatoria (finita!)  $\tau = \tau_{X \setminus \{0\}}$  que respresenta el momento de la primera salida del conjunto  $X \setminus \{0\}$ , es un momento de Márkov. Supongamos que el conjunto  $A$  consta de aquellos  $\omega$ , para los cuales existe un  $t$  tal que con cualquier  $s \geq t$   $\xi(s, \omega) = 0$ . Entonces,  $P_x(A) = 0$ , cuando  $x \neq 0$ , y  $P_0(A) = 1$ . Luego, es evidente que  $0_t A = A$ , a consecuencia de lo cual la igualdad

$$P_x(0_t A) = M_x P_{\xi(t)}(A)$$

no puede cumplirse puesto que cuando  $x \neq 0$ , el primer miembro es nulo, mientras que el segundo miembro es igual a uno. Esto quiere decir que el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  no puede ser rigurosamente de Márkov.

15.3.2. Operador característico. Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso en el semicompacto  $X$ , continuo a la derecha y de Feller (y, consecuentemente, rigurosamente de Márkov). Si  $A$  es un operador infinitesimal de este proceso y  $f \in D_A$ , se verifica la fórmula

$$M_x f(\xi(t)) - f(x) = M_x \int_0^t A f(\xi(s)) ds$$

para cualesquiera  $t \geq 0$ ,  $x \in X$  (véase el p. 15.2.2, propiedad 2) de operador infinitesimal).

Resulta pues, que en ciertos casos esta fórmula queda en vigor, cuando  $t$  se sustituye por el momento de Márkov  $\tau$ . A saber, sea  $\tau$  un momento de Márkov para el proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  y supongamos que  $M_x \tau < \infty$ . En este caso, si  $f \in D_A$ , se verifica

$$M_x f(\xi(\tau)) - f(x) = M_x \int_0^{\tau} A f(\xi(s)) ds. \quad (3.1)$$

El punto  $x_0 \in X$  se llamará absorbente, si  $P_{x_0} \{\xi(t) = x_0\} = 1$  para todo  $t \geq 0$ . Para cualquier punto absorbente  $x_0$  se tiene que  $T_j f(x_0) = f(x_0)$  para todo  $t$  y toda  $j \in B(X)$ . Si  $x$  es un punto no absorbente, siempre existe un entorno suyo  $U$  tal que  $M_x \tau_U < \infty$ . Aquí,  $\tau_U$  representa el momento de la primera salida del conjunto abierto  $U$ .

Diremos que la sucesión de entornos  $U_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , del punto  $x$  converge hacia  $x$  ( $U_n \downarrow x$ ), si para todo entorno  $U$  del punto  $x$  existe tal  $n_0$  que para  $n > n_0$  sea  $U_n \subset U$ .

Supongamos que  $x \in X$  es un punto no absorbente del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  y  $U_n \downarrow x$ . En este caso, de la fórmula (3.1) se desprende la correlación

$$A f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_x f(\xi(\tau_n)) - f(x)}{M_x \tau_n}, \quad (3.2)$$

donde  $\tau_n = \tau_{U_n}$ , siempre que  $f \in D_A$  y la función  $A f$  es continua en el punto  $x$ . Cuando  $x$  es un punto absorbente,  $\tau_{U_n} = \infty$  para todo

entorno  $U$  del punto  $x$ . Por esta razón podemos considerar que el segundo miembro en la fórmula (3.2) se anula en un punto absorbente. Lo mismo sucede con el primer miembro.

De este modo, si  $A$  es un operador  $C$ -infinitesimal del proceso de Feller, continuo a la derecha, y  $f \in D_A$ , entonces el valor de la función  $Af$ , para todo  $x \in X$ , puede calcularse según (3.2).

Designemos mediante  $D_{\mathfrak{A}}^x$  una totalidad de todas las funciones  $f \in C(X)$ , para las cuales con  $x \in X$  dado existe el límite

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_x f(\xi(\tau_n)) - f(x)}{M_x \tau_n},$$

donde  $U_n$  es una sucesión arbitraria de entornos del punto  $x$  que converge hacia  $x$ , en tanto que  $\tau_n = \tau_{U_n}$ . Para  $f \in \bigcap_{x \in X} D_{\mathfrak{A}}^x$  el límite

correspondiente existe con  $x \in X$  cualquiera y define cierta función  $\mathfrak{A}f(x)$ . El operador  $\mathfrak{A}$  se llama **operador característico del proceso**. Su dominio de definición  $D_{\mathfrak{A}} = \bigcap_{x \in X} D_{\mathfrak{A}}^x$  se compone de todas las funciones  $f \in C(X)$ , para las cuales el límite en el segundo miembro de la fórmula (3.2) existe siempre, cualquiera que sea  $x \in X$ . De lo anterior fluye que el operador característico de un proceso de Feller, continuo a la derecha, en el semicompacto  $X$  es la dilatación de su operador  $C$ -infinitesimal. Esto significa que  $D_A \subseteq D_{\mathfrak{A}}$  y para  $f \in D_A$  se verifica la igualdad:  $Af(x) = \mathfrak{A}f(x)$ .

Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$  y  $\tau = \tau_U$  es el momento de la primera salida de  $U$ , entonces hacemos

$$\pi_U(x, \Gamma) = P_x(\xi(\tau) \in \Gamma), \quad x \in X, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

La probabilidad  $\pi_U(x, \Gamma)$  se denomina probabilidad de salida del conjunto  $U$ . En términos de las probabilidades de salida, el operador característico puede ser escrito en la forma

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int f(y) \pi_{U_n}(x, dy) - f(x)}{M_x \tau_{U_n}}, \quad f \in D_{\mathfrak{A}}, \quad U_n \downarrow x.$$

Así pues, todo operador característico se define por las probabilidades de salida y por el tiempo medio hasta la salida de los entornos del punto inicial, tan pequeños como se quiera. Si el proceso no se interrumpe y es continuo, entonces  $\xi(\tau_U)$  pertenece a la frontera del conjunto  $U$ . Por eso, para los procesos continuos el operador característico es local.

Observemos que para los procesos equivalentes los operadores característicos coinciden. Sin embargo, si para dos procesos coinciden sus operadores característicos, esto todavía no significa que los procesos son equivalentes.

En ciertos casos resulta posible describir la relación existente entre los operadores infinitesimal y característico con mayor precisión.

**Teorema 3. 1).** *Supongamos que  $(\xi(t), \mathfrak{M}_t, P_x)$  es un proceso de Feller en el compacto  $X$ , estocástico continuo e ininterrumpido. Sea  $A$*



el operador  $C$ -infinitesimal de este proceso. Entonces

$$D_A = D_{\mathfrak{R}} \cap C(X) \cap \{f : \mathfrak{R}f \in C(X)\}.$$

2) Sea  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso en el compacto  $X$ , estocástico continuo e ininterrumpido, que satisface la condición  $C_0$ , y sea  $A$  su operador  $C$ -infinitesimal. En este caso

$$D_A = D_{\mathfrak{R}} \cap C_0(X) \cap \{f : \mathfrak{R}f \in C_0(X)\}.$$

#### 15.4. Procesos con un conjunto numerable de estados

15.4.1. Clasificación de los puntos. Sea  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{R})$  que satisface la condición (S): si  $\xi(s, \omega) = x$  para todos los valores racionales de  $s$  en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ , entonces  $\xi(s, \omega) = x$  también para todos los  $s \in (\alpha, \beta)$ . (Esta condición se considera cumplida, si el proceso en el espacio topológico es continuo a la derecha.)

Designemos mediante  $\tau_x$  el momento de la primera salida del punto  $x$ . Entonces,  $\tau_x$  es un momento de Márkov y

$$P_x\{\tau_x > t\} = e^{-a(x)t},$$

donde  $a(x)$  es una función no negativa de  $x$ , igual, quizás, en ciertos puntos a  $+\infty$ .

Así pues, para todo punto  $x \in X$  existen tres posibilidades:

- 1)  $a(x) = 0$ ; en este caso  $\tau_x = +\infty$  y el punto  $x$  se llama **absorbente** (véase el p. 15.3.2);
- 2)  $a(x) = +\infty$ ; en este caso  $\tau_x = 0$  y el punto  $x$  se denomina **de paso**;
- 3)  $0 < a(x) < +\infty$ ; en este caso  $0 < \tau_x < +\infty$  y  $x$  se llama **punto de retención**.

Si convenimos en considerar que  $\frac{1}{0} = +\infty$  y  $\frac{1}{+\infty} = 0$ , entonces en cada uno de los tres casos, evidentemente,  $a(x) = (M_x \tau_x)^{-1}$ .

Un proceso de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  se llama **irregular**, si para cualesquiera  $\omega$  y  $t \in [0, \zeta(\omega))$  existe un  $\delta$  positivo (dependiente de  $t$  y  $\omega$ ) tal que para todo  $h \in [0, \delta)$  se tiene  $\xi(t) \neq \xi(t+h)$ . El momento  $t_0$  se llama momento de salto de la trayectoria  $\xi(t, \omega)$ , si existe una sucesión  $t_n \uparrow t_0$  tal que  $\xi(t_n, \omega) \neq \xi(t_0, \omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . El operador infinitesimal de un proceso irregular es, de hecho, la contracción de un operador que a la función  $f \in B(X)$  le pone en correspondencia otra función, a saber,

$$-a(x)f(x) + a(x)M_x f(\xi(\tau_x)) = -a(x)f(x) + a(x) \int_X f(y) \pi(x, dy),$$

donde  $a(x) = (M_x \tau_x)^{-1}$ ,  $\pi(x, \Gamma) = P_x\{\xi(\tau_x) \in \Gamma\}$  (evidentemente, el proceso irregular está privado de puntos de paso, por lo cual  $a(x) \neq \infty$  para  $x \in X$ ).

Un proceso irregular se denomina **escalonado**, si para todo  $\omega$  el conjunto de los momentos de salto no tiene puntos límites dentro del

intervalo  $[0, \zeta(\omega)]$ . Si  $P(t, x, \Gamma)$  es una probabilidad de paso en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  y si uniformemente respecto de  $x \in X$

$$\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, x) = 1,$$

entonces existe un proceso irregular con la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ .

**15.4.2. Diferenciabilidad de las probabilidades de paso y ecuaciones de Kolmogórov.** Examinemos más detalladamente los procesos con un número numerable de estados. Sea  $X$  un conjunto numerable (o finito) y sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de todos sus subconjuntos. En este caso resulta suficiente considerar la probabilidad de paso a los conjuntos de un punto  $P(t, x, y) = P(t, x, \{y\})$ , puesto que  $P(t, x, \Gamma) = \sum_{y \in \Gamma} P(t, x, y)$ . La función  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , satisface

las condiciones:

a)  $P(t, x, y) \geq 0$ ;

b)  $\sum_{y \in X} P(t, x, y) \leq 1$ ;

c)  $P(s+t, x, y) = \sum_{z \in X} P(s, x, z) P(t, z, y)$ ,  $s, t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ .

La probabilidad de paso  $P(t, x, y)$  se denomina estocástica continua, si se cumple la condición

d) para cualesquiera  $x, y$   $\lim_{t \rightarrow 0} P(t, x, y) = \delta(x, y)$ , donde

$\delta(x, y) = 0$  para  $x \neq y$  y  $\delta(x, y) = 1$ , para  $x = y$ .

Los números  $P(t, x, y)$ ,  $x, y \in X$ , que satisfacen las condiciones a) — d), forman, para  $t \geq 0$ , una matriz  $P(t)$ , llamada semiestocástica. Si, en lugar de la condición b), queda cumplida la condición

$$\sum_{y \in X} P(t, x, y) = 1$$

para cualesquiera  $t \geq 0$  y  $x \in X$ , la matriz  $P(t)$  se llama estocástica. Es evidente que

$$P(t) P(s) = P(s) P(t) = P(s+t).$$

**Teorema 1.** Sean dadas las funciones  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , que satisfacen las condiciones a) — d). En este caso:

1) para todo  $x \neq y$  existen límites finitos

$$a(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(t, x, y)}{t};$$

2) para todo  $x \in X$  existe un límite

$$a(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P(t, x, x)}{t},$$

igual, quizás, a  $-\infty$ ;

3) para todo  $x \in X$

$$\sum_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} a(x, y) \leq a(x).$$

Si un proceso con la probabilidad de paso  $P(t, x, y)$  satisface la condición (S) del p. 15.4.1 y  $\tau_x$  es el momento de la primera salida del estado  $x$ , entonces

$$P_x\{\tau_x > t\} = e^{-\bar{a}(x)t},$$

donde  $0 \leq \bar{a}(x) < +\infty$ . Se puede mostrar que en el caso dado  $a(x) = -\bar{a}(x)$ , donde  $a(x)$  está introducida en la afirmación 2) del teorema 1. De este modo, a base de la función  $a(x)$  podemos clasificar todos los puntos del espacio  $X$  en los de paso ( $a(x) = +\infty$ ), los absorbentes ( $a(x) = 0$ ) y los de retención ( $0 < a(x) < +\infty$ ).

Un punto  $x$ , que no es de paso, se llama regular, si

$$a(x) = \sum_{y \neq x} a(x, y).$$

Es evidente que los puntos absorbentes son regulares. Un proceso, todos los puntos del cual son regulares, se denomina local regular.

Si, para cierto  $x \in X$ ,  $a(x) < +\infty$ , entonces para cualesquiera  $y \in X$ ,  $t \geq 0$  se verifican las desigualdades

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} \geq \sum_{z \in X} a(x, z) P(t, z, y); \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial P(t, y, x)}{\partial t} \geq \sum_{z \in X} P(t, y, z) a(z, x), \quad (4.2)$$

donde se ha puesto  $a(x, x) = -a(x)$ .

**Teorema 2.** Si para la función  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , que satisface las condiciones a) - d), todos los puntos son regulares, entonces queda cumplido el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{z \in X} a(x, z) P(t, z, y), \quad t \geq 0, \quad y, x \in X. \quad (4.3)$$

El sistema de ecuaciones (4.3) lleva el nombre de primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov. Su condición inicial es la correlación

$$\lim_{t \downarrow 0} P(t, x, y) = \delta(x, y), \quad x, y \in X.$$

Designemos mediante  $A$  una matriz con los elementos  $a(x, y)$ ,  $x, y \in X$ . Las ecuaciones (4.3) en la forma matricial se representan como sigue

$$\frac{\partial P(t)}{\partial t} = AP(t),$$

donde  $\frac{\partial P(t)}{\partial t}$  es una matriz con los elementos  $\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t}$ ,  $x, y \in X$ .

El sistema de ecuaciones (4.3) puede escribirse, además, en la forma siguiente:

$$P(t, x, y) = \delta(x, y) e^{-a(x)t} + \int_0^t e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} a(x, z) P(t-s, z, y) ds.$$

Cuando  $y \neq x$  hagamos  $\pi(x, y) = \frac{a(x, y)}{a(x)}$ , si  $0 < a(x) < +\infty$ , y  $\pi(x, y) = 0$  para  $a(x) = 0$ . En este caso el sistema precedente de ecuaciones integrales puede ser escrito en la forma

$$P(t, x, y) = \int_0^t a(x) e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} \pi(x, z) P(t-s, z, y) ds, \quad x \neq y \quad x, y \in X;$$

$$P(t, x, x) = e^{-a(x)t} + \int_0^t a(x) e^{-a(x)s} \sum_{z \neq x} \pi(x, z) \times \\ \times P(t-s, z, x) ds, \quad x \in X.$$

A estas igualdades se les atribuye con facilidad un significado probabilístico. Por ejemplo, la segunda de ellas puede ser interpretada así: al salir del estado  $x$ , el sistema puede encontrarse en el momento de tiempo  $t$  en el estado  $x$ , o bien sin salir de  $x$  durante todo este tiempo (la probabilidad de este suceso es igual a  $e^{-a(x)t}$ ) o bien, al salir por primera vez del estado  $x$  en el momento de tiempo  $s$  (la probabilidad de este suceso es igual a  $a(x) e^{-a(x)s} ds$ ), el sistema pasará al estado  $z \neq x$  (la probabilidad de este suceso es  $\pi(x, z)$ ) y, a continuación, durante el resto de tiempo  $t-s$ , pasará del estado  $z$  al estado  $x$  (la probabilidad de este suceso es igual a  $P(t-s, z, x)$ ). En este caso hemos de sumar (integrar) el producto de las probabilidades mencionadas respecto a todos los momentos posibles de la primera salida del estado  $x$  (es decir, respecto a  $s$ , a partir de 0 hasta  $t$ ) y respecto de todos los estados  $z \neq x$ . Por consiguiente, las magnitudes  $\pi(x, y)$  introducidas se interpretan como las probabilidades de que en el momento de la primera salida del estado  $x$  el sistema se encontrará en el estado  $y$ .

Luego, al sustituir en (4.2) el signo de desigualdad por el de igualdad, obtenemos el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov:

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = \sum_{z \in X} P(t, x, z) a(z, y), \quad x, y \in X. \quad (4.4)$$

No obstante, incluso en el caso cuando todos los puntos  $x \in X$  son regulares, no se puede, en general, afirmar que las probabilidades  $P(t, x, y)$  (es decir, las funciones que satisfacen las condiciones a) — d)) satisfacen el sistema de ecuaciones (4.4). La condición suficiente para que las probabilidades  $P(t, x, y)$  satisfagan el sistema de ecuaciones (4.4) es contenida en la siguiente afirmación.

**Teorema 3.** *Supongamos que los números  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , forman una matriz estocástica para la cual  $\sup a(x) < \infty$ . Entonces, todos los puntos  $x \in X$  son regulares y las probabilidades  $P(t, x, y)$  satisfacen el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov.*

Podemos mostrar que el carácter acotado de la función  $a(x)$  es equivalente a la condición

$$\limsup_{t \downarrow 0, x \in X} (1 - P(t, x, x)) = 0.$$

En este caso, como se deduce del p. 15.4.1, el proceso con la probabilidad de paso  $P(t, x, y)$  es equivalente a un proceso escalonado.

Si  $X$  es finito y  $P(t)$ , una matriz estocástica, entonces la función  $a(x)$  es acotada, todos los puntos  $x \in X$  son regulares y el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov queda cumplido.

15.4.3. Solución mínima. Hasta ahora la probabilidad de paso  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , se ha considerado dada y según ella se construya la matriz  $A = \|a(x, y)\|$ ,  $x, y \in X$ . Examinemos ahora el problema inverso. Sea dada la matriz  $A = \|a(x, y)\|$ ,  $x, y \in X$ , que satisface la condición

$$A) \text{ para } x \neq y, a(x, y) \geq 0, y - \infty < \sum_{y \in X} a(x, y) \leq 0$$

cualquiera que sea  $x \in X$ .

¿Existen una probabilidad de paso  $P(t, x, y)$  para la cual se verifique  $\frac{\partial P(0, x, y)}{\partial t} = a(x, y)$  con cualesquiera  $x, y \in X$ ?

Para responder a esta pregunta es natural examinar dos sistemas de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x, y) = \sum_{z \in X} a(x, z) Q(t, z, y), \quad x, y \in X; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(t, x, y) = \sum_{z \in X} Q(t, x, z) a(z, y), \quad x, y \in X \quad (4.6)$$

con la condición inicial  $\lim_{t \rightarrow 0} Q(t, x, y) = \delta(x, y)$ .

Hagamos

$$P^0(t, x, y) = \delta(x, y) e^{-a(x)t};$$

$$P^{(n+1)}(t, x, y) = \sum_{z \in X} \int_0^t e^{-a(x)(t-s)} a(x, z) P^{(n)}(s, z, y) ds, \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Se puede mostrar que las funciones  $P^{(n)}(t, x, y)$  pueden ser definidas también mediante el siguiente sistema de igualdades:

$$P^{(n+1)}(t, x, y) = \sum_{z \neq y} \int_0^t e^{-a(y)(t-s)} a(z, y) P^{(n)}(s, x, z) ds,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Sea

$$\bar{P}(t, x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}(t, x, y).$$

**Teorema 4.** Para cualquier matriz  $A$ , que satisfaga la condición A), la función construida arriba  $\bar{P}(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , es la solución de los sistemas de ecuaciones (4.5) y (4.6) que satisface las condiciones a) — d).

Podemos mostrar que si  $P(t, x, y)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x, y \in X$ , es una función arbitraria satisfaciendo las condiciones a) - d) y la correlación

$$\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y), \quad x, y \in X,$$

con la matriz dada  $A$ , entonces  $P(t, x, y) \geq \bar{P}(t, x, y)$ , donde  $\bar{P}(t, x, y)$  es una función construida arriba según la misma matriz  $A$ . Por esta razón,  $\bar{P}(t, x, y)$  se llama solución mínima correspondiente a la matriz  $A$ .

Si para la matriz dada  $A$ , satisfaciendo la condición  $A$ ), la solución mínima  $\bar{P}(t, x, y)$  posee la propiedad de que  $\sum_{y \in X} \bar{P}(t, x, y) = 1$  (es decir, la matriz  $\bar{P}(t)$  es estocástica), entonces toda función  $P(t, x, y)$ , que satisface las condiciones a) - d) y la condición  $\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y)$ ,  $x, y \in X$ , coincide con  $\bar{P}(t, x, y)$ . En particular, en este caso  $\bar{P}(t, x, y)$  es la única solución de los sistemas de ecuaciones (4.5) y (4.6), con la particularidad de que la matriz  $A$  ha de satisfacer la condición  $\sum_{y \in X} a(x, y) = 0$  en lugar de la correspondiente desigualdad en la condición  $A$ ).

**15.4.4. Procesos regulares.** Supongamos que  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  es un proceso local regular ininterrumpido que satisface la condición  $(S)$  y sea  $P(t, x, y)$  su probabilidad de paso. Hagamos  $\tau_1 = \inf\{t: \xi(t) \neq \xi(0)\}$  y, si  $\xi(t) = \xi(0)$  para todo  $t$ , suponemos  $\tau_1 = +\infty$ . El momento  $\tau_1$  se llama momento del primer salto. Determinemos ahora la sucesión de momentos  $\tau_n$  por la fórmula

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \theta_{\tau_n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

con la particularidad de que si  $\tau_n(\omega) = +\infty$ , consideramos  $\tau_j(\omega) = +\infty$  para todo  $j \geq n$ . Es evidente que  $\tau_n$  es el momento del  $n$ -ésimo salto. Hagamos  $\tau_0 = 0$  y  $\zeta_n = \xi(\tau_n)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Con ello, si  $\tau_n(\omega) = +\infty$ , entonces consideramos  $\zeta_n(\omega) = \zeta_{n-1}(\omega)$ . En este caso la sucesión  $\{\zeta_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$  forma una cadena de Márkov homogénea. Su probabilidad de paso por un paso se determina mediante las correlaciones:

$$\pi(x, y) = \frac{a(x, y)}{a(x)}, \quad \text{si } x \neq y, a(x) > 0;$$

$$\pi(x, x) = 0, \quad \text{si } a(x) > 0;$$

$$\pi(x, y) = \delta(x, y), \quad \text{si } a(x) = 0$$

Llamemos el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  regular, si para todo  $x \in X$

$$P_x(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = +\infty) = 1.$$

Un proceso regular tiene sólo un número finito de saltos en cada intervalo de tiempo finito. Se puede mostrar que el proceso es regular,

cuando y sólo cuando, para todo  $x \in X$

$$P_x \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a(\xi_k)} = +\infty \right\} = 1$$

(considerando, en tal caso que la suma es infinita, si aunque sólo para uno de los  $k$  se tiene que  $a(\xi_k) = 0$ ). De aquí se desprenden dos condiciones suficientes de regularidad de un proceso:

1) para que un proceso sea regular, es suficiente que la función  $a(x)$  sea acotada;

2) para que un proceso sea regular, es suficiente que la cadena de Márkov  $(\xi_n, n = 0, 1, \dots)$  sea reversible.

Ahora, sea  $\frac{\partial P}{\partial t}(0, x, y) = a(x, y)$ ,  $x, y \in X$ . Como el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  es local regular, entonces  $\sum_{y \in X} a(x, y) = 0$ . Por ello, la función  $(P(t, x, y))$  satisface la ecuación de Kolmogórov. Según la matriz  $A = \|a(x, y)\|$  definamos las funciones  $P^{(n)}(t, x, y)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y  $\bar{P}(t, x, y)$  de modo igual al empleado más arriba. En este caso

$$P^{(0)}(t, x, y) = P_x\{\tau_1 > t, \xi(t) = y\};$$

$$P^{(n)}(t, x, y) = P_x\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \xi(t) = y\}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\bar{P}(t, x, y) = P_x\{\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n > t, \xi(t) = y\}.$$

Por consiguiente, si un proceso es regular, entonces  $P(t, x, y) = \bar{P}(t, x, y)$  y, por lo tanto,  $P(t, x, y)$  es la única solución del primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov. Es válida también la afirmación inversa: si el primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov tiene una solución única, el proceso es regular. Además, la probabilidad de paso de un proceso regular satisface el segundo sistema de ecuaciones de Kolmogórov.

Sea  $B(X)$  un espacio de todas las funciones reales acotadas en  $X$ . Si en  $X$  introducimos una topología discreta, obtendremos que  $B(X) = C(X)$ , donde  $C(X)$  será un espacio de funciones continuas de valores reales acotadas en  $X$ . Para un proceso local regular (separable) se ha determinado el operador característico

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{M_x f(\xi(\tau_1)) - f(x)}{M_x \tau_1} = \sum_{y \in X} a(x, y) f(y),$$

donde  $f \in B(X)$ . De este modo, la acción del operador  $\mathfrak{A}$  sobre la función  $f$  se reduce a la multiplicación de la matriz  $A$  por el vector columna  $f(y)$ ,  $y \in X$ . La función  $\mathfrak{A}f(x)$ , en este caso, puede resultar no acotada. Designemos  $D_{\mathfrak{A}} = \{f: f \in B(X), \mathfrak{A}f \in B(X)\}$ . Hemos visto que según la matriz  $A$  se regenera unívocamente el proceso hasta la primera acumulación de saltos, es decir, hasta el momento  $\eta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ . Por eso, el operador característico determina unívocamente el proceso (con la exactitud salvo la equivalencia) por lo menos en dos casos: 1) cuando el proceso es regular; 2) cuando el proceso se

interrumpe en el momento de tiempo  $\eta$ . En el primer caso la probabilidad de paso es la única solución del primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov (y también del segundo). En el segundo caso la probabilidad de paso es la solución mínima de los sistemas mencionados de ecuaciones. (Por supuesto, si  $\eta = +\infty$ , entonces ambos casos coinciden). Hemos de notar, refiriéndonos al segundo caso, que si  $\eta(\omega) < +\infty$ , entonces  $\xi(t, \omega)$  sale de todos los compactos cuando  $t \uparrow \eta(\omega)$ . Todos los conjuntos compuestos de un número finito de puntos son compactos de  $X$ .

Para construir un proceso de Márkov ininterrumpido según el operador característico dado  $\mathfrak{A}$  (es decir, según la matriz dada  $A$  que satisface la condición A) con una igualdad introducida en lugar de la desigualdad correspondiente), se deben fijar las distribuciones del proceso en los momentos de acumulación de los saltos. Evidentemente, esto podemos hacerlo de una manera no unívoca. Las cuestiones relacionadas con la construcción de los procesos de Márkov para los cuales el operador dado  $\mathfrak{A}$  es característico, constituyen la llamada teoría de fronteras para los procesos de Márkov.

15.4.5. Ejemplos. 1) Proceso de crecimiento puro. Supongamos que  $X$  se compone de números enteros no negativos y sea dada una sucesión numérica  $a(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ , tal que  $0 < a(x) < \infty$ . Hagamos  $a(x, x+1) = a(x)$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ ,  $a(x, x) = -a(x)$  y, por fin,  $a(x, y) = 0$ , si  $y \neq x+1$ ,  $y \neq x$ . De este modo, queda definida la matriz  $A$  que satisface la condición A), con la particularidad de que  $\sum_{y \in X} a(x, y) = a(x, x) + a(x, x+1) = 0$ .

El primer sistema de ecuaciones de Kolmogórov tiene por expresión

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -a(x)P(t, x, y) + a(x)P(t, x+1, y),$$

$$x = 0, 1, 2, \dots$$

Escribamos el segundo sistema:

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -a(y)P(t, x, y) + a(y-1)P(t, x, y-1),$$

$$y = 1, 2, \dots$$

Pasando a la transformación de Laplace, es fácil de obtener

$$\varphi_p(x, y) = \left( \prod_{k=x}^{y-1} a(k) \right) \prod_{k=x}^y \frac{1}{p + a(k)},$$

donde  $\varphi_p(x, y) = \int_0^{\infty} e^{-pt} P(t, x, y) dt$ ,  $x, y \in X$ ,  $x \leq y$ ,  $p > 0$ . Si entre los números  $a(k)$  no hay iguales, entonces  $P(t, x, y) = 0$ , si



$y < x$ ,  $P(t, x, y) = 1 - e^{-a(x)t}$  y, cuando  $y > x$ ,

$$P(t, x, y) = \left( \prod_{h=x}^{y-1} a(h) \right) \sum_{h=x}^y \frac{e^{-a(h)t}}{b(h)},$$

donde  $b(k) = \prod_{\substack{r=x \\ r \neq k}}^y (a(r) - a(k))$ . Esta es una solución mínima.

El momento de la primera acumulación de saltos  $\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n$  representa en sí una suma de magnitudes aleatorias independientes  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , distribuidas según una ley exponencial, con la particularidad de que  $P_x(\tau_i > t) = e^{-a(x+i-1)t}$ . Por eso, para todo  $x \in X$ ,  $P_x(\zeta = +\infty) = 1$ , si, y sólo si, la serie  $\sum_{x \in X} [a(x)]^{-1}$  diverge.

Un proceso se llama proceso de crecimiento lineal, si  $a(x) = x\lambda$ ,  $x = 1, 2, \dots$ ,  $\lambda$  es un número entero. Es evidente que el proceso de crecimiento lineal es regular y sus probabilidades de paso coinciden con la solución mínima de la ecuación de Kolmogórov.

2. Procesos de reproducción y pérdida. Hagamos

$$a(x, y) = \begin{cases} -(\lambda_x + \mu_x), & \text{si } y = x, x = 0, 1, 2, \dots; \\ \lambda_x, & \text{si } y = x + 1, x = 0, 1, 2, \dots; \\ \mu_x, & \text{si } y = x - 1, x = 1, 2, \dots; \\ 0, & \text{si } |y - x| > 1. \end{cases}$$

Las ecuaciones de Kolmogórov tienen la forma

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -(\lambda_x + \mu_x) P(t, x, y) + \mu_x P(t, x-1, y) + \lambda_x P(t, x+1, y), \quad x = 0, 1, 2, \dots (\mu_0 = 0);$$

$$\frac{\partial P(t, x, y)}{\partial t} = -(\lambda_y + \mu_y) P(t, x, y) + \lambda_{y-1} P(t, x, y-1) + \mu_{y+1} P(t, x, y+1), \quad y = 0, 1, 2, \dots (\mu_0 = \lambda_{-1} = 0),$$

respectivamente, el primero y el segundo sistemas.

En los problemas de aplicación práctica un papel importante lo desempeñan las llamadas probabilidades estacionarias, es decir, los números  $p(x)$ ,  $x \in X$ , que satisfacen las condiciones  $p(x) \geq 0$ ,  $\sum_{x \in X} p(x) = 1$  y  $p(y) = \sum_{x \in X} p(x) P(t, x, y)$  para cualesquiera  $y \in X$ , y  $t \geq 0$ . Se puede mostrar que si  $\mu_x > 0$  para  $x = 1, 2, \dots$ , entonces la condición necesaria y suficiente para que exista la distribución estacionaria consiste en la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}.$$

Si esta serie converge, entonces

$$p(x) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{x-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_x} p(0), \quad x = 1, 2, \dots;$$

$$p(0) = \left( 1 + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{h-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_h} \right)^{-1}.$$

Si las probabilidades estacionarias existen, entonces  $p(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t, x, y)$ ,  $y \in X$ , cualquiera que sea  $x \in X$ .

## 15.5. Funcionales de los procesos de Márkov

**15.5.1. Funcionales multiplicativas.** Sea  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{S})$ . Una familia de funciones reales  $\alpha_t = \alpha_t(\omega)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , se denomina funcional multiplicativa homogénea, si están cumplidas las condiciones:

M1)  $\alpha_t$  es una magnitud aleatoria  $\overline{\mathfrak{R}}_t$ -medible para todo  $t \geq 0$ ;  
 M2) para cualesquiera  $t \geq 0$  y  $h > 0$ , casi por cierto respecto de la medida  $P_x$ , queda cumplida la correlación

$$\alpha_{t+h} = \alpha_h \theta_h \alpha_t,$$

cualquiera que sea  $x \in X$ .

En el p. 14.3. hemos considerado las funcionales multiplicativas que satisfacen una condición complementaria:

M3) para cualesquiera  $t \geq 0$  y  $x \in X$ , casi por cierto respecto a  $P_x$ , se verifica

$$0 \leq \alpha_t \leq 1.$$

Si  $X$  es un espacio topológico y el proceso es continuo a la derecha, entonces de ejemplo de funcional multiplicativa puede servir una familia de magnitudes

$$\alpha_t = \exp \left\{ \int_0^t v(\xi(s)) ds \right\},$$

donde  $v(x)$ ,  $x \in X$ , es una función continua acotada de valores reales. Si para todo  $x \in X$ , se verifica  $v(x) \leq 0$ , entonces  $\alpha_t$  satisfacen también la condición M3).

**15.5.2. Funcionales aditivas.** Una familia de magnitudes aleatorias  $\varphi_t = \varphi_t(\omega)$ ,  $t \geq 0$ ,  $\omega \in \Omega$ , se llama funcional aditiva homogénea del proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ , si

A1) para todo  $t \geq 0$  la magnitud aleatoria  $\varphi_t$  es  $\overline{\mathfrak{R}}_t$ -medible;  
 A2) para todo  $t \geq 0$  y todo  $h > 0$ , casi por cierto respecto de  $P_x$ , se verifica la correlación

$$\varphi_{t+h} = \varphi_h + \theta_h \varphi_t,$$

sea cual fuese  $x \in X$ .

Como ejemplo de funcional aditiva sirve la integral

$$\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

si  $v(x)$  es una función acotada continua en  $X$  y el proceso  $\xi(s)$  es continuo a la derecha.

Una funcional aditiva  $\varphi_t$  (omitimos aquí el término «homogénea») se llama no negativa, si para cualesquiera  $t \geq 0$  y  $x \in X$  se verifica  $P_x(\varphi_t \geq 0) = 1$ .

Dos funcionales  $\varphi_t$  y  $\tilde{\varphi}_t$  se denominan equivalentes, si para cualesquiera  $x \in X$   $t \geq 0$ , se verifica  $P_x(\varphi_t = \tilde{\varphi}_t) = 1$ . Una funcional  $\varphi_t$ ,  $t \geq 0$ , se llama continua, si para todo  $x \in X$ , casi por cierto respecto de  $P_x$ , las funciones  $\varphi_t(\omega)$  son continuas como funciones de  $t$  con  $\omega$  fijado. Para las funcionales aditivas homogéneas continuas con  $x \in X$  cualquiera se tiene

$$P_x\{\partial_h \varphi_t = \varphi_{t+h} - \varphi_t \text{ para cualesquiera } t \geq 0 \text{ y } h > 0\} = 1.$$

**Teorema 1.** Sea  $\varphi_t$  una funcional aditiva homogénea continua no negativa del proceso continuo a la derecha  $(\xi(t), \mathfrak{A}_t, P_x)$ . Hagamos  $g(t, x) = M_x e^{-\varphi_t}$ . Entonces, para cualesquiera  $x \in X$  y  $t > 0$

$$\varphi_t = \lim_{h \downarrow 0} \int_0^t \frac{1 - g(h, \xi(s))}{h} ds,$$

donde el límite se entiende en el sentido de convergencia en probabilidad  $P_x$ .

Supongamos que  $(\xi(t), \mathfrak{A}_t, P_x)$  es un proceso de Márkov continuo a la derecha en el espacio fásico topológico  $(X, \mathfrak{B})$ , donde  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos en  $X$  y sea  $\varphi_t$  una funcional de este proceso, aditiva continua homogénea y no negativa. Si  $f(x)$ ,  $x \in X$ , es una función boreliana no negativa, entonces, al hacer

$$I_t(f, \varphi) = \int_0^t f(\xi(s)) d\varphi_s,$$

obtendremos una nueva funcional del mismo tipo que  $\varphi_t$ . Observemos que la integral aquí se entiende en el sentido de Lebesgue — Stieltjes. Si la función  $f(x)$  es acotada y continua, entonces

$$I_t(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi(s_{k+1})) [\varphi(s_{k+1}) - \varphi(s_k)],$$

donde  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ ,  $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ .

**15.5.3. Funcionales  $W$ .** Una funcional aditiva homogénea no negativa y continua  $\varphi_t$  se llama funcional  $W$ , si para todo  $t \geq 0$

$$\sup_{x \in X} M_x \varphi_t < \infty.$$

Si  $\varphi_t$  es una funcional  $W$ , entonces para cualesquiera  $n$  y  $t \geq 0$  naturales se tiene

$$\sup_{x \in X} M_x (\varphi_t)^n \leq n! (\sup_{x \in X} M_x \varphi_t)^n.$$

Una función

$$f_t(x) = M_x \varphi_t, \quad t \geq 0, x \in X,$$

se llama característica de la funcional  $W$ . Se puede mostrar que la funcional  $W$  se determina por su característica unívocamente, siendo

$$\varphi_t = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_{\Delta s_k}(\xi(s_k)),$$

donde  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t$ ,  $\Delta s_k = s_{k+1} - s_k$ , mientras que el límite se entiende en el sentido de convergencia en media cuadrática en la medida  $P_x$ , cualquiera que sea  $x \in X$ .

La característica de la funcional  $W$  satisface las condiciones:

W1)  $f_t(x)$  es, para  $t \geq 0$  fijado, una función  $\mathfrak{B}$ -medible de  $x$  y, para  $x \in X$  fijado, es continua respecto de  $t$  y no decrece monótonamente; además,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t(x) = 0, \quad \sup_{x \in X} f_t(x) < \infty.$$

W2) para cualesquiera  $t > 0$ ,  $s > 0$  y  $x \in X$  se tiene

$$f_{t+s}(x) = f_t(x) + M_x f_s(\xi(t)).$$

Toda función  $f_t(x)$ , que satisface las condiciones W1) y W2), se llama función  $W$ .

El teorema que sigue contiene una condición necesaria y suficiente para que a una función  $W$  le corresponda una funcional  $W$ .

**Teorema 2.** Supongamos que  $X$  es un espacio separable métrico completo,  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ , un proceso continuo a la derecha y que la función  $f_t(x)$  satisface las condiciones W1) y W2). Para que exista una funcional  $W\varphi_t$ , para la cual

$$f_t(x) = M_x \varphi_t,$$

es necesario y suficiente que para cualesquiera  $x \in X$  y  $t \geq 0$  sea

$$\lim_{h \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0} M_x \frac{1}{h} \int_0^t f_h(\xi(s)) f_\lambda(\xi(s)) ds = 0.$$

Una condición sencilla suficiente nos da el

**Teorema 3.** Supongamos que el proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  satisface las condiciones del teorema antecedente y la función  $W f_t(x)$  satisface la condición

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{x \in X} f_t(x) = 0.$$

En este caso existe una funcional  $W \varphi_t$  tal que  $f_t(x) = M_x \varphi_t$ , siendo

$$\varphi_t = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \frac{f_h(\xi(s))}{h} ds,$$

donde el límite se entiende en el sentido de convergencia media cuadrática en la medida  $P_x$ , cualquiera que sea  $x \in X$ .

Sea, ahora,  $f_t(x)$  una función  $W$  arbitraria. Siempre existe un límite  $f(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(x)$ , igual, quizás, al infinito. Si  $f(x) < \infty$  para  $x \in X$ , entonces  $f(x)$  satisface las condiciones:

E1)  $T_t f(x) \leq f(x)$  para cualesquiera  $x \in X$ ,  $t \geq 0$ ;  $f(x) \geq 0$ ;

E2)  $\lim_{t \downarrow 0} T_t f(x) = f(x)$  para todo  $x \in X$ .

Toda función satisfaciendo a las condiciones E1) y E2) se denomina excesiva. Si una función excesiva finita  $f(x)$  sirve de límite, para  $t \uparrow +\infty$ , de la característica  $f_t(x)$  de cierta funcional  $W\varphi_t$ , entonces existe el límite

$$\varphi_\infty = \lim_{t \uparrow +\infty} \varphi_t.$$

En este caso

$$f(x) = M_x \varphi_\infty.$$

Según  $f(x)$  podemos restablecer con facilidad la característica de la funcional  $W\varphi_t$ . A saber,

$$f_t(x) = f(x) - T_t f(x).$$

De este modo, si para la funcional  $W\varphi_t(x)$  existe  $\varphi_\infty$  y  $f(x) = M_x \varphi_\infty < \infty$ , entonces la funcional  $\varphi_t$  se define unívocamente por la función  $f(x)$ . Del teorema 3 se deduce que la función excesiva  $f(x)$  define la funcional  $W$ , siempre que

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in X} [f(x) - T_t f(x)] = 0.$$

15.5.4. Ejemplos. Examinemos algunos ejemplos de funcionales  $W$  del proceso de Wiener. Sea  $X = R^m$ , donde  $R^m$  es un espacio euclídeo  $m$ -dimensional y sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos en  $R^m$ . Un proceso de Márkov homogéneo continuo con la probabilidad de paso

$$P(t, x, \Gamma) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \int_{\Gamma} \exp \left\{ -\frac{|y-x|^2}{2t} \right\} dy, \quad t > 0, \quad x \in R^m,$$

es un proceso de Wiener.

1. Sea, primero,  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso de Wiener unidimensional. Hagamos

$$f_t(x) = \int_0^t (2\pi s)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{(x_0 - x)^2}{2s} \right\} ds, \quad t > 0, \quad x \in R^1,$$

donde  $x_0$  es un punto fijado de  $R^1$ . Es fácil de comprobar que  $f_t(x)$  es una función  $W$ . Puesto que  $f_t(x) \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$ , entonces, de acuerdo al teorema 3, existe una funcional  $W\varphi_t$ , para la cual

$$f_t(x) = M_x \varphi_t, \quad t \geq 0, \quad x \in R^1.$$

Luego, como  $f_t(x) t^{-1} \rightarrow \delta(x - x_0)$  para  $t \downarrow 0$ , donde  $\delta(x - x_0)$  es una función  $\delta$  de Dirac (es decir, una función, para la cual

$$\int_{R^1} \delta(x - x_0) h(x) dx = h(x_0)$$

para todo  $h \in C(R^1)$ , entonces la funcional  $\varphi_t$  puede escribirse simbólicamente en la forma

$$\varphi_t = \int_0^t \delta(\xi(s) - x_0) ds.$$

Esta funcional se denomina tiempo local en el punto  $x_0$ . No es difícil hallar la distribución de la funcional  $\varphi_t$ . Se expresa así:

$$P_x\{\varphi_t < a\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a + |x - x_0|)/\sqrt{2t}} e^{-u^2} du, \quad 0 < a < \infty, \\ x \in R^1, \quad t \geq 0.$$

Cuando  $a \leq 0$ ,  $P_x\{\varphi_t < a\} = 0$ .

El tiempo local queda incrementado solamente en aquellos momentos de tiempo, cuando el proceso  $\xi(t)$  cae en el punto  $x_0$ . Se puede mostrar que

$$\varphi_t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \chi_\varepsilon(|\xi(t) - x_0|) ds,$$

donde  $\chi_\varepsilon(x)$  es el indicador del intervalo  $[0, \varepsilon]$ .

2. Supongamos, ahora, que  $m \geq 1$  y  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  es un proceso de Wiener en  $R^m$ . Hagamos  $S = \{x: x \in R^m, (x, v) = 0\}$ , donde  $v$  es un vector fijado de  $R^m$  con  $|v| \neq 0$ , mientras que  $(x, v)$  es un producto escalar en  $R^m$ . Designemos mediante  $r(x)$  la distancia entre  $x$  y el hiperplano  $S$ . Es fácil comprobar que la función

$$f_t(x) = \int_0^t (2\pi s)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{r^2(x)}{2s}\right\} ds, \quad t \geq 0, \quad x \in R^m,$$

satisface las condiciones del teorema 3 y, por lo tanto, existe una funcional  $W\varphi_t$  con la característica  $f_t(x)$ . Esta funcional se llama tiempo local en el hiperplano  $S$ . Como que  $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} f_t(x) = \delta_S(x)$ ,

donde  $\delta_S(x)$  se determina por la correlación

$$\int_{R^m} \delta_S(x) h(x) dx = \int_S h(x) d\sigma \quad (5.1)$$

(aquí,  $h$  es una función terminal continua arbitraria, y la integral a la derecha es de superficie), entonces la funcional  $\varphi_t$  se escribe, natural-

mente, en la forma

$$\varphi_t = \int_0^t \delta_S(\xi(\tau)) d\lambda.$$

Su distribución se define por la fórmula

$$P_x(\varphi_t < a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(a+r(x))/\sqrt{2t}} e^{-u^2} du, \quad a > 0, \quad x \in R^m, \quad t \geq 0.$$

3. De modo análogo podemos determinar la funcional  $W$

$$\varphi_t = \int_0^t \delta_S(\xi(\tau)) d\tau$$

del proceso de Wiener  $m$ -dimensional para una esfera  $S$  de radio  $R$  y con centro en el origen de coordenadas. Esta será una funcional  $W$  de característica

$$M_x \varphi_t = \int_0^t d\tau \int_S (2\pi\tau)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2\tau}\right\} d\sigma_y.$$

Aquí, la segunda integral es de superficie. La función  $\delta_S(x)$  se define por la correlación (5.1), donde la integral del segundo miembro se calcula por la superficie de la esfera  $S$ . La funcional  $\varphi_t$  se llama tiempo local en la esfera  $S$ . Si  $m \geq 3$ , existe  $\varphi_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t$ . La función de distribución de la magnitud aleatoria  $\varphi_\infty$  tiene por expresión

$$P_x(\varphi_\infty < a) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{m-2}{2R}a}, & \text{si } |x| \leq R; \\ 1 - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} + \left(\frac{R}{|x|}\right)^{m-2} (1 - e^{-\frac{m-2}{2R}a}), & \text{si } |x| > R, \end{cases}$$

donde  $x \in R^m$ ,  $0 \leq a < \infty$ . Cuando  $a < 0$ ,  $P_x(\varphi_\infty < a) = 0$ . Hemos de notar también la fórmula

$$M_x \varphi_\infty = \begin{cases} \frac{2R}{m-2}, & \text{si } |x| \leq R; \\ \frac{2R^{m-1}}{(m-2)|x|^{m-2}}, & \text{si } |x| > R. \end{cases}$$

## 15.6. Transformaciones de los procesos de Márkov

15.6.1. Sustitución aleatoria del tiempo. Examinemos ciertas transformaciones de los procesos de Márkov. Un tipo de transformaciones ya se ha considerado en el p. 14.3. Estuvo relacionado con las

funcionales multiplicativas del proceso. Con la ayuda de una funcional multiplicativa el proceso pudo ser transformado en cierto subproceso. Con las funcionales aditivas de un proceso está asociada otra transformación del proceso de Márkov la cual se llama sustitución aleatoria del tiempo. Describamos brevemente esta transformación.

Sea  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso riguroso de Márkov en el espacio topológico  $(X, \mathfrak{B})$ . Supongamos que este proceso es continuo a la derecha y  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos borelianos de  $X$ . Supongamos, además, que está dada una funcional continua homogénea aditiva  $\varphi_t$  del proceso mencionado y que esta funcional satisface la condición

$$P_x \{ \varphi_t > 0 \} = 1$$

para cualesquiera  $t > 0$  y  $x \in X$ . En este caso podemos distinguir cierto conjunto  $\tilde{\Omega} \subset \Omega$  tal que  $P_x(\tilde{\Omega}) = 1$  para todo  $x \in X$  y para  $\omega \in \tilde{\Omega}$  la función  $\varphi_t(\omega)$  será continua y monótona creciente. Conveniamos en considerar que  $\Omega = \tilde{\Omega}$ .

Examinemos ahora una familia de momentos de Márkov  $\tau_t$ ,  $t \geq 0$ , la que se determina por la correlación:

$$\tau_t(\omega) = \inf \{ s : \varphi_s(\omega) \geq t \}$$

para  $t \in [0, \tilde{\zeta}(\omega))$ , donde  $\tilde{\zeta}(\omega) = \varphi_\infty(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(\omega)$ . Hagamos

$\eta(t) = \eta(t, \omega) = \xi(\tau_t(\omega), \omega)$  para  $t \in [0, \tilde{\zeta}(\omega))$ . Se puede mostrar que el juego de objetos  $(\eta(t), \tilde{\zeta}, \mathfrak{R}_{\tau_t}, P_x)$  forma un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  y con un espacio de sucesos elementales  $\Omega$ . Dicen que el proceso  $(\eta(t), \tilde{\zeta}, \mathfrak{R}_{\tau_t}, P_x)$  se ha obtenido del proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  por sustitución aleatoria del tiempo correspondiente a la funcional  $\varphi_t$ . Se puede mostrar que si el proceso de partida era estándar, el transformado también lo será.

Supongamos ahora que el proceso de partida es de Feller y, además, estocástico continuo. Señalemos cómo se puede hallar la resolvente del proceso transformado, si la sustitución del tiempo se ha realizado con la ayuda de una funcional aditiva

$$\varphi_t = \int_0^t v(\xi(s)) ds, \quad (6.1)$$

donde  $v(x)$ ,  $x \in X$ , es una función positiva boreliana. Es evidente que para  $f \in C(X)$  se tiene ( $\lambda > 0$ )

$$\begin{aligned} \tilde{R}_\lambda^{(v)} f(x) &= M_x \int_0^{\tilde{\zeta}(\omega)} e^{-\lambda s} f(\eta(s)) ds = \\ &= M_x \int_0^\infty e^{-\lambda \varphi_t} f(\xi(t)) d\varphi_t = \\ &= M_x \int_0^\infty \exp \left\{ -\lambda \int_0^t v(\xi(s)) ds \right\} f(\xi(t)) v(\xi(t)) dt. \end{aligned}$$



Para  $f, g \in B(X)$  hagamos

$$Q_\lambda(t, x, f, g) = M_x f(\xi(t)) \exp \left\{ -\lambda \int_0^t g(\xi(s)) ds \right\},$$

donde  $t \geq 0$ ,  $x \in X$ ,  $\lambda$  es un número positivo. La función  $Q_\lambda(t, x, f, g)$  es la única solución de la ecuación

$$Q_\lambda(t, x, f, g) = \int_X f(y) P(t, x, dy) - \\ - \lambda \int_0^t ds \int_X Q_\lambda(t-s, y, f, g) g(y) P(s, x, dy).$$

Por esto

$$\tilde{R}_\lambda^{(v)} f(x) = \int_0^\infty Q_\lambda(t, x, f v, v) dt.$$

Indiquemos la relación existente entre los operadores característicos del proceso de partida y del transformado. Supongamos que el proceso  $(\eta(t), \xi, \mathfrak{R}_t, P_x)$  se ha obtenido del proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  por sustitución aleatoria del tiempo correspondiente a la funcional  $\varphi_t$ . Supongamos también que la funcional  $\varphi_t$  está definida por la fórmula (6.1) con la función continua positiva  $v(x)$ ,  $x \in X$ . Designemos mediante  $\mathfrak{U}$  y  $\tilde{\mathfrak{U}}$  los operadores característicos de los procesos de partida y transformado, respectivamente. Entonces, en cada punto  $x \in X$  tenemos  $D_{\mathfrak{U}}^x = D_{\tilde{\mathfrak{U}}}^x$  y  $\tilde{\mathfrak{U}}f(x) = [v(x)]^{-1} \mathfrak{U}f(x)$ .

15.6.2. Transformación del espacio fásico. Consideremos las transformaciones de los procesos de Márkov ligadas a la transformación de un espacio fásico. Sea  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso de Márkov en el espacio fásico  $(X, \mathfrak{B})$  con la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$ . Supongamos que  $\gamma$  es una aplicación medible del espacio  $(X, \mathfrak{B})$  en el espacio medible  $(\tilde{X}, \tilde{\mathfrak{B}})$  tal que  $\gamma X = \tilde{X}$  y la imagen del conjunto medible en la aplicación  $\gamma$  es medible. Supongamos además que para todo  $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathfrak{B}}$  es válida la igualdad

$$P(t, x, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}) = P(t, y, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma}), \quad t \geq 0$$

cualesquiera que sean  $x, y \in X$ , para los cuales  $\gamma x = \gamma y$ .

Hagamos  $\tilde{\xi}(t) = \gamma \xi(t)$  y designemos mediante  $\tilde{\mathfrak{R}}_t$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de sucesos generada por los sucesos del tipo  $(\xi(s) \in \Gamma)$  para  $s \leq t$ ,  $\tilde{\Gamma} \in \tilde{\mathfrak{B}}$ . Para  $A \in \mathfrak{R} = \tilde{\mathfrak{R}}_\infty$  definamos las medidas  $\tilde{P}_{\gamma x}(A) = P_x(A)$ . En este caso un juego de objetos  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\mathfrak{R}}_t, \tilde{P}_x)$  forma un proceso de Márkov cuya probabilidad de paso es  $\tilde{P}(t, \tilde{x}, \tilde{\Gamma}) = P(t, x, \gamma^{-1}\tilde{\Gamma})$ , donde  $x$  es un punto arbitrario del conjunto  $\gamma^{-1}\tilde{x}$ ,

$t \geq 0$ ,  $\tilde{\Gamma} \in \mathfrak{B}$ . Diremos que este proceso se ha obtenido del proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$  por transformación del espacio fásico  $\gamma$ .

La transformación  $\gamma$  induce una aplicación  $\gamma^*$  del espacio  $B(\tilde{X})$  en el espacio  $B(X)$ , determinada por la fórmula

$$\gamma^*f(x) = f(\gamma x), \quad f \in B(\tilde{X}), \quad x \in X.$$

Si  $T_t$  y  $\tilde{T}_t$  son semigrupos de los operadores correspondientes al proceso de partida y al transformado, respectivamente, y si  $A$  y  $\tilde{A}$  son sus operadores infinitesimales respectivos, entonces se verifican las igualdades:

$$\gamma^*\tilde{T}_t = T_t\gamma^*, \quad \gamma^*\tilde{A} = A\gamma^*,$$

con la particularidad de que  $f \in D_{\tilde{A}}$  cuando, y sólo cuando,  $\gamma^*f \in D_A$ .

Si  $X$  es un espacio topológico y la transformación  $\gamma$  es continua y abierta (es decir, una imagen del conjunto abierto es un conjunto abierto), entonces los procesos de Feller pasan, al realizarse la transformación  $\gamma$ , a los de Feller.

**EJEMPLO.** Supongamos que  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$  es un proceso de Wiener unidimensional y la transformación  $\gamma$  actúa de acuerdo con la fórmula  $\gamma x = |x|$ ,  $x \in R^1$ . Entonces,  $\tilde{X} = [0, \infty)$ . No es difícil de comprobar que todas las exigencias impuestas en la transformación  $\gamma$  y la probabilidad de paso se cumplen, y como resultado de la transformación se obtiene el proceso  $(\tilde{\xi}(t), \tilde{\mathfrak{R}}_t, \mathbf{P}_x)$  en  $[0, \infty)$  que se llama proceso de Wiener con reflejo en cero. Su probabilidad de paso se determina por la fórmula

$$P(t, x, \Gamma) = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{\Gamma} \left[ \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} + \exp \left\{ -\frac{(y+x)^2}{2t} \right\} \right] dy,$$

donde  $t > 0$ ,  $x \in [0, \infty)$ ,  $\Gamma$  es un subconjunto boreliano en el semieje  $[0, \infty)$ .

**15.6.3. Procesos invariantes.** Supongamos que una transformación  $\gamma$  aplica biunívocamente  $X$  en  $X$ . En este caso la probabilidad de paso  $\tilde{P}(t, x, \Gamma)$  del proceso transformado está asociada con la probabilidad de paso del proceso de partida  $P(t, x, \Gamma)$  mediante una correlación  $\tilde{P}(t, x, \Gamma) = P(t, \gamma^{-1}x, \gamma^{-1}\Gamma)$ . Un proceso de Márkov con la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$  se llama invariante respecto de la transformación  $\gamma$ , si están cumplidas las condiciones:

- a) para todo  $\omega \in \Omega$  existe tal  $\omega' \in \Omega$  que  $\gamma\xi(s, \omega) = \xi(s, \omega')$  con  $s \geq 0$  cualquiera;  
b) para cualesquiera  $t > 0$ ,  $x \in X$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  se tiene

$$P(t, x, \Gamma) = P(t, \gamma^{-1}x, \gamma^{-1}\Gamma).$$

Determinemos el operador  $\theta_\gamma$  que aplica la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{R}_\infty$  en  $\mathfrak{R}_\infty$ , haciendo  $\theta_\gamma \{ \xi(t) \in \Gamma \} = \{ \gamma\xi(t) \in \Gamma \} = \{ \xi(t) \in \gamma^{-1}\Gamma \}$  y exigiendo que  $\theta_\gamma$  conserve todas las operaciones teóricas de multiplicación. Se puede mostrar que si  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, \mathbf{P}_x)$  es un proceso de Márkov invariante respecto de la transformación  $\gamma$ , entonces para cualesquiera  $A \in \mathfrak{R}$

y  $x \in X$  se tiene

$$P_{V^{-1}x}(\theta_V A) = P_x(A).$$

Es fácil ver que el proceso de Wiener  $m$ -dimensional es invariante respecto de todos los movimientos del espacio euclídeo  $R^m$ .

Sea  $U_R(x_0)$  una bola en  $R^m$  de radio  $R$  con el centro en el punto  $x_0$ . Designemos mediante  $\tau_R$  el momento de la primera salida del proceso de Wiener de la bola  $U_R(x_0)$ . Entonces, de la invariancia de un proceso de Wiener, respecto de todos los movimientos, resulta fácil deducir que  $\xi(\tau_R)$  en la medida  $P_{x_0}$  tiene distribución uniforme en la esfera que limita la bola  $U_R(x_0)$ . Por ello,

$$M_{x_0} f(\xi(\tau_R)) = \frac{1}{\sigma_R^{(m)}} \int_{S_R(x_0)} f(y) d\sigma,$$

donde  $S_R(x_0) = \{y : y \in R^m, |y - x_0| = R\}$ ,  $\sigma_R^{(m)} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})} R^{m-1}$  es el

área de la esfera  $S_R(x_0)$ , en tanto que la integral es de superficie, extendida por la esfera  $S_R(x_0)$ . En otras palabras,  $M_{x_0} f(\xi(\tau_R))$  es la media de la función  $f(y)$  por la esfera  $S_R(x_0)$ . Luego, no es difícil hallar

$$M_x \tau_R = \frac{1}{m} (R^2 - |x - x_0|^2), \quad x \in U_R(x_0).$$

Así pues, si  $\mathfrak{A}$  es un operador característico del proceso de Wiener  $m$ -dimensional y  $f \in D_{\mathfrak{A}}$ , entonces

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \lim_{R \downarrow 0} \frac{m}{R^2} \frac{1}{\sigma_R^{(m)}} \int_{S_R(x_0)} [f(y) - f(x_0)] d\sigma.$$

El operador en el segundo miembro de esta igualdad se denomina operador de Blaschke — Priválov.

## 15.7. Procesos homogéneos de difusión en los espacios euclídeos

**15.7.1. Definición.** Supongamos que  $R^m$  es un espacio euclídeo  $m$ -dimensional y  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de sus subconjuntos borelianos. Para  $x \in R^m$  designemos mediante  $D_{\mathfrak{A}}^x$  una totalidad de todas las funciones reales, cada una de las cuales está definida y es dos veces continuamente derivable en cierto entorno del punto  $x$ . Un proceso continuo rigurosamente de Márkov  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  en el espacio fásico  $(R^m, \mathfrak{B})$  se llama de difusión, si para todo  $x \in R^m$  tiene lugar la inclusión:  $D_{\mathfrak{A}}^x \subset D_{\mathfrak{A}}$ , donde  $\mathfrak{A}$  es el operador característico del proceso.

En otras palabras, el operador característico de un proceso de difusión está definido en toda función dos veces continuamente derivable en el entorno del punto  $x \in R^m$ .

Supongamos que en  $R^m$  está elegida una base y sean  $x^1, x^2, \dots, x^m$  las coordenadas del punto  $x \in R^m$  en esta base. Hagamos, para  $x_0 \in R^m$ ,  $\Delta^{ij}(x) = (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j)$ ,  $\Delta^i(x) = x^i - x_0^i$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , donde  $x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^m$  son las coordenadas del punto  $x_0$  en la base elegida. Las funciones  $\Delta_0(x) \equiv 1$ ,  $\Delta^i(x)$ ,  $\Delta^{ij}(x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , son dos veces continuamente derivables en el entorno del punto  $x_0$ . Por esto, si  $\mathfrak{A}$  es un operador característico del proceso de difusión  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  quedan definidas las funciones

$$\begin{aligned} b^{ij}(x_0) &= \mathfrak{A}\Delta^{ij}(x_0), \quad i, j = 1, 2, \dots, m; \\ a^i(x_0) &= \mathfrak{A}\Delta^i(x_0), \quad i = 1, 2, \dots, m; \\ c(x_0) &= -\mathfrak{A}\Delta_0(x_0) = -\mathfrak{A}1(x_0). \end{aligned}$$

De aquí se deduce con facilidad que si  $f \in D_2^0$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}f(x_0) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^i \partial x^j} + \\ &+ \sum_{i=1}^m a^i(x_0) \frac{\partial f(x_0)}{\partial x^i} - c(x_0) f(x_0). \end{aligned}$$

Con ello,  $c(x_0) \geq 0$  y la matriz  $b(x_0)$  con los coeficientes  $b^{ij}(x_0)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , está definida de modo no negativo en el sentido que  $(b(x_0)\theta, \theta) \geq 0$  para todo  $\theta \in R^m$ .

No es difícil de advertir, luego, que al pasar a otra base, el operador  $\mathfrak{A}$  tendrá la misma forma. Sólo variarán los coeficientes  $b^{ij}(x_0)$  y  $a^i(x_0)$ .

De este modo, si un proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  en  $(R^m, \mathfrak{B})$  es de difusión, existen una función matricial  $b(x)$ , una función vectorial  $a(x)$  y una función numérica no negativa  $c(x)$  tales que la contracción del operador  $\mathfrak{A}$  en las funciones dos veces continuamente derivables será un operador diferencial elíptico de segundo orden del tipo citado arriba. La función  $c(x)$  se llama coeficiente de interrupción, el vector  $a(x)$  es el coeficiente de traslado, mientras que la matriz  $b(x)$ , matriz de difusión.

El teorema que sigue contiene las condiciones que son suficientes para que, si se cumplen, el proceso sea de difusión.

**Teorema 1.** Sea  $(\xi^*(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso continuo en  $(R^m, \mathfrak{B})$ . Supongamos que para todo punto  $x \in R^m$  quedan cumplidas las condiciones:

- 1) existe tal entorno  $U_0$  del punto  $x$  que  $M_x \tau_{U_0} < \infty$ , donde  $\tau_{U_0}$  es el momento de la primera salida de  $U_0$ ;
- 2) en cierto sistema de coordenadas existen los límites

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} [1 - P(t, x, R^m)] = c(x);$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{R^m} (y^i - x^i) P(t, x, dy) = a^i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \int_{R^m} (y^i - x^i)(y^j - x^j) P(t, x, dy) = b^{ij}(x), \quad i, j = 1, 2, \dots, m,$$

con la particularidad de que las razones bajo el signo de los límites son uniformemente acotadas para  $x \in R^m$ ,  $t \geq 0$ , y las funciones  $c(x)$ ,  $a^i(x)$  y  $b(x)$  son continuas en el punto  $x$ .

En este caso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  es un proceso de difusión y para él  $c(x)$  es el coeficiente de interrupción,  $a(x) = (a^1(x), \dots, a^m(x))$ , el vector de traslado,  $b(x) = \|b^{ij}(x)\|$ , la matriz de difusión.

15.7.2. Construcción de los procesos de difusión. Sean dadas las funciones  $c(x) \geq 0$ ,  $a(x) = (a^1(x), \dots, a^m(x))$  y la matriz  $b(x) = \|b^{ij}(x)\|$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $x \in R^m$ .

Supongamos que están cumplidas las condiciones:

A) las funciones  $a^i(x)$ ,  $b^{ij}(x)$  y  $c(x)$  son acotadas y satisfacen la condición de Hölder en  $R^m$  (la función  $f(x)$  satisface la condición de Hölder en  $R^m$ , si existen las constantes positivas  $K$  y  $\alpha$  tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|^\alpha, \quad x, y \in R^m;$$

B) existe tal constante  $\rho > 0$  que para cualesquiera  $x \in R^m$  y  $\theta \in R^m$

$$(b(x)\theta, \theta) = \sum_{i,j=1}^m b^{ij}(x) \theta^i \theta^j \geq \rho |\theta|^2;$$

C) para todo  $x \in R^m$ ,  $c(x) \geq 0$ .

**Teorema 2.** Supongamos que en  $R^m$  están dadas las funciones  $a(x)$ ,  $b(x)$  y  $c(x)$  que satisfacen las condiciones A) - C). En este caso, existe en el espacio fásico  $(R^m, \mathfrak{B})$  un proceso de difusión  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$  para el cual

$$\mathfrak{A}f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m b^{ij} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^m a^i(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} - c(x)f(x),$$

donde  $f \in D_{\mathfrak{A}}^2$  y  $\mathfrak{A}$  es un operador característico del proceso  $(\xi(t), \zeta, \mathfrak{R}_t, P_x)$ . Un semigrupo que corresponde al proceso deja invariante el espacio  $C_0(R^m)$  ( $C_0(R^m)$  es un espacio de funciones continuas en  $R^m$  que tienden a cero cuando  $|x| \rightarrow \infty$ ). Para toda función acotada dos veces continuamente derivable  $f(x)$ ,  $x \in R^m$ , la función

$$u(t, x) = M_x f(\xi(t)) = T_t f(x)$$

es dos veces continuamente derivable respecto de  $x$ , diferenciable respecto de  $t$  y satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}u, \quad t > 0, \quad x \in R^m$$

con la condición inicial  $\lim_{t \rightarrow 0} u(t, x) = f(x)$ . Para la probabilidad de paso  $P(t, x, \Gamma)$  del proceso existe una densidad  $G(t, x, y)$ ,  $t > 0$ ,  $x, y \in R^m$ , respecto de la medida lebesgueana en  $R^m$ , con la particularidad de que  $G(t, x, y)$  sirve de solución fundamental para la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathfrak{A}u.$$

La demostración de este teorema está basada en las propiedades de las soluciones fundamentales de las ecuaciones parabólicas. En el

capítulo 19 consideraremos también otros métodos de construcción de los procesos de difusión.

15.7.3. Ejemplo que muestra la existencia de procesos continuos de Márkov que no son los de difusión.

Definamos la familia de operadores  $T_t$ ,  $t > 0$ , que actúan en el espacio  $B(R^1)$ , rigiéndonos por la fórmula

$$T_t f(x) = \int_{R^1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2t} \right\} f(y) dy + \\ + \frac{c}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y+|x|)^2}{2t}} [f(y) - f(-y)] dy, \quad x \in R^1; \quad f \in B(R^1),$$

donde  $c$  es un número real,  $|c| < 1$ . Se puede mostrar que la familia de operadores  $\{T_t, t > 0\}$  forma un semigrupo de operadores al cual corresponde en el espacio  $(R^1, \mathfrak{B})$  un proceso de Márkov continuo  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ . Cuando  $c = 0$ , este proceso será de Wiener. Si  $c = 1$ , entonces hasta que llegue el momento de la primera caída en el semieje  $(0, \infty)$  este proceso se porta como de Wiener, en tanto que después de dicho momento, como un proceso de Wiener con reflexión en cero. Una descripción análoga es también válida para  $c = -1$ . Para  $0 < |c| < 1$  obtenemos ciertos procesos «intermedios».

No es difícil mostrar que si la función  $f(x)$  es dos veces continuamente derivable en el entorno del punto  $x_0 \neq 0$ , entonces  $f \in D_{\mathfrak{A}}^{x_0}$  y

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0), \quad \text{donde } \mathfrak{A} \text{ es el operador característico del proceso.}$$

Si  $f(x)$  es dos veces continuamente derivable en el entorno del punto  $x = 0$ , entonces, para  $c \neq 0$ ,  $f \in D_{\mathfrak{A}}$  sólo en aquel caso cuando  $f'(0) =$

$= 0$ , siendo  $\mathfrak{A}f(0) = \frac{1}{2} f''(0)$ . De este modo, el proceso en consideración no pertenece a los de difusión cuando  $c \neq 0$ . El carácter de difusión del movimiento se perturba en el punto  $x = 0$ .

El proceso examinado es un proceso de difusión generalizado en el siguiente sentido. Hagamos

$$a(t, x) = \frac{1}{t} M_x(\xi(t) - x) = \frac{1}{t} \int_{R^1} (y-x) P(t, x, dy);$$

$$b(t, x) = \frac{1}{t} M_x(\xi(t) - x)^2 = \frac{1}{t} \int_{R^1} (y-x)^2 P(t, x, dy), \quad t > 0, \quad x \in R^1$$

Entonces, para toda función terminal continua  $\varphi(x)$ ,  $x \in R^1$ ,

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{R^1} \varphi(x) a(t, x) dx = c\varphi(0).$$

Para la función  $b(t, x)$  se tiene la siguiente correlación

$$\lim_{t \downarrow 0} b(t, x) = 1$$

para todo  $x \in R^1$ , con la particularidad de que  $|b(t, x)| \ll K$  para cualesquiera  $x \in R^1$  y  $t > 0$ , donde  $K$  es una constante. La primera de estas correlaciones significa que el «coeficiente de traslado» del proceso en consideración es igual a  $c\delta(x)$ , donde  $\delta(x)$  es una función  $\delta$  de Dirac. La segunda correlación dice que el coeficiente de difusión es igual a uno.

## 15.8. Procesos continuos en una recta

**15.8.1. Puntos regulares.** El hecho de que una recta  $R^1$  es un conjunto ordenado permite describir todos los procesos continuos y rigurosos de Márkov con valores en  $R^1$ .

Sea  $(\xi_t(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$  un proceso riguroso de Márkov, continuo en cierto intervalo  $\Delta \subset R^1$ . Un punto  $y \in \Delta$  se llama accesible desde el punto  $x \in \Delta$ , si  $P_x\{\tau_y < \infty\} > 0$ , donde  $\tau_y$  es el momento de la primera obtención del punto  $y$  (éste es un momento de Márkov). Designemos con  $\Delta_x$  la totalidad de todos aquellos  $y \in \Delta$  que son accesibles desde  $x$ . En este caso  $\Delta_x$  es un intervalo (cerrado, abierto o semiabierto, finito o infinito). Llamemos el punto  $x \in \Delta$  regular, si están cumplidas las siguientes condiciones:

- 1)  $x$  es un punto interior del intervalo  $\Delta_x$ ;
- 2) existen  $x_1, x_2 \in \Delta_x$  tales que  $x_1 < x < x_2$ , y el punto  $x$  es accesible desde los puntos  $x_1$  y  $x_2$ .

Sobre el comportamiento del proceso en un punto regular se puede juzgar según el siguiente teorema.

**Teorema 1.** Si  $x$  es un punto regular, para todo  $\delta > 0$  se tiene:

$$P_x\left\{\sup_{0 \leq s \leq \delta} \xi(s) > x\right\} = 1, \quad P_x\left\{\inf_{0 \leq s \leq \delta} \xi(s) < x\right\} = 1.$$

**15.8.2. Procesos en un intervalo cerrado.** Describamos todos los procesos de Márkov, continuos y rigurosos en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ , suponiendo que todos los puntos de dicho intervalo son regulares, los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  son accesibles desde el interior y el punto arbitrario  $x \in (\alpha, \beta)$  es accesible desde los puntos  $\alpha$  y  $\beta$ . Designemos mediante  $\xi$  el momento de la primera salida del conjunto  $(\alpha, \beta)$ . Entonces, o  $\xi(\xi) = \alpha$ , o bien  $\xi(\xi) = \beta$ . Hagamos  $m(x) = P_x\{\xi(\xi) = \beta\}$ .

**Teorema 2.** La función  $m(x)$  es continua, crece de manera estrictamente monótona y  $m(\alpha) = 0$ ,  $m(\beta) = 1$ . El proceso  $\{m(\xi(t \wedge \xi)) - m(\xi, (0)), \mathfrak{R}_t, P_x\}$  es una martingala continua de cuadrado integrable cuya característica representa en sí una funcional  $W$  del proceso  $(\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x)$ .

De este teorema se deduce que al realizar la transformación del espacio fásico con ayuda de la función  $m(x)$ , obtendremos en el segmento  $[0, 1]$  un proceso, para el cual  $m(x) = x$ .

Convengamos en considerar que tal sustitución ya se ha efectuado y, por consiguiente, en el segmento  $[0, 1]$  se examina un proceso para el cual

$$P_x\{\xi(\xi) = 1\} = x; \quad P_x\{\xi(\xi) = 0\} = 1 - x.$$

Consideremos una función  $n(x) = M_x \xi^k$ . Se puede mostrar que para todo  $k = 1, 2, \dots$  la función  $M_x \xi^k$  es acotada en  $[0, 1]$ . No es difícil de comprobar que  $n(x)$  es una función cuya convexidad está dirigida estrictamente hacia las  $y$  positivas y que si  $\tau$  es el momento de la primera salida del intervalo  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \delta)$  ( $0 < x_0 - \varepsilon <$

$\langle x_0 + \delta < 1, \varepsilon, \delta > 0 \rangle$ , entonces

$$M_x \tau = n(x_0) - n(x_0 - \varepsilon) \frac{\delta}{\varepsilon + \delta} - n(x_0 - \delta) \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta}.$$

Puesto que

$$M_{x_0} f(\xi(\tau)) = f(x_0 - \varepsilon) \frac{\delta}{\delta + \varepsilon} + f(x_0 + \delta) \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta},$$

para el operador característico en el punto  $x_0 \in (0, 1)$  tenemos la correlación

$$\mathfrak{A}f(x_0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} \frac{\varepsilon^{-1} [f(x_0 - \varepsilon) - f(x_0)] + \delta^{-1} [f(x_0 + \delta) - f(x_0)]}{\delta^{-1} [n(x_0) - n(x_0 + \delta)] - \varepsilon^{-1} [n(x_0 - \varepsilon) - n(x_0)]}.$$

Observemos que existe una derivada  $n'(x)$  que representa en sí una función decreciente de  $x$ . Más adelante se puede mostrar que si la función  $f(x)$  es absolutamente continua y para ella existe una función continua  $g(t)$  tal que

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x g(t) dn'(t) \quad (8.1)$$

entonces, para todo  $x \in (0, 1)$  se verifica

$$\mathfrak{A}f(x) = -g(x).$$

La función  $g(t)$ , satisfaciendo a la correlación (8.1), es la derivada  $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$ . Por ello, para  $x \in (0, 1)$

$$\mathfrak{A}f(x) = -\frac{df'(x)}{dn'(x)},$$

con la particularidad de que el operador característico está definido en todas aquellas funciones  $f(x)$  que son absolutamente continuas y tienen derivada continua  $\frac{df'}{dn'}$ . Por fin, hemos de notar que si el proceso se interrumpe en el momento de la primera salida del intervalo  $(0, 1)$ , su operador infinitesimal  $A$  queda definido en todas las funciones absolutamente continuas  $f$ , para las cuales  $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$  es continua en  $[0, 1]$ , mientras que  $f(0) = f(1) = 0$ . Con ello,  $Af = \mathfrak{A}f$ .

15.8.3. Procesos en el intervalo de regularidad. Sea  $\{\xi(t), \mathfrak{R}_t, P_x\}$  un proceso continuo y riguroso de Márkov en el intervalo  $\Delta \subset R^1$ . Supongamos que  $x \in \Delta$  es un punto regular de este proceso. Hagamos

$$\alpha = \inf \{y: y \in \Delta_x, P_y \{\tau_x < \infty\} > 0\};$$

$$\beta = \sup \{y: y \in \Delta_x, P_y \{\tau_x < \infty\} > 0\}.$$

Como  $x$  es un punto regular, el intervalo  $(\alpha, \beta)$  no es vacío y contiene  $x$ . Este se llama intervalo de regularidad del proceso que contiene el punto  $x$ .



Examinemos el comportamiento del proceso en el intervalo de regularidad  $(\alpha, \beta)$  suponiendo que los puntos  $\alpha$  y  $\beta$  son irregulares. Para la frontera  $\alpha$  del intervalo  $(\alpha, \beta)$  son posibles cuatro casos:

1) el punto  $\alpha$  es accesible desde el interior del intervalo y todo punto  $x \in (\alpha, \beta)$  es accesible desde el punto  $\alpha$ ; en este caso el punto  $\alpha$  se llama frontera regular;

2) el punto  $\alpha$  es accesible desde el interior, pero desde  $\alpha$  los puntos del intervalo no son accesibles; en este caso  $\alpha$  se denomina frontera cautivadora;

3) el punto  $\alpha$  no es accesible desde el interior, pero desde  $\alpha$  resultan accesibles los puntos del intervalo; tal punto lleva el nombre de frontera de escape;

4) el punto  $\alpha$  no es accesible desde el interior y desde el mismo punto no son accesibles los puntos del intervalo; tal punto se llama frontera natural.

Las mismas posibilidades tiene también el punto de frontera  $\beta$ .

Sea  $\alpha$  una frontera regular. Ya que el punto  $\alpha$  no es regular (en el sentido de la definición citada arriba), para él o bien  $P_y \{\tau_\alpha < \infty\} = 0$ , o bien  $P_\alpha \{\tau_y < \infty\} = 0$ , cualquiera que sea  $y < \alpha$ ,  $y \in \Delta$ . En el primer caso  $\alpha$  se llama inaccesible por la izquierda; en el segundo caso, impenetrable a la izquierda. Un punto regular de frontera  $\alpha$ , impenetrable a la izquierda, se llama frontera de reflexión. El teorema que sigue muestra un tipo del operador infinitesimal de un proceso con dos fronteras de reflexión.

**Teorema 3.** Si  $(\tilde{X}_t, \tilde{M}_t, \tilde{P}_x)$  es un proceso en  $[0, 1]$ , para el cual  $m(x) = x$  y los puntos 0 y 1 son fronteras de reflexión del intervalo de regularidad  $(0, 1)$ , entonces en todos puntos  $x \in (0, 1)$

$$Af(x) = -\frac{dj'(x)}{dn'(x)},$$

y en los puntos de frontera

$$Af(0) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - f(0)}{M_\varepsilon \tau_\varepsilon}, \quad Af(1) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(1-\varepsilon) - f(1)}{M_{1-\varepsilon} \tau_{1-\varepsilon}}.$$

Con ello,  $D_A$  coincide con el conjunto de funciones para las cuales  $Af$  es continuo.

Luogo, si las fronteras del intervalo  $(0, 1)$  son cautivadoras, será natural considerar que el proceso se interrumpe en el momento de la primera salida a la frontera, razón por la cual el operador generador de tal proceso tendrá por expresión

$$Af(x) = -\frac{df'(x)}{dn'(x)},$$

con la particularidad de que  $f \in D_A$ , si  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(x)$  es absolutamente continua y  $\frac{df'(x)}{dn'(x)}$  es continua en  $[0, 1]$ .

Admitamos que las fronteras son inaccesibles. En este caso, el proceso siempre queda dentro del intervalo de regularidad. Se puede mostrar que existe una función armónica continua estrictamente creciente  $M(x)$ ,  $x \in (\alpha, \beta)$ , tal que cualquier otra función armónica  $g(x)$  se define mediante la igualdad  $g(x) = c_1 M(x) + c_2$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes (la función  $f(x)$  se llama armónica para el proceso

$(\xi_t, \mathfrak{B}_t, P_x)$ , si el proceso  $(f(\xi_t), \mathfrak{B}_t, P_x)$  es una martingala, es decir, si  $T_t f(x) = f(x)$ . La transformación del espacio fásico  $y = M(x)$  convierte al proceso de partida en un nuevo proceso definido en el intervalo (finito o infinito), para el cual  $M(x) = x$ . Convengamos en considerar que tal transformación ya se ha realizado.

Ahora, existe una función  $N(x)$ , con su convexidad hacia las  $y$  positivas, tal que para  $\alpha < x - \varepsilon < x < x + \delta < \beta$

$$M_x \tau = N(x) - \frac{\delta}{\varepsilon + \delta} N(x - \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \delta} N(x + \delta),$$

donde  $\tau$  es el momento de la primera salida del intervalo  $(x - \varepsilon, x + \delta)$ . Ahora, el operador característico del proceso en el intervalo  $(\alpha, \beta)$  con fronteras inaccesibles  $\alpha$  y  $\beta$  (para el cual  $M(x) = x$ ) puede ser escrito en la forma

$$\mathfrak{U}f(x) = - \frac{df'(x)}{dN'(x)}$$

para todos los puntos  $x \in (\alpha, \beta)$ . Como el intervalo  $(\alpha, \beta)$  es un espacio compacto local, entonces el operador infinitesimal del proceso puede ser definido al aplicar el teorema 3 del p. 15.3.

Una frontera inaccesible  $\alpha$  se denomina atractiva, si para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que con cualquier  $x \in (\alpha, \alpha + \delta)$  se tiene  $P_x \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \xi_t = \alpha \} > 1 - \varepsilon$ . Una frontera inaccesible  $\alpha$  se llama repelente, si para todos los  $\alpha < x_1 < x$  se tiene  $P_x \{ \tau_x < \infty \} = 1$ .

**Teorema 4.** La frontera  $\alpha$  es inaccesible, si  $N(+\alpha) = \infty$ . Si, en este caso,  $M(+\alpha) > -\infty$ , entonces  $\alpha$  es una frontera atractiva; si, en cambio,  $M(+\alpha) = -\infty$ ,  $\alpha$  será una frontera repelente.

**15.8.4. Puntos irregulares.** Consideraremos el comportamiento del proceso en los puntos irregulares. Si  $x$  es un punto irregular, debe cumplirse por lo menos una de las siguientes condiciones:

(I) para todo  $y < x$ ,  $P_x \{ \tau_y < \infty \} = 0$  (el punto  $x$  es inaccesible a la izquierda);

(II) para todo  $y > x$ ,  $P_x \{ \tau_y < \infty \} = 0$  (el punto  $x$  es impenetrable a la derecha);

(III) para todo  $y < x$ ,  $P_y \{ \tau_x < \infty \} = 0$  (el punto  $x$  es inaccesible por la izquierda);

(IV) para todo  $y > x$ ,  $P_y \{ \tau_x < \infty \} = 0$  (el punto  $x$  es inaccesible por la derecha).

Si el punto  $x$  es impenetrable a la izquierda o a la derecha, será absorbente y para él  $\mathfrak{U}f(x) = Af(x) = 0$ .

Supongamos que la condición (II) se cumple y la (III), no (es decir, el punto  $x$  es impenetrable a la izquierda, pero es penetrable a la derecha). En este caso, si  $\tau^\varepsilon$  es el momento de la primera salida del intervalo  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ , entonces  $\tau^\varepsilon = \tau_{x+\varepsilon}$  casi por cierto (c.p.c.) respecto de  $P_x$ . Existe una función monótona  $g(y)$  tal que  $M_x \tau^\varepsilon = g(x) - g(x + \varepsilon)$ . Por esta razón, en este caso,

$$\mathfrak{U}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x + \varepsilon)}.$$

Por analogía, si se cumple (II) y no se cumple (I), entonces

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(x-\varepsilon) - f(x)}{g(x) - g(x-\varepsilon)},$$

es decir, en ambos casos el cálculo del operador característico se reduce al cálculo de una derivada unilateral de la función  $f(x)$  respecto a cierta función monótona.

Supongamos que las condiciones (I) y (II) no se cumplen. Si está cumplida (III), mientras que (IV), no,  $x$  será la frontera izquierda del intervalo de regularidad. El comportamiento del proceso en este caso ya se ha considerado más arriba. Si, en cambio, está cumplida (IV), pero no se cumple (III),  $x$  será la frontera derecha del intervalo de regularidad.

Supongamos ahora que están cumplidas las condiciones (III) y (IV), pero no se cumplen (I) y (II). En este caso, si  $x$  no es un punto de retención, el proceso, al salir de  $x$ , siempre estará a la izquierda del punto  $x$ , o a la derecha de él. Hagamos

$$p = P_x \{ \xi(t) > x \text{ para todo } t > 0 \};$$

$$q = P_x \{ \xi(t) < x \text{ para todo } t > 0 \}.$$

Para cierto  $\rho > 0$  definamos las funciones

$$g_1(y) = \frac{1}{p} M_y \tau^\rho \chi_{(y, \infty)}(\xi(\tau^\rho));$$

$$g_2(y) = \frac{1}{q} M_y \tau^\rho \chi_{(-\infty, y]}(\xi(\tau^\rho)).$$

La función  $g_1(y)$  decrece en el intervalo  $[x, x + \rho]$ , mientras que  $g_2(y)$  crece en el intervalo  $[x - \rho, x]$ . El operador característico en el punto  $x$  tiene la forma

$$\mathfrak{A}f(x) = \lim_{\delta \downarrow 0, \varepsilon \downarrow 0} \frac{p [f(x + \delta) - f(x)] + q [f(x - \varepsilon) - f(x)]}{p [g_1(x) - g_1(x + \delta)] + q [g_2(x) - g_2(x - \varepsilon)]}.$$

PROCESOS CON INCREMENTOS INDEPENDIENTES

16.1. Definición y propiedades fundamentales

16.1.1. Definición. Ejemplos. Examinemos los procesos  $\xi(t)$  con valores en  $R^m$ , definidos en cierto intervalo  $T$ , finito o infinito. Un proceso se llama proceso con incrementos independientes, si para cualesquiera  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  de  $T$  las magnitudes aleatorias

$$\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \dots, \xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$$

son independientes. Las distribuciones de dimensiones finitas del proceso  $\xi(t)$  se determinan por completo con las distribuciones de las magnitudes  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , y  $\xi(t_2) - \xi(t_1)$ ,  $t_1 < t_2$ ,  $t_1, t_2 \in T$ .

Si  $F(t, A) = P\{\xi(t) \in A\}$ ,  $G(t_1, t_2, A) = P\{\xi(t_2) - \xi(t_1) \in A\}$ ,  $t_1 < t_2$ , entonces, para  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$

$$F_{t_1, \dots, t_n}(A_1, \dots, A_n) = P\{\xi(t_1) \in A_1, \dots, \xi(t_n) \in A_n\} =$$

$$= \int \dots \int \chi_{A_1}(x_1) \chi_{A_2}(x_1 + x_2) \dots \chi_{A_n}(x_1 + \dots + x_n) F_{t_1}(dx_1) \times \\ \times G(t_1, t_2, dx_2) \dots G(t_{n-1}, t_n, dx_n).$$

Designemos con  $\varphi_t(z) = M \exp\{i(z, \xi(t))\}$ ,  $\psi_{t_1, t_2}(z) = M \times \exp\{i(z, \xi(t_2) - \xi(t_1))\}$ ,  $z \in R^m$  las funciones características del valor del proceso y de su incremento. Entonces, la función característica conjunta de las magnitudes  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$  se define por la fórmula

$$M \exp\left\{i \sum_{h=1}^n (\xi(t_h), z_h)\right\} = \varphi_{t_1}(z_1 + \dots + z_n) \times \\ \times \psi_{t_1, t_2}(z_2 + \dots + z_n) \dots \psi_{t_{n-1}, t_n}(z_n).$$

Las funciones  $\varphi_t(z)$  y  $\psi_{t_1, t_2}(z)$  están ligadas mediante las siguientes ecuaciones:

1) cuando  $t_1 < t_2$ ,

$$\varphi_{t_1}(z) \psi_{t_1, t_2}(z) = \varphi_{t_2}(z);$$

2) cuando  $t_1 < t_2 < t_3$ ,

$$\psi_{t_1, t_2}(z) \psi_{t_2, t_3}(z) = \psi_{t_1, t_3}(z).$$

El ejemplo más simple de un proceso con incrementos independientes es una función no aleatoria arbitraria.

Indiquemos otro ejemplo de importancia. Sean  $\{\xi_k^+\}$  y  $\{\xi_k^-\}$  tales sucesiones de vectores aleatorios de  $R^m$ , independientes en totalidad, que las series

$$\sum \xi_k^\pm$$

convergen para cualquier sucesión de diferentes números naturales  $n_k$  (véase p. 3.2), mientras que  $t_i$  es una sucesión arbitraria de números reales. Hagámos

$$\xi(t) = \sum_{t_i < t} \xi_i^+ + \sum_{t_i \leq t} \xi_i^- \quad (1.1)$$

Este proceso posee las siguientes propiedades: 1) tiene incrementos independientes; 2) para  $t \in \{t_1, t_2, \dots\}$  es estocástico continuo; 3) para cualesquiera  $t_i$  existen los límites en probabilidad de  $\xi(t_i - 0)$  y  $\xi(t_i + 0)$  y

$$\left. \begin{aligned} P\{\xi(t_i) - \xi(t_i - 0) = \xi_i^-\} &= 1; \\ P\{\xi(t_i + 0) - \xi(t_i) = \xi_i^+\} &= 1; \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

4) si  $\xi(t)$  es un proceso separable (dado que la correlación (1.1) define el proceso con la exactitud salvo la equivalencia estocástica, esto siempre se puede suponer), entonces con la probabilidad 1 las funciones muestrales  $\xi(t)$  son continuas en todos los puntos, a excepción de los puntos  $t_i$ ; en los puntos  $t_i$  existen límites de  $\xi(t_i - 0)$  y  $\xi(t_i + 0)$ , y para dichos límites también se cumple (1.2).

Los procesos del tipo (1.1) se llaman procesos discretos con incrementos independientes.

16.1.2. Descomposición de Lévi. Para todo proceso con incrementos independientes  $\xi(t)$  existe tal función no aleatoria  $a(t)$  (que está definida en  $T$  y toma valores de  $R^m$ ) que el proceso  $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$  posee las siguientes propiedades: 1) con la probabilidad 1 no tiene en el interior de  $T$  discontinuidades de segunda especie; 2) en todo punto tiene límites en probabilidad por la derecha y por la izquierda; 3) tiene a lo sumo un número numerable de puntos de discontinuidad estocástica.

Una función  $a(t)$ , portadora de las propiedades indicadas, se denomina función centradora para un proceso con incrementos independientes. Su definición no es unívoca: cualesquiera dos funciones centradoras se diferencian en una función que no tiene discontinuidades de segunda especie en el interior de  $T$ .

Si  $\xi(t)$  es un proceso simétrico, la función centradora puede elegirse igual a cero idéntico.

Supongamos que  $a(t)$  es una función centradora para el proceso  $\xi(t)$  y que  $\xi_1(t) = \xi(t) - a(t)$ . Designemos mediante  $\{t_1, t_2, \dots\}$  un conjunto de puntos de la discontinuidad estocástica  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_k^+ = \xi_1(t_k + 0) - \xi_1(t_k)$ ,  $\xi_k^- = \xi_1(t_k) - \xi_1(t_k - 0)$ . Entonces, las magnitudes  $\{\xi_k^+, \xi_k^-, k = 1, 2, \dots\}$  son independientes en totalidad y

$$\xi_2(t) = \sum_{t_k < t} \xi_k^+ + \sum_{t_k \leq t} \xi_k^-$$

será un proceso discreto con incrementos independientes. El proceso  $\xi_3(t) = \xi_1(t) - \xi_2(t)$ , en este caso, no depende del proceso  $\xi_2(t)$ , y, además,  $\xi_3(t)$  es estocástico continuo. De este modo, para todo proceso con incrementos independientes  $\xi(t)$  pueden indicarse una función no aleatoria  $a(t)$ , un proceso discreto con incrementos independientes  $\xi_d(t)$  y un proceso estocástico continuo con incrementos independientes  $\xi_c(t)$  tales que

$$\xi(t) = a(t) + \xi_d(t) + \xi_c(t), \quad (1.3)$$

siendo los procesos  $\xi_d(t)$  y  $\xi_c(t)$  independientes. La representación (1.3) lleva el nombre de descomposición de Lévi para un proceso con incrementos independientes. Si está elegida la función contradora  $a(t)$ , los demás componentes de la descomposición se definen unívocamente.

**16.1.3. Algunas desigualdades.** Sea  $\xi(t)$  un proceso con incrementos independientes, para el cual  $M(\xi(t), z)^2 < \infty$  para todo  $t \in T$  y  $a(t) = M\xi(t)$ . La función  $a(t)$  es contradora. Designemos con  $B(t)$  el operador simétrico en  $R^m$ , para el cual

$$(B(t)z, z) = M(\xi(t) - a(t), z)^2.$$

Entonces,  $B(t)$  es no negativo y en calidad de función de  $t$  no decrece. Por ello,  $B(t)$ , es acotado en todo intervalo cerrado por la derecha que se encuentra en  $T$ .

**Generalización de la desigualdad de Kolmogórov para los procesos con incrementos independientes.** 1). Si  $\xi(t)$  es un proceso separable con incrementos independientes y  $[a, b] \in T$ , entonces

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t) - a(t)| > c\right\} \leq \frac{\text{Sp } B(b)}{c^2}, \quad (1.4)$$

donde  $\text{Sp } B$  es una traza del operador  $B$ :  $\text{Sp } B = \sum_{k=1}^m (Be_k, e_k)$ , donde  $\{e_k, k=1, \dots, m\}$  es la base en  $R^m$ . La desigualdad (1.4) puede ser extendida a  $T$ :

$$P\left\{\sup_{t \in T} |\xi(t) - \xi(a)| > c\right\} \leq \frac{1}{c^2} \sup_{t \in T} B(t).$$

Para los procesos separables con incrementos independientes son aplicables también otras desigualdades, conocidas para las sumas de las magnitudes aleatorias independientes.

2) Si  $\xi(t)$  es un proceso separable simétrico, entonces

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t)| > c\right\} \leq 2P\{|\xi(b)| > c\}.$$

3) Si para cierto  $\alpha < 1$  con  $t \in [a, b]$

$$P\{|\xi(b) - \xi(t)| > c\} \leq \alpha,$$

entonces para todo  $x > 0$  se tiene

$$P\left\{\sup_{t \in [a, b]} |\xi(t)| > c+x\right\} \leq \frac{1}{1-\alpha} P\{|\xi(b)| > x\}.$$

4) Si  $\xi(t)$  no tiene discontinuidades de segunda especie y si  $P\{\sup |\xi(t+0) - \xi(t-0)| < c\} = 1$ , entonces para cualesquiera  $l$  y  $a$  se cumple la desigualdad

$$Me^{z\xi(t)} \leq \frac{e^{zl}}{P\{\xi(t) \leq l\}} \frac{1}{1 - \frac{(a+c)z}{1 - 4P\{|\xi(t)| > a\}}}$$

siempre que  $P\{|\xi(t)| > a\} < \frac{1}{4}$  y  $|z| < \frac{1 - 4P\{|\xi(t)| > a\}}{a+c}$ .

## 16.2. Procesos estocásticos continuos con incrementos independientes

16.2.1. Propiedades de las funciones muestrales. I. Un proceso estocástico continuo separable con la probabilidad 1 no tiene discontinuidades de segunda especie.

II. Para que un proceso separable con incrementos independientes  $\xi(t)$ , definido en  $[a, b]$ , sea con la probabilidad 1 continuo, es necesario y suficiente que para todo  $\varepsilon > 0$  se cumpla la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=0}^{n-1} P\{|\xi(t_{nh}) - \xi(t_{n(h-1)})| > \varepsilon\} = 0,$$

donde  $t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nn} = b$ , y  $\max_h (t_{nh} - t_{n(h-1)}) \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

III. Si  $\xi(t)$  es un proceso separable con incrementos independientes en  $[a, b]$ , para el cual  $P\{\xi(b) = \xi(a)\} > 0$ , entonces  $\xi(t)$  es, con la probabilidad 1, una función escalonada, es decir, el segmento  $[a, b]$  puede dividirse en un número finito (aleatorio) de intervalos aleatorios en cada uno de los cuales  $\xi(t)$  sea constante. Y, viceversa, si  $\xi(t)$  es, con la probabilidad 1, una función escalonada en  $[a, b]$ , entonces  $P\{\xi(b) = \xi(a)\} > 0$ .

IV. Para que un proceso separable numérico con incrementos independientes  $\xi(t)$  sea, con la probabilidad 1, no decreciente en  $[a, b]$ , es necesario y suficiente que  $P\{\xi(b) > \xi(a)\} = 1$ .

16.2.2. Fórmula de Lévi — Ginchin. Sea  $\xi(t)$  un proceso estocástico continuo con incrementos independientes definido en  $[a, b]$ , con valores en  $R^m$ . En tal caso, para este proceso existen: 1) una función continua  $a(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , con valores en  $R^m$ ; 2) una función continua  $B(t)$ ,  $t \in [a, b]$  cuyos valores son los operadores no negativos simétricos en  $R^m$ ; una función  $\Pi(t, A)$ ,  $t \in [a, b]$ , definida para todos los conjuntos borelianos  $A$  de  $R^m$ , ubicados a una distancia positiva del punto 0, y que posee las siguientes propiedades: a)  $\Pi(t, A)$  es una función de  $t$ , continua no decreciente; b) para  $t \in [a, b]$  fijados es numérica aditiva en  $A$ ; c) una integral extendida por  $R^m \int \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \times \times \Pi(t, dz)$ , con el punto 0 excluido, es finita. La función característica del incremento del proceso es divisible infinitamente (véase el p. 5.2.2)

y se expresa mediante la fórmula: para  $a \leq t < s \leq b$

$$\begin{aligned} M \exp \{t(z, \xi(s) - \xi(t))\} = \exp \left\{ t(z, a(s) - a(t)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} ((B(s) - B(t))z, z) + \int \left( e^{t(z, x) - 1} - \frac{t(z, x)}{1 + |x|^2} \right) \times \right. \\ \left. \times (\Pi(x, dx) - \Pi(t, dx)) \right\}, \quad (2.1) \end{aligned}$$

la que precisamente lleva el nombre de Levi — Ginchin. Las funciones  $a(t)$ ,  $B(t)$  y  $\Pi(t, A)$  que figuran en la fórmula de Levi — Ginchin se definen unívocamente.

**16.2.3. Estructura del proceso estocástico continuo con incrementos independientes.** Supongamos que el proceso  $\xi(t)$  es separable. En este caso el proceso no tiene discontinuidades de segunda especie y, por lo tanto, el número de saltos del proceso que superan a  $\varepsilon$  en módulo es finito en todo el intervalo finito cerrado  $t$ . Designemos mediante  $\nu(t, A)$  (donde  $A$  es cierto conjunto boreliano en  $R^m$  ubicado a una distancia positiva del punto 0) el número de saltos del proceso  $\xi(s)$  (se llama salto en el punto  $s$  una magnitud  $\xi(s+0) - \xi(s-0)$ ) que han ocurrido hasta el momento  $t$  y que han caído en el conjunto  $A$ .  $\nu(t, A)$ , en calidad de función de  $t$ , es un proceso de Poisson, es decir,  $\nu(t, A)$  representa un proceso estocástico continuo con incrementos independientes que para todo  $t$  tiene distribución de Poisson. Cuando  $t$  es fijado,  $\nu(t, A)$  es una medida de Poisson con valores independientes. Esto significa que están cumplidas las siguientes condiciones: 1)  $\nu(t, \bigcup_k A_k) = \sum_k \nu(t, A_k)$ , si  $A_k$  son conjuntos disjuntos dos a dos y  $\bigcup_k A_k$  se encuentra a una distancia positiva del punto 0; 2) si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son conjuntos borelianos disjuntos dos a dos, los procesos  $\nu(t, A_1), \dots, \nu(t, A_k)$  son independientes en totalidad.

$\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$  es aquella función que figura en la fórmula de Levi — Ginchin. Definamos las integrales  $\int_{|x|>1} x\nu(t, dx)$ ,  $\int_{0<|x|\leq 1} x \times$   
 $\times x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon < |x| \leq 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)]$  (el límite en el sentido de convergencia cuadrática). Entonces, el proceso

$$\xi_0(t) = \xi(t) - \int_{|x|>1} x\nu(t, dx) - \int_{0<|x|\leq 1} x[\nu(t, dx) - \Pi(t, dx)],$$

con la probabilidad 1, es continuo y no depende de  $\nu(t, A)$ .

Sea  $\xi_0(t)$  un proceso continuo con la probabilidad 1 que tiene incrementos independientes. En este caso  $\xi_0(t)$  tiene incrementos gaussianos, es decir,  $\xi_0(t_2) - \xi_0(t_1)$  posee distribución normal. La función característica del incremento del proceso  $\xi_0(t)$  se expresa así:

$$\begin{aligned} M \exp \{t(z, \xi_0(t_2) - \xi_0(t_1))\} = \\ = \exp \left\{ t(z, a(t_2) - a(t_1)) - \frac{1}{2} ((B(t_2) - B(t_1))z, z) \right\}, \end{aligned}$$

(2.2)



donde  $a(t) = M(\xi_0(t_1) - \xi_0(t_0))$ ,  $(B(t, z) = M(\xi_0(t) - \xi_0(t_0), z)^2)$ , y  $t_0$  es el punto mínimo en  $T$ .

Así pues, para un proceso estocástico continuo con incrementos independientes  $\xi(t)$  resulta válida la siguiente representación:

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \int_{|x| \leq 1} x \nu(t, dx) - \Pi(t, dx) + \int_{|x| > 1} x \nu(t, dx), \quad (2.3)$$

donde  $\nu(t, A)$  es una medida de Poisson con valores independientes en  $A$  y un proceso de Poisson respecto de  $t$ ,  $\Pi(t, A) = M\nu(t, A)$ , y  $\xi_0(t)$  es un proceso continuo con incrementos de Gauss independientes cuya función característica se determina según la fórmula (2.2).

Indiquemos algunos lazos que existen entre las propiedades de las funciones que figuran en el segundo miembro de la fórmula de Lévi — Ginchin y las de las funciones muestrales del proceso.

I. El proceso  $\xi(t)$  es continuo cuando y sólo cuando,  $\Pi(t, A) = 0$  para todos los  $t \in T$  y los conjuntos borelianos  $A \subset R^m$ .

II. Sea  $\Pi(t, R^m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi(t, R^m/S_\varepsilon)$ , donde  $S_\varepsilon$  es una esfera en  $R^m$  de radio  $\varepsilon$  y centro en el punto 0. Este límite puede ser también infinito. El proceso  $\xi(t)$  será escalonado cuando y sólo cuando: a)  $a(t)$  es constante; b)  $B(t) = 0$  para todo  $t \in T$ ; c)  $\Pi(t, R^m) < \infty$  para todo  $t \in T$ .

III. El proceso  $\xi(t)$  tiene, con la probabilidad 1, una variación acotada en el segmento  $[t_0, t_1]$  cuando y sólo cuando: a)  $a(t)$  tiene variación acotada en  $[t_0, t_1]$ ; b)  $B(t_1) - B(t_0) = 0$ ; c)  $\int_{|x| \leq 1} |x| (\Pi(t_1, dx) - \Pi(t_0, dx)) < \infty$ .

Si  $\zeta(t)$  es una variación  $\xi(t)$  en el segmento  $[t_0, t]$ , entonces  $\zeta(t)$  será también un proceso estocástico continuo con incrementos independientes cuya función característica tiene por expresión

$$M e^{i\lambda \zeta(t)} = \exp \left\{ i\lambda \gamma(t) + \int (e^{i\lambda |x|} - 1) (\Pi(t, dx) - \Pi(t_0, dx)) \right\},$$

donde  $\gamma(t) = \text{var } a(s) + \int_{[t_0, t]} |x| (\Pi(t, dx) - \Pi(t_0, dx))$  y el primer sumando en el segundo miembro es la variación  $a(\cdot)$  en el segmento  $[t_0, t]$ .

IV. Sea  $K$  un cono en  $R^m$  con su centro en el punto 0. Para que, con la probabilidad 1,  $\xi(t) \in K$ ,  $t \in T$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones: a)  $a(t) \in K$  para  $t \in T$ ; b)  $B(t) = 0$  para  $t \in T$ ; c) si  $A \cap K$  está vacío, entonces  $\Pi(t, A) = 0$  para todo  $t \in T$ .

V. Sea  $\xi(t)$  un proceso con valores en  $R^1$ . Para que  $\xi(t)$ , con la probabilidad 1, sea una función no decreciente, es necesario y suficiente que: a)  $a(t)$  sea una función no decreciente; b)  $B(t) = 0$  para todo  $t$ ; c)  $\Pi(t, (-\infty, 0)) = 0$  para  $t$  cualquiera.

### 16.3. Procesos homogéneos. Propiedades asintóticas

16.3.1. Función característica del proceso homogéneo. Un proceso con incrementos independientes  $\xi(t)$  se llama homogéneo, si está definido en  $[0, \infty)$ ,  $\xi(0) = 0$  y la distribución  $\xi(t+h) - \xi(t)$  coin-

cide con la distribución  $\xi(h)$  para cualesquiera  $t > 0$  y  $h > 0$ . Todo proceso homogéneo con incrementos independientes  $\xi(t)$  puede ser representado en la forma

$$\xi(t) = a(t) + \xi_1(t),$$

donde  $\xi_1(t)$  es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes;  $a(t)$ , una función no aleatoria que satisface la condición: para cualesquiera  $h > 0$ ,  $t > 0$  se verifica  $a(t+h) = a(t) + a(h)$ .

Si  $\xi(t)$  es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes en  $R^m$ , su función característica tiene por expresión

$$\begin{aligned} \text{Me}^{i(z, \xi(t))} = \exp \left\{ t \left[ l(z, a) - \frac{1}{2} (Bz, z) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{|x| \leq 1} (e^{i(z, x)} - 1 - (z, x)) \Pi(dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i(z, x)} - 1) \Pi(dx) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $a \in R^m$ ;  $B$  es un operador no negativo simétrico en  $R^m$ ;  $\Pi$  es una medida en  $R^m$ , para la cual

$$\int \frac{(x, x)}{1 + (x, x)} \Pi(dx) < \infty \text{ y } \Pi(\{0\}) = 0.$$

A causa de la homogeneidad del proceso el segundo miembro en (3.1) es también una función característica del incremento  $\xi(t+h) - \xi(t)$  para todo  $h > 0$ . Como se ve de la fórmula (3.1), la magnitud

$$K(z) = \frac{1}{t} \ln \text{Me}^{i(z, \xi(t))}$$

no depende de  $t$ . Esta se llama **cumulante** del proceso homogéneo con incrementos independientes. La cumulante de un proceso determina todas sus distribuciones de dimensiones finitas.

**16.3.2. Propiedades locales de los procesos homogéneos.** En este punto se supone que  $\xi(t)$  es un proceso homogéneo en  $R^1$ . La función característica del proceso tiene por expresión

$$\begin{aligned} \text{Me}^{i\lambda \xi(t)} = \exp \left\{ t \left[ i\lambda a - \frac{b\lambda^2}{2} + \int_{|x| \leq 1} (e^{i\lambda x} - 1 - i\lambda x) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \Pi(dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i\lambda x} - 1) \Pi(dx) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Examinemos el comportamiento de  $\xi(t)$  cuando  $t \downarrow 0$ .

I. Si, por lo menos una de las magnitudes

$$\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t), \quad \underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t)$$

es finita con probabilidad positiva, entonces  $\xi(t)$  tiene, con la probabilidad 1, variación acotada en todo segmento finito y, por consiguiente (véase p. 16.2.3, III),  $b = 0$  y  $\int_{|x| \leq 1} |x| \Pi(dx) < \infty$ . En este

caso

$$P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = a - \int_{-1}^1 x \Pi(dx) \right\} = 1.$$

II. Si está cumplida una de las condiciones: 1)  $b > 0$ ; 2)  $\int_{-1}^1 x \times$

$\times |x| \Pi(dx) = +\infty$ , entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = +\infty \right\} = P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

$$\text{III. } P \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \xi(t) = \sqrt{b} \right\} = P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2t \ln \ln \frac{1}{t}}} \times \right.$$

$\left. \times \xi(t) = -\sqrt{b} \right\} = 1$  (ley local del logaritmo reiterado).

IV. Sean:  $\xi(t)$  un proceso no decreciente con una acumulante

$$K(x) = \int_0^{\infty} (e^{tx} - 1) \Pi(dx)$$

y  $g(x)$ , una función no decreciente que está definida para  $x \geq 0$  y satisface las condiciones: 1)  $g(0) = 0$ ; 2)  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$  (la función  $g$  es semiaditiva). En este caso

a) si  $\int_0^{\infty} g(x) \Pi(dx) < \infty$ , entonces  $P \left\{ \lim_{t \downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} = 0 \right\} = 1$ ;

b) si  $\int_0^1 g(x) \Pi(dx) = +\infty$ , entonces  $P \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{g(\xi(t))}{t} = +\infty \right\} = 1$ .

V. Supongamos que  $\varphi(t)$  crece en  $[0, 1]$  y

$$\limsup_{u \downarrow t} \left| \frac{\varphi(ut)}{\varphi(t)} - 1 \right| = 0.$$

Supongamos que  $\xi(t)$  es tal proceso homogéneo con incrementos independientes que para todo  $\varepsilon > 0$  se tiene

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} P \{ \xi(t) < -\varepsilon \varphi(t) \} < 1.$$

Entonces

1) si  $\int_0^1 \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > \varphi(t) \} dt < \infty$ , entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} \leq 1 \right\} = 1;$$

2) si  $\int_0^1 \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > \varphi(t) \} dt = +\infty$ , entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} \geq 1 \right\} = 1.$$

VI. Sea  $\xi(t)$  un proceso estable con una cumulante

$$K(z) = -c|z|^\alpha \left( 1 - \frac{iz}{|z|} \omega(z, \alpha) \right),$$

donde  $\omega(z, \alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha$  con  $\alpha \in (1, 2)$ ,  $\omega(z, \alpha) = \frac{2}{\pi} \ln |z|$  con  $\alpha = 1$ . Este proceso tiene solamente saltos negativos. Hagamos

$$\varphi(t) = \alpha \left( \frac{(\alpha-1)^{\alpha-1}}{\left| \cos \frac{\pi}{2} \alpha \right|} \right)^{1/\alpha} t^{1/\alpha} \left[ \ln \ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \text{ con } \alpha \in (1, 2);$$

$$\varphi(t) = \frac{2ct}{\pi} \ln \frac{1}{t} \text{ con } \alpha = 1.$$

Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1.$$

VII. Sea  $\xi(t)$  un proceso monótono estable con una cumulante

$$K(z) = -c|z|^\alpha \left( 1 - \frac{iz}{|z|} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \alpha \right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

En este caso

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} \xi(t) / \left( t^{1/\alpha} \left[ \ln \ln \frac{1}{t} \right]^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \right) > 0 \right\} = 1.$$

16.3.3. Comportamiento de los procesos unidimensionales cuando  $t \rightarrow \infty$ . Aquí se emplean las designaciones del punto antecedente.

I. Ley reforzada de los grandes números. 1) Si existe  $M\xi(t) = \gamma t$ , entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{t} = \gamma \right\} = 1 \left( \gamma = a + \int_{-\infty}^{-1} x\Pi(dx) + \int_1^{\infty} x\Pi(dx) \right).$$

2) Sea  $\int_{-\infty}^{-1} x\Pi(dx) > -\infty$ ,  $\int_1^{\infty} x\Pi(dx) = +\infty$ . Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(t) = +\infty \right\} = 1.$$

3) Sea  $\int_{-\infty}^{-1} x \Pi(dx) = -\infty$ ,  $\int_1^{\infty} x \Pi(dx) < +\infty$ . Entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

II. Condiciones para que un proceso sea notado en  $[0, \infty)$ .

1) Si  $M \xi(t) < 0$ , entonces  $P \left\{ \sup_t \xi(t) < \infty \right\} = 1$ ,

$$P \left\{ \inf_t \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

2) Si  $M \xi(t) > 0$ , entonces  $P \left\{ \sup_t \xi(t) = +\infty \right\} = 1$ ,

$$P \left\{ \inf_t \xi(t) > -\infty \right\} = 1.$$

3) Si  $M \xi(t) = 0$  y  $\xi(t) \neq 0$  idénticamente, entonces

$$P \left\{ \sup_t \xi(t) = +\infty \right\} = P \left\{ \inf_t \xi(t) = -\infty \right\} = 1.$$

4) Para que  $P \left\{ \sup_t \xi(t) < +\infty \right\} = 1$ , es necesario y suficiente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} P \{ \xi(t) > 0 \} dt < \infty.$$

5) Para que  $P \left\{ \inf_t \xi(t) > -\infty \right\} = 1$ , es necesario y suficiente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{t} P \{ \xi(t) < 0 \} dt < \infty.$$

III. Sea  $\xi(t)$  un proceso no decreciente con una cumulante

$$K(x) = \int_0^{\infty} (e^{tx} - 1) \Pi(dx)$$

y supongamos que  $g(x)$  es una función no decreciente para la cual  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ , cuando  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

1) Si  $\int_1^{\infty} g(x) \Pi(dx) < \infty$ , entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g(\xi(t)) = 0 \right\} = 1.$$

2) Si  $\int_1^{\infty} g(x) \Pi(dx) = +\infty$ , entonces

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} g(\xi(t)) = +\infty \right\} = 1.$$

IV. Ley del logaritmo reiterado. Supongamos que  $M\xi(t)=0$  y  $D\xi(t) < \infty$ . Entonces  $D\xi(t) = tc$ , donde  $c = b + \int x^2 \Pi(dx)$  y

$$P \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2ct \ln \ln t}} = 1 \right\} = P \left\{ \underline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2ct \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1.$$

#### 16.4. Funcionales de los procesos con incrementos independientes

16.4.1. Ecuación diferencial integral del proceso. Sea  $\xi(t)$  un proceso con incrementos independientes en  $[t_0, t_1]$  con valores en  $R^m$ , cuya función característica se expresa así:

$$M \exp(i(z, \xi(t))) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t [i(\hat{a}(s), z) - \frac{1}{2}(\hat{B}(s)z, z) + \int_{|x| \leq 1} (e^{i(z, x)} - 1 - i(z, x)) \hat{\Pi}(s, dx) + \int_{|x| > 1} (e^{i(z, x)} - 1) \hat{\Pi}(s, dx)] ds \right\}, \quad (4.1)$$

donde  $\hat{a}(s) \in R^m$ ,  $\hat{B}(s)$  es un operador no negativo simétrico en  $R^m$ ,  $\hat{\Pi}(s, A)$  es una medida en  $R^m$ , para la cual  $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \hat{\Pi}(t, dx) < \infty$  cuando  $s \in [t_0, t_1]$ .

La función característica del proceso puede ser escrita en la forma (4.1), si las funciones  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$ ,  $\hat{\Pi}(t, A)$ , que figuran en la fórmula (2.1), son absolutamente continuas respecto de  $t$ . Supongamos que  $\hat{a}(t)$ ,  $\hat{B}(t)$ ,  $\hat{\Pi}(t, A)$  y  $\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \hat{\Pi}(t, dx)$  son continuas respecto de  $t$ .

En este caso la función

$$Mf(x + \xi(t)) = u(t, x)$$

satisface la siguiente ecuación diferencial integral, cuando  $t \in [t_0, t_1]$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + L_t u(t, x) = 0 \quad (4.2)$$

y la condición de frontera  $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t, x) = f(x)$ , cualquiera que sea la función  $f$  dos veces continuamente derivable con derivadas acotadas;

aquí

$$L_t u(t, x) = \sum_{i=1}^m \hat{a}^i(t) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x^i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \hat{b}^{ij}(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^i \partial x^j} + \int_{|y| \leq 1} [f(x+y) - f(x) - \sum_{j=1}^m \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} y^j] \hat{\Pi}(t, dx) + \int_{|y| > 1} [f(x+y) - f(x)] \hat{\Pi}(t, dx); \quad (4.3)$$

$\hat{a}^i, x^i$  son las coordenadas de los vectores  $\hat{a}$  y  $x$ ,  $\hat{b}^{ij}$  son los elementos de la matriz del operador  $\hat{B}$  en cierta base ortonormada en  $R^m$ .

El operador  $L_t$  puede emplearse también para calcular las distribuciones de las funcionales de tipo integral. Sea

$$\varphi(t, x) = \int_t^{t_1} g(s, \xi(s) - \xi(t) + x) ds, \quad (4.4)$$

donde  $g(s, x)$  es una función continua acotada, dos veces continuamente derivable respecto a  $x$ , con derivadas acotadas

$$v_\lambda(t, x) = M e^{\lambda \varphi(t, x)}.$$

Entonces,  $v_\lambda(t, x)$  satisface la ecuación diferencial integral

$$\frac{\partial}{\partial t} v_\lambda(t, x) + L_t v_\lambda(t, x) + \lambda g(t, x) v_\lambda(t, x) = 0 \quad (4.5)$$

y la condición de frontera  $\lim_{t \uparrow t_1} v_\lambda(t, x) = 1$ .

Si la función  $v_\lambda(t, x)$  se conoce, entonces

$$M \exp \left\{ \lambda \int_{t_0}^{t_1} g(s, \xi(s)) ds \right\} = v_\lambda(t_1, 0).$$

#### 16.4.2. Procesos homogéneos unidimensionales con saltos negativos.

Sea  $\xi(t)$  un proceso homogéneo unidimensional con una cumulante

$$K(z) = t\gamma z - \frac{bz^2}{2} \int_{-\infty}^{-1} (e^{tzz} - 1) \Pi(dx) + \int_{-1}^0 (e^{tzz} - 1 - tzz) \Pi(dx), \quad (4.6)$$

es decir,  $\xi(t)$  puede tener solamente saltos negativos. Si  $\gamma + \int_{-\infty}^{-1} \times$

$\times x \Pi(dx) \geq 0$ , entonces  $\mathbb{P}(\sup_t \xi(t) = +\infty) = 1$ . Esto significa que el proceso no está acotado por arriba y la magnitud

$$\tau_a = \inf \{t: \xi(t) > a\}$$

es finita con la probabilidad 1. Como no hay saltos positivos,  $\xi(\tau_a) = a$ . La magnitud  $\tau_a$  se llama momento de la primera obtención del nivel  $a$  (momento del primer paso por el nivel  $a$ ),  $\tau_a$  es un momento de Márkov para el proceso  $\xi(t)$  (véase p. 14.2.4). Demos a conocer algunas propiedades de  $\tau_a$ .

1)  $\tau_a$ , como función de  $a$ , es un proceso homogéneo con incrementos independientes. Este proceso con la probabilidad 1 no decrece.

2) Designemos

$$K_+(z) = \gamma z + \frac{bz^2}{2} + \int_{-\infty}^{-1} (e^{tz} - 1) \Pi(dx) + \int_{-1}^0 (e^{tz} - 1 - sz) \Pi(dx), \quad (4.7)$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{a} \ln M e^{-\lambda \tau_a}, \quad \lambda > 0.$$

Entonces,  $\psi(\lambda)$  es una única raíz de la ecuación

$$K_+(-\psi(\lambda)) = \lambda.$$

Indiquemos que para  $\operatorname{Re} z > 0$  existe  $M e^{z \xi(t)}$ . Esta función es analítica y

$$M e^{z \xi(t)} = e^{t K_+(z)}.$$

La función  $\psi(\lambda)$  es analítica para  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  y

$$M e^{i \lambda \tau_a} = e^{a \psi(-i \lambda)}.$$

3) Indiquemos, por fin, la relación existente entre las distribuciones del proceso  $\xi(t)$  y de la magnitud  $\tau_a$ :

$$\frac{d}{ds} \int_0^x \mathbb{P}\{\tau_y < s\} dy = \frac{1}{s} \int_0^x y dy \mathbb{P}\{\xi(s) < y\}.$$

Supongamos que la densidad de distribución de  $\xi(s)$  es  $f_\xi(s, x) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}\{\xi(s) < x\}$ . Entonces, la densidad de la magnitud  $\tau_a$  será

$$f_\tau(a, s) = \frac{d}{ds} \mathbb{P}\{\tau_a \leq s\} \text{ y } f_\tau(a, s) = \frac{a}{s} f_\xi(s, a).$$

4) Conociendo la distribución de  $\tau_a$ , podemos hallar la distribución del máximo del proceso

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} \xi(t) < a\right\} = \mathbb{P}\{\tau_a > T\}.$$

16.4.3. Distribución del máximo y del mínimo del proceso homogéneo. Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso homogéneo unidimensional



y  $F(t, x)$  es la función de distribución de  $\xi(t)$ . Designemos

$$Q_+(t, x) = P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \xi(s) < x \right\};$$

$$q_+(\lambda, x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_+(t, x) dt;$$

$$\tilde{q}_+(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t z x} d_x q_+(\lambda, x).$$

Entonces,

$$\tilde{q}_+(\lambda, z) = \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_0^{\infty} (e^{t z x} - 1) d_x F(t, x) dt \right\}.$$

Denotemos ahora:

$$Q_-(t, x) = P \left\{ \inf_{0 \leq s \leq t} \xi(s) < x \right\};$$

$$q_-(\lambda, x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q_-(t, x) dt;$$

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t z x} d_x q_-(\lambda, x).$$

Entonces,

$$\tilde{q}_-(\lambda, z) = \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{t} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{t z x} - 1) d_x F(t, x) dt \right\}.$$

**16.4.4. Distribución del momento y de la magnitud de un anticipo.** Introduzcamos las siguientes magnitudes: cuando  $a > 0$ ,

$$\tau_a = \inf \{ t: \xi(t) \geq a \}; \quad \gamma_a = \xi(\tau_a + 0) - a,$$

la magnitud  $\tau_a$  se llama momento del primer anticipo con relación al nivel  $a$ ,  $\gamma_a$  es la magnitud del anticipo, si  $\sup \xi(t) \leq a$ ; consideramos  $\tau_a = +\infty$ ,  $\gamma_a$  en este caso no está definida. Hagamos  $M(x) = \int_{\mathbb{R}} \Pi(dy)$ ,  $x > 0$ , donde  $\Pi$  es la medida que figura en la función característica del proceso  $\xi(t)$  (véase la fórmula (3.1)). Entonces, la transformación conjunta de Laplace de las magnitudes  $\tau$  y  $\gamma$  se determi-

na por la correlación

$$M e^{-\lambda \tau_a - \mu \gamma_a} = 1 - q_+(\lambda, a) -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda} \int_0^a \left\{ \int_{-\infty}^0 \left[ \int_0^{\infty} e^{-\mu y} M(a+y-u-v) dy \right] dq_-(\lambda, u) \right\} dq_+(\lambda, v),$$

( $q_{\pm}(\lambda, x)$ ) se han determinado en 16.4.3).

La distribución conjunta de las magnitudes  $\tau_a$  y  $\gamma_a$  se da mediante la fórmula: cuando  $y > 0$ ,

$$P(\tau_a < t, \gamma_a > y) = \int_0^a M(a+y-u) d_u Q_+(t, u) + \\ + \int_0^a \int_{-\infty}^0 M(a+y-z-u) d_z \int_0^t d_u Q_+(t-s, u) d_s Q_-(s, z).$$

Si es que  $a < 0$ ,  $\tau_a = \inf \{t: \xi(t) < a\}$ ,  $\gamma_a = \xi(\tau_a + 0) - a$ , entonces la transformación conjunta de Laplace de las magnitudes  $\tau_a$  y  $\gamma_a$  se determina por la fórmula

$$M e^{-\lambda \tau_a + \mu \gamma_a} = q_-(\lambda, a) -$$

$$- \frac{\mu}{\lambda} \int_a^0 \left[ \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{\mu y} N(a+y-u-v) dy \right] dq_+(\lambda, u) \right] dq_-(\lambda, v),$$

donde  $N(z) = \int_{-\infty}^z 11(dz)$  para  $z < 0$ .

La distribución conjunta de estas magnitudes puede ser escrita de la forma siguiente: para  $y < 0$

$$P(\tau_a < t, \gamma_a < y) = \int_a^0 N(a+y-u) d_u Q_-(t+u) + \\ + \int_a^0 \int_0^{\infty} N(a+y-z-u) d_z \int_0^t d_u Q_-(t-s, u) d_s Q_-(s, z).$$

**16.4.5. Distribución conjunta del supremo, ínfimo y del valor de un proceso.** Hagamos para  $a < 0 < b$ ,  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$

$$Q(t; a, b; \alpha, \beta) = P\left\{ \inf_{s \leq t} \xi(s) \geq a, \sup_{s \leq t} \xi(s) \leq b, \xi(t) \in (\alpha, \beta) \right\};$$

$$\Gamma(x, dt, dy) = P\{\tau_x \in dt, \gamma_x \in dy\},$$

cuando  $x > 0$  esta medida según  $dy$  está concentrada en  $[0, \infty]$ , para  $x < 0$ , en  $(-\infty, 0)$ .

Examinemos también las transformaciones de Laplace de estas funciones respecto de  $t$ :

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \Gamma(x, dt, A);$$

$$q(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} Q(t; a, b; \alpha, \beta) e^{-\lambda t} dt.$$

Sea, ahora,

$$r_{\lambda}(A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} P\{\xi(t) \in A\} dt.$$

Hemos de hacer notar que la función  $\Gamma^{(\lambda)}(x, A)$  puede ser definida haciendo uso de los resultados del punto antecedente. Para  $x > 0$

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, (y, \infty)) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x \int_{-\infty}^0 M(x+y-u-v) dq_-(\lambda, u) dq_+(\lambda, v)$$

y, cuando  $x < 0$ ,

$$\Gamma^{(\lambda)}(x, (-\infty, y)) = \frac{1}{\lambda} \int_x^0 \int_0^{\infty} N(x+y-u-v) dq_+(\lambda, u) dq_-(\lambda, v).$$

Para  $x \in [b, \infty]$  hagamos

$$G^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma^{(\lambda)}(a-b-x, dy) \Gamma^{(\lambda)}(b-a-y, A_{-b}),$$

donde  $A_{-b} = \{x: x + b \in A\}$ . Para  $x \in (-\infty, a)$  hagamos

$$G^{(\lambda)}(x, A) = \int \Gamma^{(\lambda)}(b-a-x, dy) \Gamma^{(\lambda)}(a-b-y, A_{+a}).$$

$A_{+a} = A_{-|a|}$ . Por fin, para  $a < x < b$  suponemos  $G^{(\lambda)}(x, A) = 0$ .  
Sea ahora

$$H^{(\lambda)}(\mu, x, A) = \chi_A(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \mu^h \int \dots \int G^{(\lambda)}(x, dx_1) \dots G^{(\lambda)}(x_{h-1}, A).$$

En este caso

$$\begin{aligned} q(\lambda; a, b; \alpha, \beta) = & r_{\lambda} \left( (\alpha, \beta) - \int \int \Gamma^{(\lambda)}(a, dy) + \Gamma^{(\lambda)}(b, dy) \right) \times \\ & \times H^{(\lambda)}(1, y, dx) r_{\lambda}((\alpha-x, \beta-x)) + \\ & + \int \int \int [\Gamma^{(\lambda)}(b, dy) H^{(\lambda)}(1, y, dz) \Gamma^{(\lambda)}(a-b-z, dx) + \\ & + \Gamma^{(\lambda)}(a, dy) H^{(\lambda)}(1, y, dz) \Gamma^{(\lambda)}(b-a-z, dx)] r_{\lambda}((\alpha-x, \beta-x)). \end{aligned}$$

Consideremos también la distribución conjunta del valor del proceso y de su supremo. Si  $0 < x \leq a$ , entonces

$$P \left\{ \sup_{s \leq t} \xi(s) < a, \xi(t) < x \right\} = P \left\{ \xi(t) < x \right\} + \\ + \int_0^t \int_0^\infty \Gamma(a, ds, dy) P \left\{ \xi(t-s) < x-a-y \right\};$$

si, en cambio,  $0 < a < x$ , entonces

$$P \left\{ \sup_{s \leq t} \xi(s) < a, \xi(t) < x \right\} = Q_+(t, a).$$

**16.4.6. Distribución del supremo de un proceso en el intervalo infinito.** Supongamos que  $\int_0^\infty \frac{1}{t} P \left\{ \xi(t) > 0 \right\} dt < \infty$  y, por tanto (véanse los pp. 3.3 y 3.4),  $P \left\{ \sup_t \xi(t) < \infty \right\} = 1$ . En este caso

$$\int_0^\infty e^{tx} dx P \left\{ \sup_t \xi(t) < x \right\} = \exp \left\{ \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_0^\infty (e^{tx} - 1) d_x F(t, x) dt \right\},$$

donde  $F(t, x) = P \left\{ \xi(t) < x \right\}$ .

Examinemos el caso cuando la cumulante del proceso tiene la forma (4.6), es decir, el proceso tiene solamente saltos negativos. Entonces,

$$P \left\{ \sup_t \xi(t) < x \right\} = 1 - e^{-kx},$$

donde  $k$  es una raíz positiva de la ecuación  $K_+(k) = 0$ ,  $K_+(x)$  se da mediante la igualdad (4.7).

## 16.5. Proceso de Poisson

**16.5.1. Definición del proceso homogéneo de Poisson.** Un proceso homogéneo con incrementos independientes  $\xi(t)$  se llama proceso homogéneo de Poisson, si  $\xi(t)$  tiene la distribución de Poisson. En este caso existe tal  $a > 0$  que para todo  $k \geq 0$  se tiene

$$P \left\{ \xi(h) = k \right\} = P \left\{ \xi(t+h) - \xi(t) = k \right\} = \frac{(ah)^k}{k!} e^{-ah}. \quad (5.1)$$

La función característica del proceso de Poisson tiene por expresión

$$\varphi(t, z) = M e^{iz\xi(t)} = \exp(at[e^{iz} - 1]).$$

Demos a conocer una situación general, en la que los fenómenos se describen con la ayuda del proceso de Poisson.

Supongamos que en un experimento se observan las apariciones de ciertos sucesos. Si: 1) el número de sucesos ocurridos durante el lapso  $[t, t+h]$  no depende del número y momentos de aparición de los sucesos en el lapso  $[0, t]$ ; 2) la probabilidad de que en el intervalo de tiempo

$[t, t+h]$  aparezca 1 suceso es igual a  $ah + o(h)$ ;  $\xi$ ) la probabilidad de que en el intervalo de tiempo  $[t, t+h]$  aparezca más de un suceso es igual a  $o(h)$ , entonces la magnitud  $\xi(t)$ , igual al número de sucesos ocurridos en el intervalo  $[0, t]$  será, como función de  $t$ , un proceso de Poisson.

Cada proceso homogéneo escalonado con incrementos independientes, todos los saltos del cual son iguales a 1, es un proceso de Poisson.

16.5.2. Algunas propiedades del proceso de Poisson. Consideraremos algunas propiedades del proceso  $\xi_\gamma(t) = \gamma t + \xi(t)$ , donde  $\xi(t)$  es un proceso de Poisson cuyas distribuciones se dan por la fórmula (5.1).

I. Si  $\gamma + a > 0$ , entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) = +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) > -\infty) = 1;$$

si  $\gamma + a < 0$ , entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) < +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) = -\infty) = 1;$$

si  $\gamma + a = 0$ , entonces

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) = +\infty) = P(\inf_t \xi_\gamma(t) = -\infty) = 1.$$

II. Sea:  $\gamma < 0$ ,  $\gamma + a > 0$ . En este caso, para  $x < 0$

$$P(\inf_t \xi_\gamma(t) < x) = e^{kx}, \quad (5.2)$$

donde  $k$  es la raíz positiva de la ecuación

$$a(e^{-k} - 1) - k\gamma = 0. \quad (5.3)$$

III. Sea:  $\gamma < 0$ ,  $\gamma + a < 0$ . En este caso, para todo  $x > 0$

$$P(\sup_t \xi_\gamma(t) > x) = 1 - \left(1 + \frac{a}{\gamma}\right) \times \\ \times \sum_{k=0}^{[x]} \frac{(x-k)^k}{k!} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k e^{-\frac{a}{\gamma}(x-k)}, \quad (5.4)$$

donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ .

IV. Supongamos  $c < 0 < d$ . Designemos mediante  $p(c, d)$  la probabilidad de que el proceso  $\xi_\gamma(t)$  alcance el nivel  $c$  antes de caer en el intervalo  $(d, \infty)$ . En este caso, para  $\gamma < 0$ , se tiene

$$p(c, d) = \frac{\sum_{k=0}^{[d]} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} e^{ka/\gamma} (d-k)^k}{e^{\frac{a}{\gamma}c} \sum_{k=0}^{[d-c]} \left(\frac{a}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} e^{ka/\gamma} (d-c-k)^k} \quad (5.5)$$

donde  $[x]$  es la parte entera de  $x$ .

16.5.3. Proceso de Poisson no homogéneo. Esto es un proceso estocástico continuo con incrementos independientes  $\xi(t)$ , para el cual los incrementos  $\xi(t+h) - \xi(t)$  tienen distribuciones de Poisson.

Para este proceso existe una función no decreciente  $a(t)$  tal que

$$P\{\xi(t+h) - \xi(t) = k\} = \frac{[a(t+h) - a(t)]^k}{k!} e^{-[a(t+h) - a(t)]}. \quad (5.6)$$

El proceso de Poisson describe el número de apariciones de ciertos sucesos aleatorios, si están cumplidas las condiciones: 1) en cada intervalo finito ocurre, con la probabilidad 1, un número finito de sucesos; 2) los números de apariciones de los sucesos en los intervalos disjuntos no dependen uno del otro; 3) la probabilidad de aparición de al menos un suceso en cierto intervalo tiende a cero, si la longitud del intervalo tiende a cero; 4) la probabilidad de aparición simultánea de dos y más sucesos es nula. Si estas condiciones están cumplidas y  $\xi(t)$  significa el número de sucesos ocurridos en el intervalo  $[t_0, t]$ , entonces  $\xi(t)$  es el proceso de Poisson.

Si la función  $a(t)$ , que figura en la fórmula (5.6), es estrictamente monótona, recurriendo a una transformación sencilla podemos convertir el proceso en uno homogéneo. Supongamos que  $\xi(t)$  está definido en  $[t_0, \infty)$  y  $a(t_0) = 0$ . Designemos mediante  $\lambda(t)$  una función inversa con relación a  $a(t)$ :  $a(\lambda(t)) = t$ . La función  $\lambda(t)$  está definida en el intervalo  $[0, a(+\infty))$ . Sea  $\xi_1(t) = \xi(\lambda(t))$ . Entonces, para  $0 \leq t < t+h < a(+\infty)$  se tiene

$$\begin{aligned} P\{\xi_1(t+h) - \xi_1(t) = k\} &= P\{\xi(\lambda(t+h)) - \xi(\lambda(t)) = k\} = \\ &= \frac{[a(\lambda(t+h)) - a(\lambda(t))]^k}{k!} \exp\{-[a(\lambda(t+h)) - a(\lambda(t))]\} = \frac{h^k}{k!} e^{-h}. \end{aligned}$$

De este modo,  $\xi_1(t)$  es un proceso homogéneo de Poisson de parámetro 1. La transformación mencionada permite reducir la resolución de varios problemas para el proceso general de Poisson a la resolución de problemas para un proceso homogéneo.

## 16.6. Proceso de Wiener

16.6.1. Definición y algunas propiedades. Se llama proceso de Wiener en  $R^m$  un proceso homogéneo con incrementos independientes para el cual  $\xi(t)$  tiene distribución gaussiana con la densidad

$$p_t(x) = (2\pi t)^{-\frac{m}{2}} \exp\left\{-\frac{(x, x)}{2t}\right\}. \quad (6.1)$$

Este proceso se denomina también proceso de Wiener  $m$ -dimensional. La función característica del proceso tiene por expresión

$$\varphi_t(x) = M \exp\{i(x, \xi(t))\} = e^{-\frac{t(x, x)}{2}}. \quad (6.2)$$

He aquí algunas propiedades del proceso de Wiener multidimensional.

- I. Un proceso de Wiener separable es continuo con la probabilidad 1.
- II. Ley local del logaritmo reiterado.

$$P\left\{\overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln 1/t}} = 1\right\} = P\left\{\underline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln 1/t}} = -1\right\} = 1.$$

### III. Ley del logaritmo reiterado

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = -1 \right\} = 1.$$

IV. Si la dimensión del espacio  $m \geq 3$ , entonces

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow +\infty} |\xi(t)| = +\infty \right\} = 1,$$

con ello, para todo  $\lambda > 1$ ,

$$P \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\ln T)^{\lambda/m - 1/2}}{\sqrt{T}} \inf_{t > T} |\xi(t)| = +\infty \right\} = 1.$$

V. Si  $z \in R^m$  y  $|z| = 1$ , entonces el proceso  $(z, \xi(t)) = \xi_z(t)$  es un proceso de Wiener unidimensional. Sea, ahora,  $\{e_1, \dots, e_m\}$  una base ortonormada en  $R^m$ . En este caso los procesos  $\xi_{e_1}(t), \dots, \xi_{e_m}(t)$  son procesos de Wiener unidimensionales independientes entre sí.

VI. Sean:  $a \in R^m$ ,  $C$  un operador lineal en  $R^m$  y  $\xi(t)$ , un proceso de Wiener  $m$ -dimensional. Entonces,

$$\xi_1(t) = ta + C\xi(t) \quad (6.3)$$

es un proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes. Su función característica es de la forma

$$M_e^{i(z, \xi_1(t))} = e^{i(z, a) - \frac{t}{2} (Bz, z)}, \quad (6.4)$$

donde  $B = CC^*$  ( $C^*$  es un operador conjugado de  $C$ ). Todo proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes (su función característica tiene forzosamente por expresión (6.4)) puede ser representado en la forma (6.3); a título de  $C$  podemos tomar el operador  $B^{1/2}$  (la raíz cuadrada positiva de un operador no negativo). Por esta razón, para todo proceso de Gauss homogéneo con incrementos independientes  $\xi_1(t)$  existen unos vectores  $a, e_1, e_2, \dots, e_m$ , unos procesos de Wiener homogéneos independientes  $w_1(t), \dots, w_m(t)$  y, además, unos números  $\beta_1, \dots, \beta_m$  tales que

$$\xi_1(t) = ta + \sum_{h=1}^m \beta_h w_h(t) e_h. \quad (6.5)$$

A título de vectores  $e_h$  se pueden tomar los vectores propios del operador  $B$ ,  $\beta_h = \sqrt{(Be_h, e_h)}$ .

16.6.2. Método de ecuaciones diferenciales. Sea  $\xi(t)$  un proceso de Wiener  $m$ -dimensional. Designemos mediante  $\Delta$  el operador de Laplace en  $R^m$ :

$$\Delta u = \sum_{h=1}^m \frac{\partial^2 u}{(\partial x^h)^2},$$

donde  $x^1, \dots, x^m$  son las coordenadas del punto  $x$  en la base ortonormada fijada en  $R^m$ .

I. La función  $Mf(x + \xi(t)) = u(t, x)$  donde  $f$  es una función acotada continua, satisface la ecuación

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x)$$

con la condición inicial

$$\lim_{t \downarrow 0} u(t, x) = f(x).$$

II. Sea también  $g(x)$  una función continua acotada. Entonces

$$Mf(x + \xi(t)) \exp \left\{ \int_0^t g(x + \xi(s)) ds \right\} = v(t, x)$$

satisface la ecuación y la condición inicial

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta v(t, x) + g(x) v(t, x),$$

$$\lim_{t \downarrow 0} v(t, x) = f(x).$$

**Observación.** Las afirmaciones I y II quedan válidas, si en lugar del requisito de que sean acotadas  $f$  y  $g$  se exige el cumplimiento de la condición

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + |f(x)|) + \varepsilon(x)}{|x|^2} = 0.$$

III. Sea  $G \subset R^m$  un dominio conexo con la frontera suave  $\Gamma$ . Designemos con  $\tau_x$  el momento en que el proceso  $x + \xi(t)$  ( $x \in G$ ) llega por primera vez a la frontera  $\Gamma$ :

$$\tau_x = \inf \{t: x + \xi(t) \in \bar{G}\}.$$

La magnitud  $\tau_x$  puede tomar el valor de  $+\infty$ . Supongamos seguidamente que  $\varphi(x)$  es una función continua arbitraria en  $\Gamma$ . Entonces:

a) la función

$$u(x) = M\varphi(x + \xi(\tau_x)) \chi_{\{\tau_x < \infty\}}$$

$$(\chi_{\{\tau_x < \infty\}} = 1, \text{ si } \tau_x < \infty \text{ y } \chi_{\{\tau_x < \infty\}} = 0, \text{ si } \tau_x = +\infty)$$

satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\Delta u(x) = 0 \text{ y } u(x) = \varphi(x) \text{ para } x \in \Gamma,$$

es decir,  $u(x)$  es una función armónica en  $G$  con el valor de frontera  $\varphi$  dado;

b) la función

$$v(x) = M \int_0^{\tau_x} g(x + \xi(s)) ds,$$

donde  $g(x)$  es continua y acotada en  $G$ , satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\Delta v(x) = -2g(x), \quad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma;$$



c) la función

$$w(x) = M\varphi(x + \xi(\tau_x)) \exp \left\{ \int_0^{\tau_x} g(x + \xi(s)) ds \right\}$$

satisface la ecuación y la condición de frontera

$$\frac{1}{2} \Delta w(x) + g(x) w(x) = 0, \quad w(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma;$$

d) la función

$$u(t, x) = Mf(x + \xi(t)) \exp \left\{ \int_0^t g(x + \xi(s)) ds \right\} \chi_{\{\tau_x > t\}},$$

donde  $\chi_{\{\tau_x > t\}} = 1$ , cuando  $\tau_x > t$  y  $\chi_{\{\tau_x > t\}} = 0$  cuando  $\tau_x \leq t$ , satisface la ecuación y las condiciones de frontera:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u(t, x) + g(x) u(t, x), \quad x \in G; \quad u(0, x) = f(x), \\ x \in G, \quad u(t, x) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t > 0.$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son continuas en la clausura de  $G$ ; cuando  $G$  es no acotado, estas funciones deben satisfacer la condición enunciada en la observación.

16.6.3. Proceso de Wiener unidimensional. Consideremos las distribuciones de ciertas funcionales del proceso de Wiener unidimensional  $w(t)$ .

I. Distribución del máximo. Para  $x > 0$

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) < x \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^x e^{-u^2/2t} du; \\ P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) > x \right\} = 2P(w(t) > x).$$

II. Distribución del tiempo del primer paso. Sea  $x > 0$ ,  $\tau_x = \inf \{t: w(t) > x\}$ . En este caso la magnitud  $\tau_x$  tiene la siguiente densidad de distribución: cuando  $s > 0$ ,

$$\frac{d}{ds} P(\tau_x < s) = \frac{x}{\sqrt{2\pi s^3}} e^{-x^2/2s}.$$

III. Distribución conjunta del máximo y del valor de un proceso. Cuando  $x < a$ ,  $a > 0$ ,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} w(s) < a, w(t) < x \right\} = P(w(t) < x) - P(w(t) > 2a - x) = \\ = P(w(t) < x) - P(\tilde{w}(t) < x - 2a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{x-2a}^x e^{-u^2/2t} du.$$

IV. Distribución del máximo de un módulo.

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)| < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \int_{-a}^a \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2t} (u - 2ka)^2 \right\} du.$$

V. Distribución conjunta del máximo de un módulo y del valor de un proceso. Para  $[c, d] \subset [-a, a]$  se tiene

$$P \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} |w(s)| < a, w(t) \in [c, d] \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} (-1)^h \int_c^d \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (u + 2ka)^2 \right\} du.$$

VI. Distribución conjunta del máximo, mínimo y del valor de un proceso. Sea  $a < 0 < b$ ,  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ . Entonces

$$P \left\{ \min_{0 \leq s \leq t} w(s) > a, \max_{0 \leq s \leq t} w(s) < b, w(t) \in (\alpha, \beta) \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x + 2k(b-a))^2 \right\} - \right. \\ \left. - \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x - 2a + 2k(b-a))^2 \right\} \right] dx.$$

VII. Designemos mediante  $\tau$  el momento en que ocurre la primera salida del proceso del segmento  $[a, b]$ ;  $a < 0 < b$ :

$$\tau = \min \{t: w(t) \notin [a, b]\}.$$

En este caso,

$$P\{w(\tau) = b\} = \frac{-a}{b-a}; \quad P\{w(\tau) = a\} = \frac{b}{b-a};$$

$$P\{\tau < t, w(\tau) = a\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-b}^b \sum_{h=0}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2t} (x + (2k+1)(b-a))^2 \right\} dx.$$

VIII. Ley de arco seno. Supongamos que  $v(x) = 1$  para  $x > 0$ ,  $v(x) = 0$  para  $x \leq 0$ . Entonces

$$P \left\{ \int_0^t v(w(s)) ds < x \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsen \sqrt{\frac{x}{t}}.$$

16.6.4. Proceso de Wiener homogéneo con desplazamiento. Supongamos que  $\xi(t) = at + w(t)$ ;  $a$  es cierto número y  $w(t)$ , un proceso de Wiener unidimensional. Examinemos algunas funcionales del proceso.

I. Sea  $x > 0$ , mientras que  $\tau_x$  es el momento de la primera caída en el punto  $x$ . En este caso, cuando  $a \geq 0$ , tenemos

$$M e^{-\lambda \tau_x} = \exp \{ -x (\sqrt{a^2 + 2\lambda} - a) \} \quad (\lambda > 0).$$

Si  $a < 0$ , se tiene

$$P(\tau_x = +\infty) = P(\sup_t \xi(t) < x) = 1 - e^{2ax}.$$

II. Supongamos que  $c < 0 < d$ ,  $(\alpha, \beta) \subset (c, d)$ ,

$$Q(t; c, d; \alpha, \beta) = P(\min_{s \leq t} \xi(s) > c,$$

$$\max_{s \leq t} \xi(s) < d, \quad \xi(t) \in (\alpha, \beta)),$$

$$q(\lambda; c, d; \alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q(t; c, d; \alpha, \beta) dt.$$

Entonces,

$$q(\lambda; c, d; \alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2\lambda}} \left[ \int_\alpha^\beta e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}|y|} dy - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} c}{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} (d - c)} \int_\alpha^\beta e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}(d - y)} dy - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} d}{\operatorname{sh} \sqrt{a^2 + 2\lambda} (d - c)} \int_\alpha^\beta e^{ay - \sqrt{a^2 + 2\lambda}(y - c)} dy \right].$$

III. Supongamos que  $c < 0 < d$  y  $\tau$  es el momento de la primera salida de  $[c, d]$ :

$$\tau = \inf \{ t : \xi(t) \notin [c, d] \}$$

En este caso

$$P\{\xi(\tau) = c\} = \frac{1 - e^{-2ad}}{e^{-2ac} - e^{-2ad}}.$$

## PROCESOS RAMIFICADOS

17.1. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas  
(tiempo discreto)

17.1.1. Definición. Los procesos ramificados sirven de modelo para múltiples fenómenos reales de multiplicación, pérdida y transformación de partículas en biología, física, técnica, demografía, etc.

Definición 1. Una cadena de Márkov homogénea  $\xi(t)$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , con valores de números enteros no negativos se denomina proceso ramificado con un mismo tipo de partículas o proceso de Galton - Watson, si sus probabilidades de paso  $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$  durante el tiempo  $t$  satisfacen las condiciones

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & t=0; \\ \sum_{j_1 + \dots + j_i = j} p_{1j_1}(t) p_{1j_2}(t) \dots p_{1j_i}(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Se ha aceptado la siguiente terminología. Un modelo que se describe por un proceso ramificado se llama a menudo población. El valor de un proceso ramificado  $\xi(t)$  en el momento  $t$  lo llaman número de partículas o individuos en la población en la generación de número  $t$ . Suele decirse también que  $\xi(t)$  es el número general de descendientes de las partículas  $\xi(0)$  de generación nula en la generación de número  $t$ .

La primera igualdad en (1.1) significa la ausencia de la auto-generación de la población, desaparecidas todas las partículas, o bien ausencia de la inmigración (aflujo de las partículas del exterior).

La segunda igualdad en (1.1), que significa que  $p_{ij}(t)$  es, para  $t \geq 1$ , la convolución  $i$ -múltiple de la distribución  $p_{1j}(t)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , con sí misma, es equivalente a la suposición de que cada una de las  $i$  partículas originales evoluciona (se pierde, se convierte en nuevas partículas del mismo tipo) independientemente de las otras. La segunda igualdad en (1.1) se denomina condición de ramificación.

Un proceso ramificado puede ser descrito en términos de la adición de magnitudes aleatorias independientes, igualmente distribuidas, no negativas de valores enteros.

Sean  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas que se interpretan como un número de descendientes proporcionados por cualquiera de las partículas en el momento de la transformación, es decir,  $P\{\xi_k = j\} = p_{1j}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . El número de partículas  $\xi(t+1)$  en la  $(t+1)$ -ésima generación se expresa en términos del número de partículas  $\xi(t)$

en la generación  $t$  como

$$\xi(t+1) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\xi(t)} \zeta_k, & \text{si } \xi(0) = 1; \\ \sum_{l=1}^t \sum_{k=1}^{\xi(l)} \zeta_{k,l}, & \text{si } \xi(0) = t. \end{cases} \quad (1.2)$$

**17.1.2. Ejemplos. 1.** El caso de apellido sobreviviente. El apellido lo heredan solamente los hijos varones. Supongamos que cada individuo tiene con la probabilidad  $p_j$   $j$  descendientes de sexo masculino. Cada individuo engendra la primera generación de los descendientes los cuales, a su vez, la segunda generación, etc. El número general de descendientes en la  $t$ -ésima generación es  $\xi(t)$ .

Un interés determinado representa la investigación del número de descendientes en la  $t$ -ésima generación, es decir, la distribución de  $\xi(t)$ , como también el modo de determinar la probabilidad de generación del apellido  $q = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t/\xi(0) > 0\}$ .

**2.** Un multiplicador electrónico es un dispositivo para amplificar un débil flujo electrónico. En el camino del flujo electrónico emanado por una fuente (el número  $\xi(0)$  de tales electrones es la generación nula) se pone sucesivamente una serie de placas. Cada electrón, al chocar con la primera placa, genera un número aleatorio de nuevos electrones (la primera generación) los cuales, a su vez, golpean contra la siguiente placa. El proceso  $\xi(t)$ , es decir, el número de electrones emitidos de la  $t$ -ésima placa es, pues, un proceso ramificado.

**3.** Una reacción en cadena de neutrones. Al interactuar con el neutrón, un núcleo se desintegra omitiendo un número aleatorio de nuevos neutrones. Cada uno de estos neutrones secundarios puede bombardear otros núcleos produciendo un número aleatorio de nuevos neutrones, etc. Si el número originario de neutrones era igual a 1 (generación nula), la primera generación de neutrones generados por el neutrón de partida es una magnitud aleatoria  $\xi(1)$ . La dimensión de la  $t$ -ésima generación de  $\xi(t)$  se forma por el número aleatorio de neutrones generados por  $\xi(t-1)$  neutrones de la  $(t-1)$ -ésima generación.

**17.1.3. Ecuaciones para las funciones generadas.** Los valores de números enteros de los procesos ramificados y, en particular, las igualdades (1.1) y (1.2), que determinan dichos procesos, llevan a que el aparato de funciones generadoras (véase el cap. 3) sea fundamental en la investigación de estos procesos.

**Observación.** Para los procesos de ramificación  $\xi(t)$  se supone corrientemente (y esto, como regla, se hace en lo sucesivo) que  $\xi(0) = 1$ , lo que, sin embargo, no restringe la generalidad, pues, en virtud de la definición 1, cuando  $\xi(0) > 1$ , hacemos frente a  $\xi(0)$  procesos que se desarrollan independientemente y que provienen de cada una de las  $\xi(0)$  partículas originarias.

Supongamos que  $p_j = P\{\xi(1) = j/\xi(0) = 1\}$ ,  $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}$  y sean  $\Phi(s) = M[s^{\xi(1)}/\xi(0) = 1]$  y  $\Phi_t(s) = M[s^{\xi(t)}/\xi(0) = 1]$  las funciones generadoras de estas distribuciones,

es decir,

$$\Phi_t(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t) s^j, \quad \Phi(s) = \Phi_1(s). \quad (1.3)$$

La función  $\Phi_t(s)$  se denomina *función generadora del proceso ramificado*  $\xi(t)$ ,  $t = 0, 1, \dots$ .

**Teorema 1.** Para  $t, \tau \geq 0$  cualesquiera la función generadora  $\Phi_t(s)$  satisface la ecuación funcional principal

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)) \quad (1.4)$$

y la condición inicial

$$\Phi_0(s) = s. \quad (1.5)$$

De este modo,  $\Phi_t(s)$  es una iteración  $t$ -múltiple de la función generadora  $\Phi(s)$ :  $\Phi_1(s) = \Phi(s)$ ,  $\Phi_2(s) = \Phi(\Phi(s))$ ,  $\Phi_3(s) = \Phi(\Phi_2(s)) = \Phi_2(s)(\Phi(s)) = \Phi(\Phi(\Phi(s)))$ , ... y, en general,

$$\Phi_t(s) = \Phi(\Phi(\dots \Phi(\Phi(s)) \dots)). \quad (1.6)$$

Si  $\Phi^{(t)}(s_1, s_2, \dots, s_t) = M[s_1^{\xi(1)} \dots s_t^{\xi(t)} / \xi(0) = 1]$  es una función generadora conjunta de las magnitudes aleatorias  $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(t)$ , entonces

$$\Phi^{(t)}(s_1, \dots, s_t) = \Phi(s_1 \Phi(s_2 \Phi(\dots s_{t-1} \Phi(s_t)) \dots)).$$

Supongamos que  $F_t(s)$  es una función generadora de la suma  $\xi(0) + \dots + \xi(t)$  del número general de partículas en una población durante el tiempo  $[0, t]$ ,  $t = 0, 1, \dots$ , y  $F(s)$  es una función generadora de la suma  $\xi(0) + \xi(1) + \dots$ , es decir, del número general de partículas en la población. Entonces,

$$\left. \begin{aligned} F_{t+1}(s) &= s \Phi(F_t(s)); \\ F(s) &= s \Phi(F(s)). \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

**17. 1.4. Ejemplos. 1. Procesos de pérdida.** Sea  $\xi(0) = 1$ ,  $p_0 = P\{\xi(1) = 0 / \xi(0) = 1\} = 1 - p$ ,  $p_1 = P\{\xi(1) = 1 / \xi(0) = 1\} = p$ ,  $0 < p < 1$ ,  $p_k = 0$ ,  $k > 1$ . En este caso  $\Phi(s) = 1 - p + sp$ ,  $\Phi_t(s) = 1 - p + sp$ , de donde  $p_{10}(t) = 1 - p^t$ ,  $p_{11}(t) = p^t$ ,  $p_{1k}(t) = 0$ ,  $k > 1$ .

**2. Funciones generadoras lineales fraccionales.** Sea  $p_0 = \frac{1-(b+c)}{1-c}$ ,  $p_k = bc^{k-1}$ ,  $b, c > 0$ ,  $b+c < 1$ . Entonces,  $\Phi(s) = \frac{1-(b+c)}{1-c} + \frac{bs}{1-cs}$ .

$\Phi(s)$  es una función lineal fraccional del tipo  $\frac{\alpha + \beta s}{\gamma + \delta s}$ .

$$\text{Sea } m = \Phi'(1) = \frac{b}{(1-c)^2} \text{ y}$$

$$q = \begin{cases} 1, & \text{si } m \leq 1; \\ p_0/c, & \text{si } m > 1. \end{cases}$$

Entonces

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - m^t \left[ \frac{1-q}{m^t - q} + m^t \frac{\left[ \frac{1-q}{m^t - q} \right]^2 s}{1 - \left[ \frac{m^t - 1}{m^t - q} \right] s} \right], & \text{si } m \neq 1; \\ \frac{tc - [(t+1)c - 1]s}{1 + (t-1)c - tcs}, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

De aquí, por ejemplo,

$$P_{10}(t) = \begin{cases} 1 - m^t \left[ \frac{1-q}{m^t - q} \right], & \text{si } m \neq 1; \\ \frac{tc}{1 + (t-1)c}, & \text{si } m = 1. \end{cases}$$

17.1.5. Momentos y clasificación. Supongamos que  $\xi(0) = 1$ ,  $m(t) = M\xi(t)$ ,  $m = m(1)$ ,  $\sigma(t) = D\xi(t)$ ,  $\sigma^2 = \sigma(1)$ .

De corolario inmediato de la ecuación funcional principal (1.4) para la función generadora de un proceso ramificado sirven las siguientes expresiones para  $m(t)$  y  $\sigma(t)$ :

$$m(t) = m^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots; \quad (1.8)$$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma^2 m^{t-1} \frac{m^t - 1}{m - 1}, & \text{si } m \neq 1; \\ \sigma^2 t, & \text{si } m = 1. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Definición 2.** Un proceso ramificado con un mismo tipo de partículas se llama subcrítico, si  $m < 1$ ; crítico, si  $m = 1$ ,  $\Phi'(1) > 0$ ; supercrítico, si  $m > 1$ .

La condición  $\Phi'(1) > 0$  en la definición 2 expresa la no singularidad, es decir, la regularidad subcrítica del proceso correspondiente.

De este modo, para los procesos subcríticos  $m(t)$  va decreciendo de forma exponencial, para los procesos críticos  $m(t)$  es constante y para los procesos supercríticos,  $m(t)$  crece según una ley exponencial.

17.1.6. Propiedades asintóticas y teoremas del límite. Si en un proceso ramificado  $\xi(t)$ , para cierto  $t_0 > 0$ ,  $\xi(t_0) = 0$ , suele decirse que el proceso  $\xi(t)$  ha degenerado para el momento de tiempo  $t_0$ . La magnitud  $q = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = 1\}$  se denomina probabilidad de degeneración.

Si  $q = 1$ , el proceso  $\xi(t)$  se llama degenerativo.

**Teorema 2.** Para que un proceso ramificado sea degenerativo, es necesario y suficiente que sea subcrítico o crítico.

**Teorema 3.** La probabilidad de degeneración  $q$  es la mínima raíz no negativa de la ecuación

$$\Phi(s) = s. \quad (1.10)$$

La probabilidad de degeneración  $q$  puede ser determinada como uno de los siguientes límites:

$$q = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_{10}(t); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(s), \quad |s| < 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

con la particularidad de que en el último caso la convergencia es uniforme respecto de toda  $|s| \leq r$ ,  $r < 1$ .

El comportamiento asintótico de las probabilidades  $p_{10}(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  se describe del modo siguiente:

**Teorema 4.** a) Para un proceso subcrítico en el cual  $M\xi(1) \ln \xi(1) < \infty$ ,

$$m^{-t} (1 - p_{10}(t)) = c + o(1), \quad (1.12)$$

donde

$$c = \prod_{n=0}^{\infty} h(\Phi_n(0)), \quad h(s) = \frac{1 - \Phi(s)}{m(1-s)}, \quad (1.13)$$

siendo  $c > 0$ , cuando y sólo cuando,  $M\xi(1) \ln \xi(1) < \infty$ .

b) Para un proceso crítico en el cual  $\Phi''(1) < \infty$

$$p_{10}(t) = 1 - \frac{2}{t\Phi''(1)}(1 + o(1)). \quad (1.14)$$

c) Para un proceso supercrítico

$$p_{10}(t) = q - d[\Phi'(q)]^t + o([\Phi'(q)]^{2t}), \quad (1.15)$$

donde  $0 < \Phi'(q) < 1$ ,  $d$  es una constante positiva.

Un proceso ramificado converge hacia cero o bien hacia el infinito y la convergencia en consideración es extremadamente inestable en el sentido de que si  $m = M\xi(1) < \infty$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_{1j}(t) = 0$ ,

$j = 1, 2, \dots$ , y para todo  $n \geq 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) \geq n/\xi(0) = 1\} = 1 - q.$$

Para los procesos subcríticos existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p_{1j}(t)}{1 - p_{10}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j/\xi(0) > 0, \xi(0) = 1\} = Q_j, \quad (1.16)$$

$$j \geq 1,$$

y las probabilidades  $Q_1, Q_2, \dots$  forman una distribución de probabilidades, es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = 1.$$

**Teorema 5.** Una función generadora  $Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j s^j$  satisface la ecuación funcional

La esperanza matemática de la distribución  $Q_1, Q_2, \dots$  es igual a  $1/c$ , donde  $c$  se determina por la igualdad (1.13).

Para los procesos críticos con el segundo momento finito es válido el teorema del límite.



**Teorema 6.** Si  $\xi(t)$  es un proceso ramificado crítico cuyo segundo momento es finito, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{\xi(t)}{M[\xi(t)/\xi(t) > 0, \xi(0) = 1]} > x/\xi(t) > 0, \xi(0) = 1 \right\} = e^{-x}. \quad (1.18)$$

Si  $m < \infty$ , el proceso  $\eta(t) = m^{-t}\xi(t)$  es una martingala, es decir,  
 $M[\eta(t + \tau)/\eta(t)] = \eta(t), \tau \geq 0.$

Sea  $\xi(t)$  un proceso supercrítico. Del teorema sobre la convergencia de las martingalas se deduce que, con la probabilidad 1, el proceso  $\eta(t)$  converge hacia cierta magnitud aleatoria  $\eta$ .

**Teorema 7.** La función característica  $\varphi(s) = M e^{s\eta}$  de una magnitud aleatoria límite  $\eta$  satisface la ecuación funcional

$$\varphi(ms) = \Phi(\varphi(s)), \quad (1.19)$$

que tiene una única solución en la clase de funciones características cuyo primer momento es igual a 1.

Si  $0 < \sigma^2 < \infty$ , la función de distribución  $K(x) = P\{\eta < x\}$  experimenta un salto en cero:  $P\{\eta = 0\} = q$ . La función de distribución condicional

$$P\{\eta < x/\eta > 0\} = \frac{K(x) - q}{1 - q}$$

es absolutamente continua, mientras que la varianza condicional  $D[\eta/\eta > 0]$  es positiva.

## 17.2. Procesos ramificados con un mismo tipo de partículas [tiempo continuo]

**17.2.1. Definiciones.** Las teorías de procesos ramificados con tiempo continuo y tiempo discreto tienen mucho de común.

**Definición 1.** Una cadena homogénea de Márkov  $\xi(t), t \in [0, \infty)$ , con valores no negativos de números enteros se llama proceso ramificado con un mismo tipo de partículas, si sus probabilidades de paso  $p_{IJ}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}$  satisfacen las condiciones:

$$1) \quad p_{IJ}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & t = 0; \\ \sum_{j_1 + \dots + j_l = i} p_{1j_1}(t) p_{1j_2}(t) \dots p_{1j_l}(t), & t \neq 0; \end{cases} \quad (2.1)$$

$$2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p_{IJ}(t) = \delta_{IJ}. \quad (2.2)$$

Supongamos que  $\xi(0) = 1$  y las probabilidades de paso  $p_{IJ}(t)$ , para los valores de  $t$  próximos a cero, satisfacen la condición

$$\left. \begin{aligned} p_{11}(t) &= 1 + q_1 t + o(t), & q_1 < 0; \\ p_{1j}(t) &= q_j(t) + o(t), & j \neq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Es evidente que  $q_j \geq 0$  para  $j \neq 1$  ( $q_1$ , en este caso, se llaman densidades de paso).

Introduzcamos las funciones generadoras

$$\Phi_t(s) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j}(t) s^j = M \{s^{\xi(t)} / \xi(0) = 1\}, \quad f(s) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j s^j.$$

La función  $f(s)$  la denominan función infinitesimal o función generadora diferencial del proceso ramificado. La evolución del dado proceso ramificado con tiempo continuo se describe del modo siguiente: cada partícula vive durante un tiempo aleatorio distribuido según una ley exponencial de parámetro  $\lambda = \sum_{j \neq 1} q_j$ . Al expirar el tiempo de vida, la partícula engendra un número aleatorio de partículas del mismo tipo con la distribución

$$P\{\xi = j\} = \frac{q_j}{\sum_{j \neq 1} q_j}, \quad j = 0, 2, 3, \dots$$

De ejemplo más simple de un proceso ramificado con tiempo continuo sirve el proceso de pérdida y multiplicación para el cual

$$q_0 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_1 = -(\alpha + \beta), \quad q_j = 0, \quad j = 3, 4, \dots$$

**Definición 2.** Un proceso ramificado  $\xi(t)$  se llama regular, si

$$\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(s) = 1. \quad (2.4)$$

**Teorema 1.** Para que el proceso  $\xi(t)$  sea regular, es necesario y suficiente que la integral

$$\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{du}{f(u)}$$

diverja para  $\varepsilon > 0$  cualquiera.

**Observación.** Si  $\Phi_t(s)$  es una función generadora del proceso ramificado regular con tiempo continuo, entonces, al suponer  $\Phi(s) = \Phi_1(s)$  y contando por los momentos de tiempo  $t = 0, 1, 2, \dots$  obtenemos la función generadora de un proceso ramificado con tiempo discreto.

Si se cumplen las condiciones (2.3) y (2.4), la función generadora  $\Phi_t(s)$  del proceso ramificado satisface, uniformemente respecto de  $|s| < 1$ , la correlación asintótica

$$\Phi_t(s) = s + t f(s) + o(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

El siguiente teorema, que ofrece un análogo de la ecuación funcional principal para los procesos con tiempo discreto, es corolario de (2.5).

**Teorema 2.** Una función generadora  $\Phi_t(s)$  de un proceso ramificado con tiempo continuo satisface para  $|s| < 1$ :

a) la ecuación diferencial ordinaria (no lineal)

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = f(\Phi_t(s)) \quad (2.6)$$

con la condición inicial

$$\Phi_0(s) = s; \quad (2.7)$$

b) la ecuación lineal en derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial t} = f(s) \frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial s} \quad (2.8)$$

con la misma condición inicial (2.7);

c) la ecuación integral no lineal

$$\Phi_t(s) = \int_0^t h(\Phi_{t-u}^{-1}(s)) dG(u) + s(1-G(t)), \quad (2.9)$$

donde

$$G(t) = \begin{cases} 1 - e^{-q_1 t}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

y

$$h(s) = \frac{f(s) - q_1 s}{-q_1} = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q_j}{q_1} s^j.$$

En (2.9)  $G(t)$  se interpreta como una función de distribución del tiempo de vida de una partícula, es decir, del tiempo que ha pasado desde su nacimiento hasta la primera transformación en 0, 2, 3, ... partículas, y  $h(s)$  es la función generadora de las probabilidades condicionales  $\left\{ -\frac{q_j}{q_1} \right\}$ ,  $j = 0, 2, 3, \dots$ , de que la partícula se transforme en  $j$  partículas a condición de que tal transformación se había realizado.

La solución de las ecuaciones (2.6), (2.8), (2.9) existe para  $|s| < 1$  cualquiera y representa en sí una función analítica en el círculo  $|s| < 1$ , con la particularidad de que los coeficientes del desarrollo de esta función en una serie de potencias de  $s$  son no negativos.

Para los procesos regulares la solución de las ecuaciones citadas es única.

17.2.2. Ejemplos. 1. Sea  $f(s) = q_0 + s q_1 + s^2 q_2$ , es decir,

$$f(s) = a(s-1) + \frac{b}{2}(s-1)^2,$$

donde  $a = f'(1)$ ,  $b = f''(1)$ .

La ecuación (2.6) tiene la forma

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = a[\Phi_t(s) - 1] + \frac{b}{2}[\Phi_t(s) - 1]^2.$$

La solución de esta ecuación:

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{at}(1-s)}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)(1-s)+1}, & \text{si } a \neq 0; \\ 1 - \frac{1-s}{\frac{bt}{2}(1-s)+1}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

de donde, desarrollando  $\Phi_t(s)$  en una serie de potencias de  $s$ , se puede hallar

$$P_{10}(t) = \begin{cases} 1 - \frac{e^{at}}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1}, & \text{si } a \neq 0; \\ 1 - \frac{1}{\frac{bt}{2}+1}, & \text{si } a = 0, \end{cases}$$

y, para  $f \neq 0$ ,

$$P_{1j}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1\right)^2} \left[ \frac{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)}{\frac{b}{2a}(e^{at}-1)+1} \right]^{j-1}, & \text{si } a \neq 0; \\ \left(\frac{2}{bt+2}\right)^2 \left(\frac{bt}{bt+2}\right)^{j-1}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

2. Sea  $f(s) = a(s-1) + \lambda(1-s)^{1+\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lambda > \max\{\alpha, 0\}$ ; Aquí, el segundo momento del proceso es infinito y

$$\Phi_t(s) = \begin{cases} 1 - \left[ \frac{\lambda}{a}(1-e^{-\alpha at}) + e^{-\alpha at}(1-s)^{-\alpha} \right]^{-1/\alpha}, & \text{si } a \neq 0, \\ 1 - [\alpha \lambda t + (1-s)^{-\alpha}]^{-1/\alpha}, & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

3. Sea  $f(s) = \lambda(s-s^{k+1})$ ,  $\lambda > 0$ ,  $k$  es un número entero positivo. Aquí,

$$\Phi_t(s) = s [e^{\lambda kt} - (e^{\lambda kt} - 1) s^k]^{-1/k}.$$

4. Sea  $f(s) = \lambda [1-s][1+\ln(1-s)]$ . Aquí,

$$\Phi_t(s) = 1 - \exp\{e^{-\lambda t} - 1 + e^{-\lambda t} \ln(1-s)\}.$$

5. Sea  $f(s) = \lambda [1-s - (1-s)^\alpha]$ , donde  $\lambda > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Aquí,

$$\Phi_t(s) = 1 - [1 - e^{-(1-\alpha)\lambda t} + e^{-(1-\alpha)\lambda t} (1-s)^{1-\alpha}]^{1/(1-\alpha)}.$$

Este es un ejemplo de un proceso no regular, pues

$$\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(s) = 1 - (1 - e^{-(1-\alpha)\lambda t})^{1/(1-\alpha)} < 1.$$

**17.2.3. Momentos y clasificación.** El carácter finito de los momentos  $M[\xi(t)]^k$  para un proceso ramificado  $\xi(t)$ ,  $\xi(0) = 1$ , con tiempo continuo proviene de que es finita la  $k$ -ésima derivada de  $f(s)$  en la unidad.

Hagamos  $a = f'(1)$  y  $b = f''(1)$  y sea  $m(t) = M\xi(t)$ ,  $\sigma^2(t) = D\xi(t)$ .

Al derivar (2.9) respecto de  $s$  y al hacer  $s = 1$ , se pueden obtener las siguientes ecuaciones diferenciales para  $m(t)$  y  $\sigma^2(t)$ :

$$\frac{d}{dt} m(t) = am(t) \tag{2.10}$$

con la condición inicial  $m(0) = 1$ ;

$$\frac{d}{dt} \sigma^2(t) = \begin{cases} a\sigma^2(t) + (b-a)m^2(t), & \text{si } a \neq 0, \\ b, & \text{si } a = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

con la condición inicial  $\sigma^2(0) = 0$ ,

De aquí,  $m(t) = e^{at}$  y

$$\sigma^2(t) = \begin{cases} \left(\frac{b}{a} - 1\right) e^{at} (e^{at} - 1), & \text{si } a \neq 0, \\ bt, & \text{si } a = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

**Definición 3.** Un proceso de ramificación con tiempo continuo se denomina: a) subcrítico, si  $a < 0$ ; b) crítico, si  $a = 0$ ,  $b > 0$ ; c) supercrítico, si  $a > 0$ .

De (2.10), en particular, se deduce que  $m(t)$ : a) decrece según una ley exponencial para los procesos subcríticos; b) es constante para los procesos críticos; c) crece según una ley exponencial para los procesos supercríticos.

**17.2.4. Propiedades asintóticas y teoremas del límite.** Sea  $q = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = 1\}$  una probabilidad de degeneración del proceso  $\xi(t)$ .

Las condiciones con las cuales  $q = 1$  para los procesos ramificados con tiempo continuo son las mismas que para los procesos con tiempo discreto (véase el p. 17.1.6.).

**Teorema 3.** La probabilidad de degeneración  $q$  es la mínima raíz no negativa de la ecuación

$$f(s) = 0. \quad (2.13)$$

La probabilidad de degeneración  $q$  puede ser determinada como uno de los siguientes límites:

$$q = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} p_{10}(t) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(s), \quad |s| < 1, \end{cases} \quad (2.14)$$

con la particularidad de que en el último caso la convergencia es uniforme respecto de todos los  $s$ ,  $|s| \leq r$ ,  $v < 1$ .

El comportamiento asintótico de las probabilidades  $p_{10}(t)$  para  $t \rightarrow \infty$  se describe del modo siguiente.

**Teorema 4.** a) Para los procesos subcríticos

$$p_{10}(t) = 1 - ce^{at} (1 + o(1)), \quad (2.15)$$

si converge la integral  $\int_0^1 \frac{au + f(1-u)}{uf(1-u)} du = -\ln c$ .

b) Para los procesos críticos

$$p_{10}(t) = 1 - \frac{2}{bt} (1 + o(1)). \quad (2.16)$$

Para los procesos subcríticos con tiempo continuo existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P_{1j}(t)}{1 - p_{10}(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\xi(t) = j / \xi(t) > 0, \xi(0) = 1\} = Q_j \leq 1, j \geq 1.$$

Las probabilidades  $Q_1, Q_2, \dots$  forman una distribución de probabilidades  $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j = 1$ , y la función generadora  $Q(s) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j s^j$  tiene la forma

$$Q(s) = 1 - \exp \left\{ a \int_0^s \frac{du}{f(u)} \right\}. \quad (2.17)$$

Si la integral  $\int_0^1 \frac{au + f(1-u)}{uf(1-u)} du = -\ln c$  converge, entonces la distribución con una función generadora  $Q(s)$  tiene por esperanza matemática  $1/c$ . Para las distribuciones condicionales

$$P \left\{ \frac{\xi(t)}{M[\xi(t)]/\xi(t) > 0, \xi(0) = 1} > x; \xi(t) > 0, \xi(0) = 1 \right\}$$

tiene lugar el teorema del límite análogo al teorema del límite del p. 17.1.6.

Sea  $m = M\xi(1) < \infty$  y  $\eta(t) = e^{at}\xi(t)$ , donde  $a = f'(1)$ . El proceso  $\eta(t)$  será una martingala con tiempo continuo.

Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso supercrítico. Del teorema de convergencia de las martingalas se deduce que el proceso  $\eta(t)$ , con la probabilidad 1, converge, para  $t \rightarrow \infty$ , hacia cierta magnitud aleatoria  $\eta$ .

**Teorema 5.** La función característica  $\varphi(s) = M e^{is\eta}$  de una magnitud aleatoria límite  $\eta$  satisface la ecuación diferencial (no lineal)

$$\frac{d}{ds} \varphi(s) = \frac{f(\varphi(s))}{ds}, \quad \varphi(0) = 1,$$

o es equivalente a la ecuación integral

$$1 - \varphi(s) = -is \exp \left\{ \int_1^{\varphi(s)} \frac{f(u) - a(u-1)}{f(u)(u-1)} du \right\}.$$

Cuando  $b = f''(1) > 0$ , la función de distribución  $K(x) = P(\eta \leq x)$  experimenta un salto en cero:  $q = P\{\eta = 0\}$ .

La función de distribución condicional

$$P\{\eta \leq x/\eta > 0\} = \frac{K(x) - q}{1 - q}$$

es absolutamente continua y cuenta con una densidad que es continua para  $x > 0$ .

### 17.3. Procesos ramificados con un número finito de tipos de partículas [tiempo discreto]

**17.3.1. Definición.** Un proceso ramificado con  $m$  ( $m \geq 1$ ) tipos de partículas describe una población de partículas o individuos en la cual las partículas de cada tipo pueden engendrar descendientes de cada uno de los  $m$  tipos independientemente de otras partículas.

El espacio fásico de un proceso ramificado que simula una población de  $m$  tipos de partículas lo constituye el conjunto de vectores  $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)'$ , interpretados como vectores columnas, donde  $j_k$  son unos números enteros no negativos correspondientes al número de partículas de  $k$ -ésimo tipo (el símbolo 'significa la transposición).

Sea  $e_t$  la designación de un vector columna cuya  $t$ -ésima componente es igual a uno, mientras que las restantes componentes son nulas.

**Definición 1.** Una cadena homogénea de Márkov  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))'$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , cuyos valores son los vectores  $m$ -dimensionales con componentes de números enteros no negativos, se denomina proceso ramificado con  $m$  tipos de partículas, si sus probabilidades de paso  $p^{ij}(t) = P\{\xi(t) = j | \xi(0) = i\}$  (donde  $\xi(t) = j$  significa  $\xi_k(t) = j_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ ) satisfacen las condiciones

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \delta_{0j}, & i=0 \text{ (} 0=(0, \dots, 0) \text{ es el vector nulo);} \\ [p_{e_1 j}(t)]^{i_1^*} * [p_{e_2 j}(t)]^{i_2^*} * \dots * [p_{e_m j}(t)]^{i_m^*}, & i \neq 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

donde  $[p_{e_k j}(t)]^{i_k^*}$  significa la convolución  $i_k$ -múltiple de la distribución  $p_{e_k j}(t)$  con sí misma.

Un proceso ramificado con  $m$  tipos de partículas admite una descripción sencilla en términos de las sumas de magnitudes aleatorias. Sean  $\zeta_r = \{\zeta_r^{kl}, k, l = \overline{1, m}\}$ ,  $r = 1, 2, \dots$  unas matrices aleatorias independientes igualmente distribuidas con elementos no negativos de valores enteros. Para todo  $r$  las magnitudes aleatorias  $\zeta_r^{kl}$  se interpretan como un número de partículas de  $l$ -ésimo tipo engendradas por una partícula de  $k$ -ésimo tipo en el momento de transformación. Supongamos que la distribución de la  $k$ -ésima línea de la matriz  $\zeta_r$  tiene por expresión

$$P\{\zeta_r^{k1} = j_1, \dots, \zeta_r^{km} = j_m\} = p_{e_k j}(t),$$

donde  $j = (j_1, j_2, \dots, j_m)'$ . Tienen lugar las siguientes correlaciones: si  $\xi_k(t+1)$  es el  $k$ -ésimo componente del vector  $\xi(t+1) = (\xi_1(t+1), \xi_2(t+1), \dots, \xi_m(t+1))'$ , donde  $\xi(t)$  es un proceso de ramificación con  $m$  tipos de partículas, entonces

$$\xi_k(t+1) = \sum_{r=1}^{\xi_1(t)} \zeta_r^{1k} + \sum_{r=1}^{\xi_2(t)} \zeta_r^{2k} + \dots + \sum_{r=1}^{\xi_m(t)} \zeta_r^{mk}. \quad (3.2)$$

En particular, si  $m = 2$  y  $\xi(0) = (1, 0)'$ , es decir, si la población consiste de dos tipos de partículas y en el momento inicial se tiene una sola partícula del primer tipo, entonces  $\xi(1) = (\zeta^{11}, \zeta^{12})'$  (la primera generación de partículas se compone de  $\zeta^{11}$  partículas del primer tipo y  $\zeta^{12}$  partículas del segundo tipo, engendradas por una partícula del primer tipo),

$$\xi(2) = \left( \sum_{r=1}^{\zeta^{11}} \zeta_r^{11} + \sum_{r=1}^{\zeta^{12}} \zeta_r^{21}, \sum_{r=1}^{\zeta^{11}} \zeta_r^{12} + \sum_{r=1}^{\zeta^{12}} \zeta_r^{22} \right)'$$

(la segunda generación se compone de  $\sum_{r=1}^{\xi_1^1} \xi_r^{11} + \sum_{r=1}^{\xi_1^2} \xi_r^{21}$  partículas del primer tipo y  $\sum_{r=1}^{\xi_2^1} \xi_r^{12} + \sum_{r=1}^{\xi_2^2} \xi_r^{22}$  partículas del segundo tipo, etc.).

17.3.2. Ecuaciones para las funciones generadoras. Sea  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ . La función generadora de las probabilidades de paso  $p_{ij}(t)$  de un proceso ramificado  $\xi(t)$  con  $m$  tipos de partículas se define por la igualdad

$$\Phi_t(i, s) = \sum_{j \geq 0} P_{ij}(t) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m} = \\ = M [s_1^{\xi_1(t)} s_2^{\xi_2(t)} \dots s_m^{\xi_m(t)} / \xi(0) = i],$$

donde  $\sum_{j \geq 0}$  significa  $\sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_m=0}^{\infty}$ .

Para  $t$  fijado la función  $\Phi_t(i, s)$  es una función escalar de argumentos vectoriales  $i = (i_1, i_2, \dots, i_m)'$  y  $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$ .  $\Phi_t(i, s)$  y  $\Phi_t(e_h, s)$ ,  $h=1, m$  están ligadas por medio de la correlación

$$\Phi_t(i, s) = \prod_{h=1}^m [\Phi_t(e_h, s)]^{i_h}. \quad (3.4)$$

Supongamos que  $\Phi_0(s) = \sum_{i \geq 0} P(\xi(0) = i) s_1^{i_1} s_2^{i_2} \dots s_m^{i_m}$  es una función generadora de la distribución inicial  $p_0(i) = P(\xi(0) = i)$ ;  $\Phi_t(s) = \sum_{j \geq 0} P(\xi(t) = j) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m}$ , una función generadora de los valores del proceso  $\xi(t)$  en el momento  $t$  y sea

$$\Phi_t(s) = (\Phi_t(e_1, s), \Phi_t(e_2, s), \dots, \Phi_t(e_m, s))'. \quad (3.5)$$

$\Phi_t(s)$  se llama función generadora vectorial del proceso  $\xi(t)$ . Se verifica la igualdad

$$\Phi_t(s) = \Phi_0(\Phi_t(s)). \quad (3.6)$$

**Teorema 1.** Las funciones generadoras  $\Phi_t(s)$  y  $\Phi_t(s)$  satisfacen las siguientes ecuaciones funcionales principales:

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)); \quad (3.7)$$

$$\Phi_{t+\tau}(s) = \Phi_t(\Phi_\tau(s)). \quad (3.8)$$

Sea  $F(e_i, s)$  (es posible que sea  $F(e_i, 1) < 1$ ) una función generadora del número general de los diferentes tipos de partículas en todas las generaciones, si el proceso  $\xi(t)$  comenzó de una partícula del  $i$ -ésimo tipo,  $F(s) = (F(e_1, s), \dots, F(e_m, s))'$ . En este caso  $F(e_i, s) = s_i \Phi(e_i, F(s))$ .

17.3.3. Momentos y clasificación. Designemos mediante  $M(t) = (m_{ij}(t), i, j = \overline{1, m})$  la matriz de los primeros momentos  $m_{ij}(t) =$



$= M [\xi_i(t)/\xi_j(0) = e_{ij}]$  de un proceso ramificado y mediante  $B_h(t) = (b_{ij}^{(h)}(t), i, j = \overline{1, m})$ , la matriz de los segundos momentos  $b_{ij}^{(h)}(t) = M [\xi_i(t) \xi_j(t) / \xi_j(0) = e_{ij}]$ , y sean  $Me_h$  y  $D_h = B_h - Me_h e_h' M'$ , donde  $M = M(1)$ ,  $B_h = B_h(1)$ , respectivamente, un vector del número medio de partículas y una matriz de covariación del número de partículas del  $k$ -ésimo tipo,  $t = 1$ .

De la definición de  $\Phi_t(s)$  proviene

$$\left. \begin{aligned} m_{ij}(t) &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial \Phi_t(e_j, s)}{\partial s_i}; \\ b_{ij}^{(h)}(t) &= \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^2 \Phi_t(e_k, s)}{\partial s_i \partial s_j} + \delta_{ij} m_{jh}(t), \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

donde  $s \uparrow$  significa que todas las componentes del vector  $s$  tienden, creciendo, a la unidad.

Las matrices de los momentos  $M(t)$  y  $B_h(t)$  satisfacen las ecuaciones en diferencias

$$\left. \begin{aligned} M(t+1) &= MM(t), \quad M(0) = I; \\ B_h(t+1) &= MB_h(t) M' + \sum_{i=1}^m (e_i, Me_h') D_i, \\ B_h(0) &= e_h e_h', \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

donde (...) significa un producto escalar, de donde

$$\left. \begin{aligned} M(t) &= M^t; \\ B_h(t) &= M^t e_h e_h' M'^t + \sum_{i=0}^{t-1} \sum_{l=1}^m (e_l, M^l e_h) \times \\ &\quad \times M^{t-1-l} D_l M'^{t-1-l}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Supongamos que todos los momentos  $m_{ij}$  de la matriz  $M$  son finitos y no todos ellos son nulos. Por ser  $m_{ij} \geq 0$ , en virtud del conocido teorema de Perron-Frobenius para las matrices no negativas, entre los números propios  $\mu_i$ ,  $i = \overline{1, m}$  de la matriz  $M$  existe un número propio no negativo  $\mu = \mu_{i_0}$  tal que  $\mu > \text{Re } \mu_j$ ,  $j \neq i_0$ , llamado raíz de Perron de la matriz  $M$ .

**Definición 2.** Un proceso ramificado  $\xi(t)$  se llama **indescomponible**, si la multiplicidad de la raíz de Perron  $\mu$  de la matriz  $M$  es igual a la unidad y se llama **descomponible** en el caso contrario.

**Definición 3.** Un proceso ramificado  $\xi(t)$  se denomina **positivo regular**, si existe un momento de tiempo  $t_0$  tal que  $m_{ij}(t_0) > 0$  para cualesquiera  $i, j = \overline{1, m}$ .

Un proceso positivo regular es indescomponible.

Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso ramificado indescomponible y  $\mu$ , una raíz de Perron de la matriz  $M$ , mientras que  $u$  y  $v$  son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz  $M$ , correspondientes a la raíz de Perron  $\mu$  (los cuales, según el mismo teorema de Perron-Frobenius, tienen componentes no negativas)

y normados por la condición

$$(v, u) = \sum_{i=1}^m v_i u_i = 1.$$

**Definición 4.** Un proceso ramificado indescomponible  $\xi(t)$  se llama a) subcrítico, si la raíz de Perron  $\mu < 1$ ; b) crítico, si la raíz de Perron  $\mu = 1$  y  $b = \sum_{i, j, k=1}^m u_k b_{ij}^{(k)} v_i v_j > 0$ ; c) supercrítico, si la raíz de Perron  $\mu > 1$ .

La condición  $b = \sum_{i, j, k=1}^m u_k b_{ij}^{(k)} v_i v_j > 0$  asegura el carácter no singular del proceso  $\xi(t)$ , es decir, que no todas las componentes  $\Phi(e_k, s)$  de la función generadora vectorial  $\Phi(s)$  son lineales respecto de  $s_1, s_2, \dots, s_m$  y tienen términos independientes nulos y, consecuentemente, el número de partículas varía con el tiempo.

Suele decirse que un proceso ramificado es periódico de periodo  $d$ , si el máximo común divisor de todos aquellos  $t$ , para los cuales  $m_{it}(t) > 0$ , es igual a  $d$ . Si  $d = 1$ , el proceso se denomina aperiódico.

El proceso regular positivo es aperiódico.

**17.3.4. Propiedades asintóticas.** Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso aperiódico indescomponible,  $\mu$  es la raíz de Perron de la matriz de los primeros momentos  $M$  y  $u, v$ , los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz  $M$ , correspondientes a la raíz de Perron  $\mu$ . Para la matriz de los primeros momentos  $M(t)$  tiene lugar una representación asintótica, cuando  $t \rightarrow \infty$ :

$$M(t) = \mu^t u v' + o(\hat{\mu}^t),$$

donde  $u v' = (u_i v_j, i, j = \overline{1, m})$ ,  $|\hat{\mu}| < \mu$ ,  $o(\hat{\mu}^t)$  tiene sentido por elementos.

Supongamos que  $q_t = P\{\xi(t) = 0 \text{ para cierto } t > 0 / \xi(0) = e_i\}$  es la probabilidad de degeneración del proceso  $\xi(t)$  cuya generación nula consta de una sola partícula de  $i$ -ésimo tipo y sea  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)'$  un vector de las probabilidades de degeneración.

**Teorema 2.** Si un proceso positivo regular  $\xi(t)$  es subcrítico o crítico, entonces

$$q = 1 = (1, 1, 1, \dots, 1)'$$

Sea  $s = (s_1, \dots, s_m)$  y  $|s| = \max_{1 \leq h \leq m} |s_h|$ . Se dice que el vector  $s$  es no negativo, si todos los  $s_h \geq 0$ .

**Teorema 3.** Sea  $\xi(t)$  un proceso positivo regular. El vector de las probabilidades de degeneración  $q$  es la solución no negativa y mínima según la norma  $|\cdot|$  de la ecuación

$$\Phi(s) = s. \quad (3.12)$$

Sea  $q^1$  un vector no negativo arbitrario tal que  $|q^1| \leq 1$  y  $q^1 \neq 1$ . Las probabilidades de degeneración pueden ser determinadas como

uno de los siguientes límites:

$$q_i = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_i^t(\xi(t) = 0 / \xi(0) = e_i); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(e_i, q'). \end{cases}$$

De aquí se deduce que en la clase de vectores no negativos  $s$ ,  $|s| \leq 1$ , la ecuación (3.12) tiene sólo dos soluciones:  $q$  y  $1$ .

El comportamiento asintótico de las probabilidades  $p_{e_i 0}(t)$ , para  $t \rightarrow \infty$ , se describe del modo siguiente.

Sean:  $\xi(t)$  un proceso positivo regular,  $M$  la matriz de las esperanzas matemáticas  $m_{ij} = M\{\xi_j(t) / \xi(0) = e_j\}$ ,  $\mu$  la raíz de Perron de la matriz  $M$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m)'$  y  $v = (v_1, \dots, v_m)$ , respectivamente, los vectores propios derecho e izquierdo de la matriz  $M$ , correspondientes a la raíz de Perron  $\mu$ .

**Teorema 4.** a) Si  $\xi(t)$  es un proceso subcrítico, entonces

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i 0}(t) &= 1 - c v_i \mu^t (1 + o(1)); \\ P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} &= (v, i) [c \mu^t (1 + o(1))], \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

donde  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - \Phi_t(e_i, 0)}{v_i \mu^t}$ , con la particularidad de que para que

$0 < c < \infty$ , es necesario y suficiente que sea

$$M\{\xi_j(t) \ln \xi_j(t) / \xi(0) = e_i\} < \infty,$$

para cualesquiera  $i, j = \overline{1, m}$ .

b) Si  $\xi(t)$  es un proceso crítico, entonces

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i 0}(t) &= 1 - \frac{2v_i}{ib} (1 + o(1)); \\ P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} &= \frac{2(v, i)}{ib} (1 + o(1)), \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

donde  $b = \sum_{i, j, h=1}^m u_h b_{ij}^{(h)} v_i v_j$ .

17.3.5. Teoremas del límite. Sea  $\xi(t)$  un proceso positivo regular.

**Teorema 5.** Si  $\xi(t)$  es un proceso subcrítico, entonces para  $t \rightarrow \infty$  las distribuciones condicionales

$$P\{\xi(t) = j / \xi(t) \neq 0, \xi(0) = i\}, \quad i \neq 0$$

convergen hacia la distribución límite  $Q_j$ ,  $j \neq 0$ ,  $\sum_{j \neq 0} Q_j = 1$ , cuya función

generadora  $Q(s) = \sum_{j \neq 0} Q_j s_1^{j_1} \dots s_m^{j_m}$  satisface la ecuación

$$1 - Q(\Phi(s)) = \mu(1 - Q(s)),$$

y la distribución límite no depende del vector de los estados iniciales  $i \neq 0$ .

Una distribución con la función generadora  $Q(s)$  tiene esperanzas matemáticas finitas

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\partial Q(s)}{\partial s_i} = \frac{u_i}{c}, \quad \text{si } c > 0,$$

donde  $c$  está definido en la correlación (3.13).

**Teorema 6.** Si  $\xi(t)$  es proceso positivo regular crítico,  $\xi(0) = e_1$  y  $\xi^{(e_i)}(t) = (\xi_1^{(e_i)}(t), \dots, \xi_m^{(e_i)}(t))$ , donde

$$\xi_h^{(e_i)}(t) = \frac{2\xi_{ih}(t)}{u_h b t},$$

entonces la distribución condicional del proceso  $\xi^{(e_i)}(t)$  a condición de que  $\xi^{(e_i)}(t) \neq 0$ , converge para  $t \rightarrow \infty$  hacia la distribución del vector aleatorio  $\xi_1 = \xi(1, 1, \dots, 1)$ , que no depende de  $e_i$ , donde  $\xi$  es una magnitud aleatoria escalar con la distribución exponencial

$$P\{\xi > x\} = e^{-x}.$$

**Teorema 7.** Si  $\xi(t)$  es un proceso positivo regular supercrítico, cuyos segundos momentos  $b_{ij}^{(k)}$ ,  $i, j, k = 1, m$ , y si  $\mu$  es una raíz de Perron de la matriz  $M$ , entonces el vector aleatorio  $\eta(t) = \mu^{-t} \xi(t)$  converge en media cuadrática, cuando  $t \rightarrow \infty$ , hacia cierto vector aleatorio límite  $\eta$ , y, con la probabilidad 1, la dirección del vector  $\eta$ , para  $\eta \neq 0$ , coincide con la dirección del vector propio derecho  $u$  de la matriz  $M$ , correspondiente a la raíz de Perron  $\mu$ , es decir,  $\eta = \zeta u$ , donde  $\zeta$  es una magnitud aleatoria escalar.

Si  $b = \sum_{i,j,h} u_h b_{ij}^{(h)} v_i v_j > 0$ , entonces  $q_h = P\{\eta = 0 / \xi(0) = e_h\}$ .

La función característica (condicional)  $\varphi(e_h, s) = M[e^{(e, \eta)} / \xi(0) = e_h]$  del vector aleatorio  $\eta$  satisface las ecuaciones funcionales

$$\varphi(e_h, \mu s) = \Phi(e_h, \varphi(s)),$$

donde  $\varphi(s) = (\varphi(e_1, s), \varphi(e_2, s), \dots, \varphi(e_m, s))$ .

#### 17.4. Procesos ramificados con número finito de tipos de partículas [tempo continuo]

**17.4.1. Definición.** Una cadena homogénea de Márkov  $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t))'$ ,  $t \in [0, \infty)$ , con valores en el conjunto de vectores  $m$ -dimensionales de componentes no negativas de números enteros se denomina proceso ramificado con  $m$  tipos de partículas, si sus probabilidades de paso  $p_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\}$  satisfacen las condiciones (3.1) y la condición

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}.$$

El proceso ramificado  $\xi(t)$  cuyo estado inicial es  $e_i$ , es decir, la generación nula de partículas se compone de una sola partícula de  $i$ -ésimo tipo, evoluciona de la manera siguiente: transcurrido el tiempo

aleatorio  $\tau_i$ , la partícula de  $i$ -ésimo tipo se transforma en un número aleatorio  $\zeta^{ij}$  de partículas de  $j$ -ésimo tipo,  $j = \overline{1, m}$ , cada una de las cuales independientemente de las otras vive el tiempo aleatorio  $\tau_j$  y se convierte en el número aleatorio  $\zeta^{jk}$  de partículas de  $k$ -ésimo tipo,  $k = \overline{1, m}$ , etc.

17.4.2. Ecuaciones para las funciones generadoras. Supongamos que  $\xi(0) = e_i$  y que las probabilidades de paso del proceso ramificado  $\xi(t)$  satisfacen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} p_{e_i e_i}(t) &= 1 + q_{e_i e_i}(t) + o(t); \\ p_{e_i e_j}(t) &= q_{e_i e_j}(t) + o(t), \quad e_i \neq j, \quad t \rightarrow 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\sum_{j \geq 0} q_{e_i e_j} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.2)$$

Es obvio que  $q_{e_i e_j} \geq 0$ ,  $e_i \neq j$  (en este caso  $q_{e_i e_j}$  se llama densidad de la probabilidad de paso desde  $e_i$  en  $j$ ). Sea

$$f(e_i, s) = \sum_{j \geq 0} q_{e_i e_j} s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m};$$

$$f(s) = (f(e_1, s), \dots, f(e_m, s))';$$

$$\Phi_t(e_i, s) = \sum_{j \geq 0} p_{e_i e_j}(t) s_1^{j_1} s_2^{j_2} \dots s_m^{j_m} =$$

$$= M \{s_1^{\xi_1(t)} \dots s_m^{\xi_m(t)} / \xi_0(0) = e_i\};$$

$$\Phi_t(s) = (\Phi_t(e_1, s), \dots, \Phi_t(e_m, s))'.$$

La función  $f(s)$  se llama infinitesimal (vectorial) o función generadora diferencial.

La función generadora  $\Phi_t(s)$  es continua respecto de  $t \in [0, \infty)$  uniformemente según  $s$ ,  $|s| \leq 1$  y  $\lim_{t \rightarrow 0} \Phi_t(s) = s$ . Si se cumplen las condiciones (4.1), (4.2), tiene lugar, uniformemente según  $s$ ,  $|s| \leq 1$ , la representación asintótica

$$\Phi_t(s) = s + tf(s) + o(t), \quad t \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

De corolario de (4.3) sirve el siguiente teorema que ofrece un análogo de la ecuación funcional principal para los procesos con tiempo continuo.

**Teorema 1.** La función generadora  $\Phi_t(s)$  para  $|s| \leq 1$  satisface los siguientes sistemas de ecuaciones funcionales.

a) Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (no lineales)

$$\frac{d\Phi_t(s)}{dt} = f(\Phi_t(s)) \quad (4.4)$$

con las condiciones iniciales

$$\Phi_0(s) = s. \quad (4.5)$$

b) Un sistema de ecuaciones (lineales) en derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial t} = \sum_{i=1}^m f(e_i, s) \frac{\partial \Phi_t(s)}{\partial s_i} \quad (4.6)$$

con las condiciones iniciales (4.5).

c) Un sistema de ecuaciones integrales (no lineales)

$$\Phi_t(e_i, s) = \int_0^t h_i(\Phi_{t-u}(s)) dG_i(u) + s_i(1 - G_i(t)), \quad (4.7)$$

donde

$$h_i(s) = \frac{f(e_i, s) - q_{e_i, e_i} s_i}{-q_{e_i, e_i}}, \quad i = \overline{1, m};$$

$$G_i(t) = \begin{cases} 1 - e^{-q_{e_i, e_i} t}, & t \geq 0. \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Las soluciones de estas ecuaciones existen, son funciones analíticas respecto de  $s$ ,  $|s| < 1$ , pero  $\Phi_t(e_i, s)$ , en el caso general, no han de ser obligatoriamente funciones generadoras de las distribuciones probabilísticas, es decir, en el caso general, sólo podemos afirmar que

$$\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(e_i, s) \leq 1.$$

Si todas las derivadas  $\frac{\partial f(e_i, s)}{\partial s_j}$ ,  $i, j = \overline{1, m}$ , en el punto  $s = 1$  son finitas, entonces la solución de dichos sistemas de ecuaciones es única cuando  $|s| < 1$  y  $\lim_{s \uparrow 1} \Phi_t(e_i, s) = 1$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

$G_i(t)$  en (4.7) se interpreta como una función de distribución del tiempo de vida de la partícula de  $i$ -ésimo tipo, mientras que  $h_i(s)$  se interpreta como una función generadora de las densidades de transformación de la partícula de  $i$ -ésimo tipo.

17.4.3. Momentos y clasificación. Sea  $f(s) = (f(e_1, s), f(e_2, s), \dots, f(e_m, s))$  una función generadora diferencial del proceso ramificado  $\xi(t)$ . Bajo el supuesto de que existen los límites correspondientes, designaremos

$$a_{ij} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial f(e_j, s)}{\partial s_i}, \quad c_{ij}^{(h)} = \lim_{s \uparrow 1} \frac{\partial^2 f(e_h, s)}{\partial s_i \partial s_j},$$

$$A = \{a_{ij}, i, j = \overline{1, m}\}, \quad C_h = \{c_{ij}^{(h)}, i, j = \overline{1, m}\}.$$

Sea, además,  $M(t) = \{m_{ij}(t), i, j = \overline{1, m}\}$ , donde  $m_{ij}(t) = M[\xi_i(t)/\xi_i(0) = e_j]$ ,  $C_h(t) = \{c_{ij}^{(h)}(t), i, j = \overline{1, m}\}$ , donde  $c_{ij}^{(h)}(t) = M[\xi_j(t) \xi_i \times \xi_i(0) = e_h] - \delta_{ij} m_{jh}(t)$ . Las matrices de los momentos  $M(t)$ ,

y  $C_h(t)$  satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} M(t) &= M(t) A, \quad M(0) = I; \\ \frac{d}{dt} C_h(t) &= \sum (e_h, A e_j) C_j(t) + M(t) C_h M'(t), \\ C_h(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

De aquí

$$M(t) = e^{At},$$

$$C_h(t) = \int_0^t M(u) \left[ \sum_{j=1}^m (e_h, M(t-u) e_j) C_j \right] M'(u) du. \quad (4.9)$$

Todos los elementos no diagonales de la matriz  $A$  son no negativos (en particular, positivos). Las matrices que poseen esta propiedad, se llaman casi no negativas (correspondientemente, casi positivas). Las propiedades espectrales de tales matrices son semejantes a las propiedades espectrales de las matrices no negativas (correspondientemente, positivas). Por ejemplo, entre todos los números propios  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , de la matriz  $A$  hay un número propio real  $\alpha = \alpha_{i_0}$  tal que  $\alpha > \operatorname{Re} \alpha_j$ ,  $j \neq i_0$ , llamado raíz de Perron de la matriz  $A$ . Los vectores propios correspondientes a la raíz de Perron  $\alpha$  tienen componentes no negativas.

**Definición 1.** Un proceso ramificado  $\xi(t)$  se llama **indescomponible**, si la multiplicidad de la raíz de Perron  $\alpha$  de la matriz  $A$  es igual a uno, y se llama **descomponible** en el caso contrario.

**Definición 2.** Un proceso ramificado  $\xi(t)$  se llama **regular**, si  $a_{ii} < 0$  para todo  $i = \overline{1, m}$ .

Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso indescomponible;  $u = (u_1, \dots, u_m)'$ , y  $v = (v_1, \dots, v_m)$  son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz  $A$ , correspondientes a la raíz de Perron  $\alpha$  y normados por la condición  $(u, v) = \sum_{i=1}^m u_i v_i = 1$ .

**Definición 3.** Un proceso ramificado indescomponible  $\xi(t)$  se denomina **subcrítico**, si  $\alpha < 0$ ; **crítico**, si  $\alpha = 0$ ;  $b = \sum_{i,j,h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} \times v_i v_j > 0$ ; **supercrítico**, si  $\alpha > 0$ .

La condición  $b = \sum_{i,j,h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} v_i v_j > 0$  asegura que el proceso  $\xi(t)$  no sea singular. Lo último significa que el número de partículas no queda invariable con el tiempo.

**17.4.4. Propiedades asintóticas.** Supongamos que  $\xi(t)$  es un proceso ramificado indescomponible,  $\alpha$  es la raíz de Perron de la matriz  $A$ ,  $u$  y  $v$  son los vectores propios derecho e izquierdo, respectivamente, de la matriz  $A$ , correspondientes a la raíz de Perron  $\alpha$  y normados por la condición  $(u, v) = 1$ . Para la matriz  $M(t)$  de los primeros momentos

tiene lugar una representación asintótica para  $t$  grandes

$$M(t) = e^{\alpha t} uv' + o(e^{\hat{\alpha}t}),$$

donde  $uv' = \{u_i v_j, i, j = \overline{1, m}\}$ ,  $\hat{\alpha} < \alpha$ ,  $o(e^{\hat{\alpha}t})$  se entiende por elementos.

Supongamos que  $q_i$  es la probabilidad de degeneración del proceso  $\xi(t)$  en el cual  $\xi(0) = e_i$  y  $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)'$  es el vector de las probabilidades de degeneración.

**Teorema 2.** Si un proceso ramificado regular  $\xi(t)$  es subcrítico o crítico, entonces

$$q = 1 = (1, 1, \dots, 1)'$$

**Teorema 3.** Sea  $\xi(t)$  un proceso indescomponible. El vector de las probabilidades de degeneración  $q$  es la solución no negativa más próxima a 0, de la ecuación

$$f(s) = 0, \quad s \geq 0, \quad |s| = \max_{1 \leq i \leq m} |s_i| \leq 1.$$

El comportamiento asintótico de  $p_{ij}(t)$ , para  $t \rightarrow \infty$ , se describe del modo siguiente.

**Teorema 4.** a) Si un proceso indescomponible  $\xi(t)$  es subcrítico, entonces

$$e^{-\alpha t} (1 - p_{e_i 0}(t)) = cv_i + o(1),$$

$$e^{-\alpha t} P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} = (v, i) c + o(1),$$

donde  $c \geq 0$  es una constante distinta de cero cuando y sólo cuando,  $M\{\xi_j(t) \ln \xi_j(t) / \xi_j(0) = e_i\} < \infty$  para cualesquiera  $i, j = \overline{1, m}$ .

b) Si un proceso indescomponible  $\xi(t)$  es crítico y  $c_{ij}^{(h)}$  son finitas, entonces

$$p_{e_i 0}(t) = 1 - \frac{2v_i}{bt} (1 + o(1));$$

$$P\{\xi(t) \neq 0 / \xi(0) = i\} = \frac{2(v, i)}{bt} (1 + o(1)),$$

donde  $b = \sum_{i, j, h=1}^m u_h c_{ij}^{(h)} v_i v_j$ .

## 17.5. Procesos ramificados generales de Márkov

**17.5.1. Definiciones.** 1. El modelo general de un proceso ramificado de Márkov toma en consideración, a la par con el número de partículas de la población simulada, tales características como la posición de las partículas en el espacio, la dimensión de éstas, la masa, la energía, la edad, etc.

Es importante subrayar que muchos procesos ramificados no de Márkov, que describen el número de partículas en una población, pueden ser estudiados dentro de los marcos de procesos ramificados gene-



rales de Márkov, si se atrae una información adicional sobre las partículas del género indicado arriba.

Supongamos que una población se caracteriza por el número de partículas y cierto parámetro aleatorio generalizado  $\eta$ , que se interpreta como la posición de la partícula en cierto espacio medible  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ , llamado espacio físico de las partículas.

Supongamos además, que la generación nula de una población se compone de una sola partícula y la posición de ésta en  $\mathfrak{X}$  (por ejemplo, la masa o la energía) es igual a  $\eta_0$ . Al expirar el tiempo aleatorio  $\tau$ , la partícula se transforma (por ejemplo, se fracciona o bien engendra otras nuevas partículas comunicándoles su energía) en un número aleatorio  $\zeta$  de partículas de la primera generación, cuyas posiciones en  $\mathfrak{X}$  son iguales a  $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_\zeta$ , respectivamente, donde  $\eta'_k \in \mathfrak{X}$ ,  $k = \overline{1, \zeta}$ , son las magnitudes aleatorias igualmente distribuidas que no dependen una de la otra ni tampoco de  $\zeta$ . Cada partícula de la primera generación se porta, independientemente de las otras, como una partícula de la generación nula, etc. El espacio físico de un proceso ramificado que simula el esquema descrito debe, evidentemente, tomar en consideración tanto el número de partículas en la población en un momento arbitrario, como la posición de las partículas en el espacio físico  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ .

Supongamos que en cierto momento de tiempo una población contiene  $n$  partículas y sus posiciones en  $\mathfrak{X}$  son iguales a  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , respectivamente. El estado del proceso ramificado puede ser descrito mediante un juego  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en el que el orden de disposición no tiene importancia, lo que corresponde a la indistinguibilidad de las partículas en la población.

Si  $\mathfrak{X}^n$  es un producto de Descartes (recto) de  $n$  ejemplares del espacio  $\mathfrak{X}$ , designaremos mediante  $\tilde{\mathfrak{X}}_n$  un espacio obtenido de  $\mathfrak{X}^n$  por identificación de todos los puntos  $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , los cuales se pueden obtener por conmutación de las coordenadas y mediante  $\tilde{\mathfrak{U}}_n$ , la imagen de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{U}^n$  en tal aplicación.

Sea  $\tilde{\mathfrak{X}}_0$  la designación del espacio que consiste de un solo punto denotado por el mismo símbolo  $\tilde{x}_0$ . Hagamos  $\tilde{\mathfrak{X}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \tilde{\mathfrak{X}}_n$  y sea  $\tilde{\mathfrak{U}}$  la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene  $\tilde{\mathfrak{X}}_0$  y todas las  $\sigma$ -álgebras  $\tilde{\mathfrak{U}}_n$ .

2. Se denomina proceso ramificado general de Márkov con el espacio físico de partículas  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$  un proceso de Márkov homogéneo  $\xi(t)$ ,  $t \in T$  ( $T = [0, \infty)$ , ó  $T = 0, 1, 2, \dots$ ) en el espacio físico  $(\tilde{\mathfrak{X}}, \tilde{\mathfrak{U}})$  cuyas probabilidades de paso

$$P_t(x^n, \tilde{A}) = P\{\xi(t) \in \tilde{A} / \xi(0) = x^n\} \quad (x^n \in \tilde{\mathfrak{X}}_n, \tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{U}})$$

satisfacen la siguiente ecuación de Kolmogórov:

$$P_{t+s}(x, \tilde{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tilde{\mathfrak{X}}_n} P_t^{(n)}(x^n, dy^n) P_s(y^n, \tilde{A}), \quad (5.1)$$

donde  $P_t^{(n)}(x^n, \cdot)$  es la contracción de la medida de  $P_t(x^n, \cdot)$  sobre la  $\sigma$ -álgebra  $\tilde{\mathfrak{A}}_n$  y

$$P_0(x^n, \tilde{A}) = \chi_{\tilde{A}}(x^n) = \begin{cases} 1, & x^n \in \tilde{A}; \\ 0, & x^n \in \tilde{A}^c. \end{cases} \quad (5.2)$$

$P_t^{(n)}(x^n, \tilde{\mathfrak{A}}_n)$  es la probabilidad de que en el momento  $t$  la población tendrá exactamente  $n$  partículas, a condición de que en el momento inicial había  $k$  partículas y sus posiciones en  $\mathfrak{X}$  eran  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

17.5.2. Ejemplos. 1. Supongamos que  $\mathfrak{X}$  es un conjunto finito y  $x \in \mathfrak{X}$  se interpreta como un tipo de partículas. Un proceso ramificado correspondiente es un proceso ramificado, ordinario con un número finito de tipos de partículas.

2. Supongamos que  $\mathfrak{X} = [0, \infty)$  y que  $x \in \mathfrak{X}$  significa la edad de una partícula que varía de un modo tal que  $\Delta x = \Delta t$ . El tiempo de vida de la partícula se define por cierta función de distribución  $G(x)$ . Cada partícula, independientemente de las otras, engendra un número aleatorio de partículas de la edad nula. Los procesos ramificados que corresponden a este modelo y que dependen de la edad describen algunas fases de la evolución de las colonias de bacterias o de otros organismos.

3. Modelo unidimensional de un reactor nuclear. Supongamos que en el segmento  $[a, b]$  (sección activa del reactor) pueden moverse en ambas direcciones los neutrones que, al alcanzar los extremos del segmento, desaparecen (se van de la sección activa).

Hagamos  $\mathfrak{X} = [a, b]$  y sea  $x \in \mathfrak{X}$  la posición de un neutrón en el momento de su nacimiento. El neutrón nacido en el punto  $x$  con la probabilidad  $1/2$  se mueve a la derecha o a la izquierda. En cualquier intervalo de longitud  $dx$  de  $\mathfrak{X}$  el neutrón se transforma con la probabilidad  $\alpha dx$  en cierto número de nuevos neutrones, cada uno de los cuales, independientemente de los otros, con la probabilidad  $1/2$  se mueve a la derecha o a la izquierda.

Este modelo se describe por los procesos ramificados generales y, a la par con sus análogos bi- y tridimensionales, sirve de modelo de partida en la teoría matemática de los reactores nucleares.

17.5.3. Ecuaciones para las funcionales generadoras. Con el proceso ramificado  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , están ligadas las siguientes medidas aleatorias  $\xi_x n(t, \cdot)$  y  $\eta_x(\cdot)$  en  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{A})$  con valores no negativos de números enteros:  $\xi_x n(t, A)$  que representa el número de partículas del proceso  $\xi(t)$  que en el momento  $t$  se encontraban en el conjunto  $A \in \mathfrak{A}$  a condición de que en el momento inicial habían  $n$  partículas y sus posiciones en  $\mathfrak{X}$  se determinaban por el punto  $x^n \in \tilde{\mathfrak{X}}_n$ ;  $\eta_x(A)$  es el número de partículas-descendientes en el conjunto  $A \in \mathfrak{A}$  en el momento de transformación, siempre que la partícula-predecesor se encontraba en el momento de transformación en el punto  $x \in \mathfrak{X}$ .

Sea  $s(x)$ ,  $x \in \mathfrak{X}$ , una función  $\mathfrak{A}$ -medible tal que

$$\sup_{x \in \mathfrak{X}} |s(x)| \leq t; \quad \Phi_t(x^n s(\cdot)) = M \exp \left\{ \int_{\mathfrak{X}} \ln s(y) \xi_x n(t, dy) \right\} \quad (5.3)$$

es la funcional generadora de la medida aleatoria  $\xi_{x^n}(t, \cdot)$ :

$$h(x, s(\cdot)) = M \exp \left\{ \int_{\mathbb{X}} \ln s(y) \eta_x(dy) \right\} \quad (5.4)$$

es la funcional generadora de la medida aleatoria  $\eta_x(\cdot)$ .

Si  $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , entonces

$$\Phi_t(x^n, s(\cdot)) = \prod_{h=1}^n \Phi_t(x_h, s(\cdot)). \quad (5.5)$$

Supongamos que  $q_t(x, A)$  es la probabilidad de que una partícula que empezó a fluctuar desde el punto  $x \in \mathbb{X}$ , no experimenta transformaciones durante el tiempo  $[0, t]$  y en el momento  $t$  se encontrará en el conjunto  $A \in \mathfrak{A}$ ;  $K_x(t, A)$  es la probabilidad condicional de que el tiempo de vida de una partícula, que en el momento inicial se encontraba en el punto  $x$ , no supera  $t$ , en tanto que el punto, en que se encuentra la partícula dada en el momento de transformación, está contenido en  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Teorema 1.** La funcional generadora  $\Phi_t(x, s(\cdot))$  ( $x = x^1$ ) satisface las siguientes ecuaciones funcionales:

$$\Phi_{t+\tau}(x, s(\cdot)) = \Phi_t(x, \Phi_\tau(\cdot, s(\cdot)));$$

$$\Phi_{t+\tau}(x, s(\cdot)) = \Phi_t(x, h(\cdot, s(\cdot)));$$

$$\Phi_t(x, s(\cdot)) = \int_{\mathbb{X}} s(y) \eta_x(t, dy) + \int_0^t K_x(du, dy) h(y, \Phi_{t-u}(\cdot, s(\cdot))).$$

Sea  $M(t, x^n, A) = M \xi_{x^n}(t, A)$  un número medio de partículas que en el momento  $t$  se encontraban en el conjunto  $A \in \mathfrak{A}$ , a condición de que  $\xi(0) = x^n$ .  $M(t, x^n, A)$  satisface la ecuación

$$M(t+\tau, x^n, A) = \int_{\mathbb{X}} M(t, y, A) M(\tau, x^n, dy). \quad (5.6)$$

**EJEMPLO** Sea  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , un proceso ramificado cuyas partículas no alteran su posición entre las transformaciones (el proceso ramificado se realiza a saltos), con la particularidad de que

$$q_t(x, \mathbb{X}) = e^{-qt}, \quad q > 0.$$

El parámetro  $q$  se denomina intensidad de saltos de las partículas.

La funcional generadora  $\Phi_t(x, s(\cdot))$  de tal proceso satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_t(x, s(\cdot)) + q(\Phi_t(x, s(\cdot)) - \Phi_t(x, \Phi_t(\cdot, s(\cdot))),$$

y la esperanza matemática  $M(t, x, A)$  tiene por expresión

$$M(t, x, A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt} L^{(n)}(x, A),$$

donde

$$L^{(0)}(x, A) = \begin{cases} 1, & x \notin A; \\ 0, & x \in A, \end{cases}$$

$$L^{(1)}(x, A) = M\eta_x(A);$$

$$L^{(n)}(x, A) = \int_{\mathfrak{X}} L^{(1)}(x, dy) L^{(n-1)}(y, A).$$

**17.5.4. Probabilidad de degeneración.** Para un proceso ramificado general  $\xi(t)$ ,  $\xi(0) = x$ , la probabilidad de degeneración  $q(x)$  se determina como cualquiera de los límites:

$$q(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} P_t^{(0)}(x, \mathfrak{X}); \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x, 0). \end{cases}$$

$q(x)$  satisface la ecuación funcional

$$q(x) = h(x, q(\cdot)). \quad (5.7)$$

Si la función  $s_0(\cdot)$  es tal que  $0 \leq s_0(x) \leq 1$ ,  $x \in \mathfrak{X}$ , satisface la condición  $h(x, s_0(\cdot)) \leq s_0(x)$  para todo  $x \in \mathfrak{X}$ , entonces  $q(x) \leq s_0(x)$ .

Sea  $t = 0, 1, 2, \dots$   $M(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X})$ ,  $B(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X}) - M(x) = M_{\xi_x}^t(1, \mathfrak{X}) [\xi_x(1, \mathfrak{X}) - 1]$ .

**Teorema 2. 1)** Si  $\sup_{x \in \mathfrak{X}} M(x) < 1$ , entonces  $q(x) = 1$ .

2) Si  $\inf_{x \in \mathfrak{X}} M(x) > 1$  y  $\sup_{x \in \mathfrak{X}} B(x) < \infty$ , entonces  $\sup_{x \in \mathfrak{X}} q(x) < 1$ .

**TEOREMAS DEL LÍMITE  
PARA LOS PROCESOS ALEATORIOS**

**18.1. Convergencia débil de las medidas  
en los espacios métricos**

**18.1.1. Convergencia en los conjuntos de continuidad de una medida límite.** Sea  $(\mathcal{X}, \mathfrak{B}, \rho)$  un espacio métrico con  $\sigma$ -álgebra boroliana  $\mathfrak{B}$  y métrica  $\rho(x, y)$ ;  $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ , un espacio de todas las funciones reales continuas acotadas definidas en  $\mathcal{X}$  con la norma  $\|f\| = \sup_{x \in \mathcal{X}} |f(x)|$ .

**Definición.** Una sucesión de medidas  $\mu_n$  definidas en  $\mathfrak{B}$ , se llama débilmente convergente hacia la medida  $\mu$  (se denota:  $\mu_n \Rightarrow \mu$ ), si se cumple la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad (1.1)$$

para todo  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ .

Como que los valores de las integrales  $\int f(x) \mu(dx)$  definen unívocamente la medida  $\mu$  para todo  $f \in \mathcal{T}(\mathcal{X})$ , entonces de la convergencia débil  $\mu_n \Rightarrow \mu$  y  $\mu_n \Rightarrow \nu$  se deduce que  $\mu = \nu$ .

De la definición de convergencia débil de las medidas se desprende que de la convergencia en probabilidad de los elementos aleatorios  $\xi_n$  con valores en  $\mathcal{X}$  hacia un elemento aleatorio  $\xi$  fluye la convergencia débil de las distribuciones  $P_n$  de elementos aleatorios  $\xi_n$  hacia la distribución  $P$  del elemento aleatorio límite  $\xi$ . La afirmación recíproca no es cierta, a excepción del caso en que la distribución límite  $P$  está concentrada en un punto.

Introduzcamos las designaciones:  $\text{Int } A$  es un conjunto de puntos interiores de  $A$ ;  $[A]$  es la clausura del conjunto  $A$ ;  $A'$  es un conjunto de puntos de frontera de  $A$ .

**Lema.** Si  $\mu_n \Rightarrow \mu$ , para todo  $A \in \mathfrak{B}$  se verifican las desigualdades

$$\mu(\text{Int } A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) \leq \mu([A]). \quad (1.2)$$

El conjunto  $A$  se llama conjunto de continuidad de la medida  $\mu$ , si  $\mu(A') = 0$ .

Designemos mediante  $\mathfrak{C}_\mu$  la totalidad de todos los conjuntos de continuidad de la medida  $\mu$ .

\* Las medidas  $\mu_n$ , en el caso general, no están normadas hasta la probabilidad.

**Teorema 1.** Para que una sucesión de medidas  $\mu_n$  converja débilmente hacia la medida  $\mu$ , es necesario y suficiente que para todo conjunto  $A$  de continuidad de la medida  $\mu$  se cumpla la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}_\mu. \quad (1.3)$$

**18.1.2. Condición de la compacidad débil de una familia de medidas.**

**Definición.** Un conjunto  $M$  de medidas definidas en  $\mathfrak{B}$  se llama débilmente compacto, si de toda sucesión de medidas  $\mu_n$ , pertenecientes a  $M$ , se puede distinguir una sucesión débilmente convergente.

**Teorema 2.** Sea  $\mathcal{X}$  un espacio métrico separable completo. Para que un conjunto  $M$  de medidas definidas en  $\mathfrak{B}$  sea débilmente compacto, es necesario y suficiente que se cumplan las dos siguientes condiciones:

a)  $\sup_{\mu \in M} \mu(\mathcal{X}) < \infty$ ;

b) para  $\varepsilon > 0$  existe un compacto  $K_\varepsilon$  tal que

$$\sup_{\mu \in M} \mu(\mathcal{X} \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon \quad (1.5)$$

**Observación.** La completitud del espacio  $\mathcal{X}$  se emplea sólo en la demostración de la necesidad de las condiciones a) y b) del teorema 2.

Al demostrar la convergencia débil de la sucesión de medidas  $\mu_n$  establece la compacidad débil de la sucesión de medidas y unicidad de la medida límite.

**Corolario.** Si una sucesión de medidas  $\mu_n$  definidas en  $\mathfrak{B}$ , que es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio métrico separable completo  $\mathcal{X}$ , es tal que para todo  $f \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$  existe el límite

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx), \quad (1.6)$$

entonces existe una medida  $\mu$  tal que

$$L(f) = \int f(x) \mu(dx),$$

es decir, la sucesión de medidas  $\mu_n$  converge débilmente hacia  $\mu$ .

**18.1.3. Condiciones de convergencia débil de una sucesión de medidas.** Una sucesión de funciones  $f_n \in \mathfrak{T}(\mathcal{X})$  converge débilmente hacia  $f$ , si las funciones  $f_n$  están acotadas en totalidad y para todo  $x \in \mathcal{X}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ .

Un conjunto de funciones  $F \subset \mathfrak{T}(\mathcal{X})$  se llama débilmente cerrado, si el límite de toda sucesión de funciones de  $F$  débilmente convergente pertenece a  $F$ .

**Teorema 3.** Una sucesión de medidas  $\mu_n$  converge débilmente hacia la medida  $\mu$  cuando, y sólo cuando, es débilmente compacta y para cierto conjunto de funciones  $F_0 \subset \mathfrak{T}(\mathcal{X})$ , cuya clausura débil coincide con todo  $\mathfrak{T}(\mathcal{X})$ , se verifica la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad \text{para todo } f \in F_0. \quad (1.7)$$

En la demostración de los teoremas del límite para los procesos aleatorios es cómodo emplear las condiciones de convergencia de distribuciones parciales.

**Teorema 4.** Sea  $\mathfrak{A}_0$  una clase de conjuntos abiertos en  $\mathcal{X}$  que, junto con dos conjuntos contiene, además, la suma de éstos y su intersección y que satisface las condiciones: 1) la  $\sigma$ -clausura de  $\mathfrak{A}_0$  contiene todos los conjuntos abiertos; 2) todos los conjuntos de  $\mathfrak{A}_0$  son conjuntos de continuidad de la medida dada  $\mu$ .

Si para una sucesión de medidas débilmente compacta  $\mu_n$  se cumple la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A) \quad \text{para todo } A \in \mathfrak{A}_0, \quad (1.8)$$

entonces  $\mu_n$  converge débilmente hacia  $\mu$ .

**Observación.** En distintos espacios funcionales a título de clase  $\mathfrak{A}_0$  se considera corrientemente la clase de todos los conjuntos cilíndricos abiertos de continuidad de la medida límite, y, por lo tanto, se emplean las condiciones de convergencia de las distribuciones de dimensiones finitas.

Para la convergencia débil de las medidas tiene lugar también la convergencia de las integrales para ciertas funciones discontinuas. En este caso se hace uso de una circunstancia consistente en que el conjunto de puntos de discontinuidad de una función  $\mathfrak{B}$ -medible es conjunto  $\mathfrak{B}$ -medible.

**Lema.** Si una sucesión de medidas  $\mu_n$  converge débilmente hacia  $\mu$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu_n(dx) = \int f(x) \mu(dx) \quad (1.9)$$

para toda función  $f$   $\mathfrak{B}$ -medible  $\mu$ -casi siempre continua y acotada.

**18.1.4. Convergencia de las medidas en espacios normados lineales.** En los espacios normados lineales las condiciones para la convergencia débil de las medidas puede formularse en forma de las condiciones de convergencia para las funcionales características.

Supongamos que  $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$  es un espacio separable de Banach y  $L$  es un conjunto lineal de funcionales lineales en  $\mathcal{X}$  tal que la  $\sigma$ -álgebra mínima respecto de la cual resultan medibles todas las funcionales  $l \in L$  coincide con  $\mathfrak{B}$ .

**Teorema 5.** Una sucesión de medidas  $\mu_n$  en  $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$  converge débilmente hacia la medida  $\mu$ , cuando, y sólo cuando, es débilmente compacta y se verifica la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{il(x)} \mu_n(dx) = \int e^{il(x)} \mu(dx) \quad \text{para todo } l \in L. \quad (1.10)$$

## 18.2. Convergencia débil de las medidas en un espacio de Hilbert

**18.2.1. Condiciones para las funcionales características.** Aquí  $\mathcal{X}$  es un espacio separable de Hilbert,  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos de  $\mathcal{X}$ . Introduzcamos las designaciones para ciertas totalidades de operadores lineales en  $\mathcal{X}$ :  $T_C$  es un conjunto de todos los

operadores simétricos no negativos totalmente continuos,  $S$  es un conjunto de todos los operadores nucleares,  $S_a$  es un subconjunto del conjunto  $S$  compuesto de los operadores cuya traza no es mayor que  $a$ .

Con la ayuda de los operadores de  $T_C$  se da un criterio cómodo de compacidad de los conjuntos de  $\mathcal{X}$ .

**Lema.** Para todo operador  $A \in T_C$  el conjunto  $\{x : |A^{-1}x| \leq 1\}$  es compacto. Para todo compacto  $K \subset \mathcal{X}$  existe un operador  $A \in T_C$  tal que  $K \subset \{x : |A^{-1}x| \leq 1\}$ .

La compacidad débil de una familia de medidas en el espacio de Hilbert es equivalente a la continuidad (en cierto sentido) de una familia de funcionales características de las medidas.

**Teorema 1.** Sea  $M$  una familia de medidas finitas en  $\mathfrak{B} \cdot \chi_\mu(z)$ ,  $z \in \mathcal{X}$ , es la funcional característica de la medida  $\mu \in M$ . Para que el conjunto  $M$  sea débilmente compacto es necesario y suficiente que: a)  $\chi_\mu(0)$  sean acotadas en totalidad para todo  $\mu \in M$ ; b) para todo  $\varepsilon > 0$  y para toda medida  $\mu \in M$  se puedan indicar un operador  $B \in T_C$  y un operador  $A_\mu \in S_1$  respectivamente, tales que  $\operatorname{Re} [\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leq \varepsilon$ , cuando  $(BA_\mu Bz, z) \leq 1$ .

**Observación.** Existe un ejemplo en el cual para la totalidad débilmente compacta de medidas no puede indicarse un operador  $A \in S$  (común para todas las medidas) tal que sea  $\operatorname{Re} [\chi_\mu(0) - \chi_\mu(z)] \leq \varepsilon$ , cuando  $(Az, z) \leq 1$ .

En la condición b) del teorema 1 se construyen los operadores  $C_\mu \in S$ , que pueden ser representados en la forma  $C_\mu = BA_\mu B$ , donde  $B \in T_C$ ,  $A_\mu \in S_1$ . Abajo se dan a conocer las condiciones en que tal representación es posible.

**Lema 2.** Para que una familia de operadores  $C_\mu \in S$  pueda ser representada en la forma  $C_\mu = BA_\mu B$ , donde  $B \in T_C$ ,  $A_\mu \in S_1$ , es necesario que en cada base ortonormada  $\{e_k\}$  la serie

$$\operatorname{Sp} C_\mu = \sum_{k=1}^{\infty} (C_\mu e_k, e_k)$$

converja uniformemente respecto de  $\mu$  y suficiente que dicha serie converja por lo menos en una sola base.

Designemos mediante  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$  un espacio de Hilbert de operadores lineales de Hilbert-Schmidt (para los cuales  $\operatorname{Sp} AA^* < \infty$ ) en  $\mathcal{X}$  con el producto escalar  $(A, B) = \operatorname{Sp} AB^*$ .

**Lema 3.** Si  $B \in T_C$ ,  $A_\mu \in T_C$ ,  $A_\mu^2 \in S_1$ , entonces el conjunto de operadores  $BA_\mu$  es compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ . Para todo conjunto de operadores  $C_\mu$ , compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ , existe un operador  $B \in T_C$  tal que  $B^{-1}C_\mu^2 B^{-1} \in S_1$ .

**18.2.2. Condiciones de compacidad de una familia de operadores.** La condición más eficaz de compacidad de una familia de medidas se enuncia en términos de la compacidad de los operadores.

**Teorema 2.** Para que una familia  $\mathfrak{M}$  de medidas finitas  $\mu$  en  $\mathfrak{B}$  sea débilmente compacta, es necesario y suficiente que:

a) para todo  $\varepsilon > 0$  exista tal  $C$  que

$$\mu \{x : |x| > C\} < \varepsilon \quad \text{para toda } \mu \in \mathfrak{M};$$



b) para todo  $C > 0$  la familia de operadores  $\mathfrak{B}_\mu^C$  definidos por la correlación

$$\int_{|z| \leq C} (z, x)^2 \mu(dx) = (\mathfrak{B}_\mu^C z, \mathfrak{B}_\mu^C z),$$

sea un conjunto compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ .

La condición b) se puede sustituir por la condición b'): en alguna base  $\{e_k\}$  en  $\mathcal{X}$  (y, consecuentemente, en cualquier base) la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathfrak{B}_\mu^C e_k|^2$$

converge uniformemente respecto de  $\mu$  para todo  $C > 0$ .

**Corolario 1.** Supongamos que para las medidas  $\mu \in \mathfrak{M}$  existen unos operadores de correlación

$$(A_\mu z, z) = \int (z, x)^2 \mu(dx)$$

y  $A_\mu^{\frac{1}{2}} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ . En este caso, para la compacidad débil de una familia

de medidas  $\mu$  es suficiente que el conjunto de operadores  $\{A_\mu^{\frac{1}{2}}\}$  sea compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ . Si, para cierto  $C > 0$ , se tiene que  $\mu\{x : |x| > C\} = 0$  con  $\mu \in \mathfrak{M}$  cualquiera, entonces la compacidad de  $\{A_\mu^{\frac{1}{2}}\}$  en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$  es la condición necesaria para que la familia de medidas  $\mathfrak{M}$  sea débilmente compacta.

**Corolario 2.** Supongamos que los operadores  $\mathfrak{B}_\mu$  se definen mediante la correlación

$$(\mathfrak{B}_\mu x, z) = \int \frac{(z, x)^2}{1 + |x|^2} \mu(dx).$$

En este caso, para que la familia  $\mathfrak{M}$  sea débilmente compacta, es necesario y suficiente que: a) el conjunto de operadores  $\{\mathfrak{B}_\mu^{\frac{1}{2}}\}$  sea compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$  y b) el  $\lim_{C \rightarrow \infty} \sup_{\mu \in \mathfrak{M}} \mu\{x : |x| > C\} = 0$ .

Este corolario permite formular las condiciones para la convergencia débil de medidas.

**Teorema 3.** Para que una sucesión de medidas  $\mu_n$  converja débilmente hacia la medida  $\mu$ , es necesario y suficiente que: a) el conjunto de operadores  $\{\mathfrak{B}_{\mu_n}\}$  sea compacto en  $\mathfrak{R}_{\mathcal{X}}$ ; b) las funcionales características  $\chi_n(z) = \int e^{i(z, x)} \mu_n(dx)$  de las medidas  $\mu_n$  converjan hacia la funcional característica  $\chi_\mu(z)$  de la medida  $\mu$  para todos los  $z \in \mathcal{X}$ .

### 18.3. Teoremas del límite para los procesos aleatorios continuos

18.3.1. Condiciones generales de convergencia de las distribuciones de funcionales. En este párrafo se consideran los procesos aleatorios continuos con la probabilidad 1.

Sea  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  un conjunto de funciones continuas  $x(t)$  definidas en el segmento  $[a, b]$  que toman valores en el espacio métrico separable completo  $\mathcal{X}$ .

Introduzcamos en el espacio  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  una métrica:

$$r(x, y) = \sup_{a \leq t \leq b} \rho(x(t), y(t)), \quad (3.1)$$

donde  $\rho(x, y)$  es una distancia en  $\mathcal{X}$ . La métrica (3.1) transforma  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  en un espacio métrico separable completo.

Designemos mediante  $\mathfrak{B}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  la  $\sigma$ -álgebra de todos los conjuntos borelianos en  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ . Dicha  $\sigma$ -álgebra coincide con la  $\sigma$ -álgebra mínima en la que están contenidos todos los conjuntos cilíndricos de  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ .

Sea  $\xi(t)$  un proceso aleatorio definido para  $t \in [a, b]$  con los valores en  $\mathcal{X}$  y continuo con la probabilidad 1. En este caso, la medida probabilística  $\mu$ , correspondiente al proceso aleatorio  $\xi(t)$ , está concentrada en el espacio medible  $\{\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X}), \mathfrak{B}_{[a, b]}(\mathcal{X})\}$ . Con ello, los valores de la medida  $\mu$  en los conjuntos cilíndricos de  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  se dan mediante las distribuciones de dimensiones finitas del proceso  $\xi(t)$ .

En los teoremas del límite para procesos aleatorios se supone, como regla, la convergencia de distribuciones de dimensiones finitas, es decir, la convergencia de las medidas  $\mu_n(A)$  hacia la medida  $\mu(A)$  para todos los conjuntos cilíndricos  $A$  que son conjuntos de discontinuidad de la medida límite  $\mu$ .

Si la medida límite  $\mu$  está concentrada en el espacio de funciones continuas  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ , entonces la clase  $\mathfrak{U}_0$  de conjuntos abiertos cilíndricos de discontinuidad de la medida  $\mu$  satisface las condiciones del teorema 4, p. 18.1. Por esta razón, para demostrar la convergencia débil de las medidas  $\mu_n$  hacia la medida  $\mu$  se requiere establecer las condiciones de compacidad débil de las medidas  $\mu_n$ ,  $n \geq 0$ , para lo cual es suficiente indicar la forma general del compacto en el espacio  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  (véase el teorema 2 en el p. 18.1).

Sea  $\lambda_\delta$  una función continua monótona positiva definida para  $\delta > 0$  y que satisface la condición  $\lambda_{+\infty} = 0$ . Sea  $X_0$  un compacto en  $\mathcal{X}$ .

Lema 1. Un conjunto de funciones  $K^\delta(X_0, \lambda_\delta)$  que satisfacen las condiciones: a)  $x(t) \in X_0$ ,  $a \leq t \leq b$ ; b)  $\rho(x(t_1), x(t_2)) < \lambda_\delta$ ,  $|t_1 - t_2| < \delta$ ,  $\forall \delta > 0$ , es compacto en  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$ .

Para todo compacto  $K_0$  en  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  se pueden indicar un compacto  $X_0$  en  $\mathcal{X}$  y una función  $\lambda_\delta$  monótona positiva continua cuando  $\delta > 0$ , con  $\lambda_{+\infty} = 0$  tales que  $K_0 \subset K(X_0, \lambda_\delta)$ .

Supongamos que  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 0$ , es una sucesión de procesos aleatorios cuyas funciones muestrales pertenecen al espacio  $\mathfrak{T}_{[a, b]}(\mathcal{X})$  con la probabilidad 1 y  $\mu_n$  son las medidas probabilísticas correspondientes a los procesos  $\xi_n(t)$ .

**Lema 2.** La convergencia débil de las medidas  $\mu_n \Rightarrow \mu_0$  para  $n \rightarrow \infty$ , es equivalente a la convergencia de las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  hacia la distribución  $f(\xi_0(\cdot))$  para toda funcional  $f(x) \mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$ -medible y  $\mu$ -casi siempre continua.

Las condiciones (3.2), (3.3) y (3.4) que vienen abajo determinan la compacidad débil de una sucesión de medidas  $\mu_n$ , correspondientes a los procesos aleatorios  $\xi_n(t)$ .

**Teorema 1.** Supongamos que las distribuciones de dimensiones finitas de los procesos  $\xi_n(t)$  convergen a las distribuciones de dimensiones finitas del proceso  $\xi_0(t)$ . Con el fin de conseguir que para todas las funcionales  $f$ , continuas en  $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$ , las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  converjan a la distribución  $f(\xi_0(\cdot))$ , es necesario y suficiente que para todo  $\lambda > 0$  se cumpla la correlación

$$\limsup_n P \left\{ \sup_{|t_1 - t_2| \leq \delta} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda \right\} = 0. \quad (3.2)$$

**Observación 1.** Para cualquier  $\lambda > 0$ , en lugar de la condición (3.2) es suficiente que se verifique

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{|t_1 - t_2| < \delta} \rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) > \lambda \right\} = 0. \quad (3.3)$$

**Observación 2.** En lugar de la condición (3.2) resulta suficiente que se cumpla la siguiente condición: existen  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  y  $H > 0$  tales que para cualesquiera  $t_1, t_2 \in [a, b]$  y todo  $n$

$$M |\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2))|^\alpha \leq H |t_1 - t_2|^{1+\beta}. \quad (3.4)$$

Para diferentes tipos de procesos aleatorios continuos las condiciones de convergencia de las funcionales se concretizan.

**18.3.2. Procesos con incrementos independientes.** Para los procesos continuos con incrementos independientes  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 0$ , definidos en el segmento  $[a, b]$  con valores en un espacio de Banach  $\mathcal{X}$ , las condiciones de convergencia de las funcionales se establecen tomando en consideración las siguientes propiedades de las funciones muestrales:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} P \{ |\xi(t_{h+1}) - \xi(t_h)| > \varepsilon \} = 0, \quad (3.5)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ . Aquí,  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $\delta = \max(t_{h+1} - t_h)$ .

**Teorema 2.** Con objeto de que para toda función  $\varphi(x)$ , continua en  $\mathfrak{B}_{[a,b]}(\mathcal{X})$ , las distribuciones de magnitudes aleatorias  $\varphi(\xi_n(\cdot))$  converjan hacia la distribución de la magnitud  $\varphi(\xi_0(\cdot))$ , es necesario y suficiente que se cumplan las condiciones:

1) las distribuciones parciales de los procesos  $\xi_n(t)$  convergen hacia las distribuciones parciales del proceso  $\xi_0(t)$ ;

2) para todo  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t_2 - t_1| \leq \delta} P \{ |\xi_n(t_2) - \xi_n(t_1)| > \varepsilon \} = 0. \quad (3.6)$$

**18.3.3. Procesos de Márkov.** Para los procesos continuos de Márkov  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 0$ , definidos en el segmento  $[a, b]$  con valores en el

espacio métrico completo  $\mathcal{X}$  dotado de la métrica  $\rho$  y las probabilidades de paso  $P_n(t, x, s, A)$ , introduzcamos

$$\alpha_n(h, \varepsilon) = \sup P_n \{ (t_1, x, t_2, V_\varepsilon(x)); x \in \mathcal{X}, |t_2 - t_1| \leq h \}, \quad (3.7)$$

donde  $V_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) > \varepsilon\}$ .

**Teorema 3.** Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , convergen, para  $n \rightarrow \infty$ , hacia las distribuciones parciales del proceso  $\xi_0(t)$  y se cumplen para todo  $\varepsilon > 0$  las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \sup_n \alpha_n(h, \varepsilon) &= 0; \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} P \{ \rho(\xi(t_{k+1}), \xi(t_k)) > \varepsilon \} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

donde  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $\delta = \max_k (t_{k+1} - t_k)$ .

Entonces, para toda función  $\varphi$ , continua en  $\mathcal{I}_{[a,b]}(\mathcal{X})$ , las distribuciones  $\varphi(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribución  $\varphi(\xi_0(\cdot))$ .

**18.3.4. Procesos continuos contruidos según las sumas de magnitudes aleatorias independientes.** Sea  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}, \dots$  una sucesión de series de unas magnitudes aleatorias numéricas (independientes en cada serie) que satisfacen las condiciones

$$\left. \begin{aligned} M\xi_{nt} &= 0, \quad t = \overline{1, k_n}; \\ D\xi_{nt} &= b_{nt}, \quad \sum_{t=1}^{k_n} b_{nt} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Determinemos las funciones aleatorias  $\xi_n(t)$  para  $t \in [0, 1]$  mediante las correlaciones

$$\left. \begin{aligned} S_{nh} &= \sum_{t=1}^h \xi_{nt}, \quad t_{nh} = \sum_{t=1}^h b_{nt}; \\ \xi_n(t) &= S_{nh} + \frac{t - t_{nh}}{t_{nk+1} - t_{nh}} [S_{nk+1} - S_{nh}], \quad t \in [t_{nh}, t_{nk+1}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

En este caso,  $S_{n0} = 0$ ,  $t_{n0} = 0$ . Entonces,  $\xi_n(t)$  es una quebrada aleatoria que une los puntos de un plano con coordenadas  $(t_{nk}, S_{nh})$ ,  $k = 0, 1, \dots, k_n$ .

Aduzcamos las condiciones con las cuales las distribuciones parciales de los procesos  $\xi_n(t)$  y las de funcionales de dichos procesos convergen hacia las distribuciones parciales y hacia las de funcionales correspondientes del proceso de Wiener  $w(t)$ .

**Teorema 4.** Supongamos que las magnitudes aleatorias independientes  $\xi_{nt}$  con funciones de distribución  $F_{nt}(x)$  satisfacen la condición (3.9) y la condición de Lindeberg:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nt}(x) = 0 \quad (3.11)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

Entonces, las distribuciones de dimensiones finitas de los procesos  $\xi_n(t)$  determinados por la correlación (3.10), convergen hacia las distribuciones de dimensiones finitas del proceso de Wiener  $w(t)$  y las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribución  $f(w(\cdot))$  para toda funcional  $f$  continua en  $\mathfrak{X}_{[0,1]}(R)$ .

Para las sumas  $S_h = \sum_{i=1}^h \xi_i$  de magnitudes aleatorias independientes e igualmente distribuidas  $\xi_i$  con  $M\xi_i = 0$  y  $D\xi_i = 1$ , designemos mediante  $\zeta_n(t)$  una quebrada aleatoria cuyos vértices se encuentran en los puntos  $(\frac{k}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}} S_h)$ .

**Teorema 5.** Para toda funcional  $f$ , definida y continua en  $\mathfrak{X}_{[0,1]}(R)$  casi siempre según la medida  $\mu_w$ , correspondiente al proceso de Wiener  $w(t)$ , las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribución  $f(w(\cdot))$ . En particular, se verifican las siguientes correlaciones límites:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{1 \leq h \leq n} |S_h| < a \sqrt{n} \right\} = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |w(t)| < a \right\} \quad (3.12)$$

para casi todo  $a$ . Para la función  $\varphi(x)$ , integrable según Riemann en cada intervalo finito,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{n}} S_k \right) < a \right\} = P \left\{ \int_0^1 \varphi(w(t)) dt < a \right\} \quad (3.13)$$

cualquiera que sea  $a$ , para las que

$$P \left\{ \int_0^1 \varphi(w(t)) dt = a \right\} = 0.$$

#### 18.4. Teoremas del límite para los procesos sin discontinuidades de segunda especie

**18.4.1. Métrica en el espacio de funciones sin discontinuidades de segunda especie.** Sea  $D_{[0,1]}(\mathcal{X})$  un conjunto de funciones  $x(t)$ , definidas en el segmento  $[0, 1]$  y que toman los valores de un espacio métrico separable completo  $\mathcal{X}$  con métrica  $\rho$ , y que tienen los valores límites  $x(t+0)$  para  $0 \leq t < 1$  y  $x(t-0)$  para  $0 < t \leq 1$ .

Como las funciones coincidentes en todos los puntos de discontinuidad no se diferencian, parece natural fijar los valores de las funciones en los puntos de discontinuidad:

$$x(t) = x(t+0), \quad x(0) = x(+0), \quad x(1) = x(1-0).$$

La magnitud  $\rho(x(t-0), x(t))$  se denomina valor del salto de la función  $x(t)$  en el punto  $t$ .

Designemos mediante  $\Lambda$  una totalidad de todas las funciones continuas numéricas monótonas crecientes en el segmento  $[0, 1]$  con  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda(1) = 1$ , es decir, la aplicación continua y unívoca de  $[0, 1]$  sobre  $[0, 1]$ .

La métrica  $r_0(x, y)$  en el espacio  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  se determina por la correlación

$$r_D(x, y) = \inf_{\lambda \in \Lambda} [ \sup_{0 \leq t \leq 1} \rho(x(t), y(\lambda(t))) + \sup_{0 \leq t \leq 1} |t - \lambda(t)| ]. \quad (4.1)$$

La métrica  $r_D(x, y)$  transforma  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  en un espacio métrico separable completo.

La forma general de los conjuntos compactos en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  se determina recurriendo al criterio de ausencia de discontinuidades de segunda especie. Hallemos para toda  $x(t) \in D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ , la magnitud ( $C > 0$ ):

$$\begin{aligned} \Delta_C(x) = & \sup \{ \min [\rho(x(t'), x(t)), \rho(x(t), x(t'))]; \\ & t - C < t' < t < t' + C, t', t, t' \in [0, C] \} + \\ & + \sup \{ \rho(x(0), x(t)); 0 < t < C \} + \\ & + \sup \{ \rho(x(t), x(1)); 1 - C < t < 1 \}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sean  $X_0$  un compacto en  $\mathcal{X}$ , y  $\lambda_C$ , una función continua monótona positiva definida para  $C > 0$  y que satisface la condición  $\lambda_{+0} = 0$ .

**Teorema 1.** Un conjunto de funciones  $K_D(X_0, \lambda_0)$  que satisface las condiciones:

- 1)  $x(t) \in X_0, 0 \leq t \leq 1$ ;
- 2)  $\Delta_C(x) \leq \lambda_C, \forall C > 0$ ,

es compacto en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ .

Para todo compacto  $K_0$  en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  se pueden indicar un compacto  $X_0 \subset \mathcal{X}$  y una función  $\lambda_C$ , positiva monótona y continua para  $C > 0$ , con  $\lambda_{+0} = 0$  tales que  $K_0 \subset K_D(X_0, \lambda_C)$ .

**18.4.2. Teorema del límite principal para los procesos sin discontinuidades de segunda especie.**

**Teorema 2.** Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos  $\xi_n(t), 0 \leq t \leq 1, n \geq 0$ , cuyas funciones muestrales pertenecen a  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  con la probabilidad 1, convergen, para  $n \rightarrow \infty$ , hacia las distribuciones parciales del proceso  $\xi_0(t)$  sin discontinuidades de segunda especie. Para que con toda funcional  $f$ , definida en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  y continua en la métrica  $r_D$ , las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribución  $f(\xi_0(\cdot))$ , es necesario y suficiente que se cumpla la condición

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\Delta_C(\xi_n(\cdot)) > \varepsilon) = 0, \quad (4.3)$$

cualquiera que sea  $\varepsilon > 0$ .

**Observación.** En lugar de la condición (4.3) es suficiente que se cumpla la siguiente: existen  $\alpha > 0, \beta > 0$  y  $H > 0$  tales que para todo  $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq 1$  y para todo  $n \geq 1$  se verifica la desigualdad

$$M[\rho(\xi_n(t_1), \xi_n(t_2)) \rho(\xi_n(t_2), \xi_n(t_3))]^\alpha \leq H(t_3 - t_1)^{1+\beta}. \quad (4.4)$$

**18.4.3. Teorema del límite para los procesos de Márkov.** Sea  $\xi_n(t), 0 \leq t \leq n, n \geq 0$ , una sucesión de procesos de Márkov definidos en el segmento  $[0, 1]$  cuyas funciones muestrales pertenecen al espacio  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  con la probabilidad 1. Designaremos mediante  $P_n(t, x, s, A)$  las probabilidades de paso para el proceso  $\xi_n(t)$  e introduzcamos  $V_\varepsilon(x) = \{y : \rho(x, y) > \varepsilon\}$  para  $\varepsilon > 0$ .

**Teorema 3.** Supongamos que las distribuciones parciales de los procesos de M $\acute{a}$ rkov  $\xi_n(t)$  convergen, para  $n \rightarrow \infty$ , hacia las distribuciones parciales de  $\xi_0(t)$  y para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple la condici3n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup \{P_n(t, x, s, V_n(x)); x \in \mathcal{X}, 0 \leq s - t \leq h\} = 0. \quad (4.5)$$

Entonces, para toda funcional  $f$ , continua en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ , las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribuci3n  $f(\xi_0(\cdot))$ .

Los procesos con incrementos independientes en un espacio normado lineal completo  $\mathcal{X}$  son un caso particular de los procesos de M $\acute{a}$ rkov. En calidad de corolario del teorema 3 se enuncia el

**Teorema 4.** Sea  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 0$ , una sucesi3n de procesos con incrementos independientes definidos en  $[0, 1]$  cuyas funciones muestrales pertenecen a  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$  con la probabilidad 1. Si las distribuciones parciales del proceso  $\xi_n(t)$  convergen hacia las distribuciones parciales del proceso  $\xi_0(t)$  y para todo  $\varepsilon > 0$  se cumple la condici3n

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{|t-s| \leq h} P\{|\xi_n(t) - \xi_n(s)| > \varepsilon\} = 0, \quad (4.6)$$

entonces, para toda funcional  $f$ , continua en  $D_{[0, 1]}(\mathcal{X})$ , las distribuciones  $f(\xi_n(\cdot))$  convergen hacia la distribuci3n  $f(\xi_0(\cdot))$ .

**Observaci3n.** En los teoremas 2-4 es suficiente exigir que la funcional  $f$  sea medible y  $\mu_0$ -casi siempre continua, siendo  $\mu_0$  la medida que corresponde al proceso aleatorio  $\xi_0(t)$ .

## ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS

## 19.1. Procesos de difusión

19.1.1. Definición. La definición de un proceso homogéneo de difusión basada en el concepto de operador característico se ha dado en el p. 15.1. Demos a conocer otra definición que es útil para el caso de un proceso de difusión no homogéneo y que sólo emplea la noción de probabilidad de paso.

Sea  $\mathfrak{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos de un espacio euclídeo  $m$ -dimensional  $R^m$ . La función  $P(s, x, t, \Gamma)$ ,  $0 \leq s < t \leq T$ ,  $x \in R^m$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , se denomina probabilidad de paso, si están cumplidas las condiciones:

- $P(s, x, t, \Gamma)$  es una función  $\mathfrak{B}$ -medible respecto de  $x$  con  $s, t, \Gamma$  fijados;
- $P(s, x, t, \Gamma)$  es una medida probabilística en  $\mathfrak{B}$  para  $s, x, t$  fijados (de suerte que  $P(s, x, t, R^m) = 1$ );
- para cualesquiera  $0 \leq s < t_1 < t_2$ ,  $x \in R^m$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$  queda cumplida la correlación

$$P(s, x, t_2, \Gamma) = \int_{R^m} P(s, x, t_1, dy) P(t_1, y, t_2, \Gamma),$$

llamada ecuación de Chapman—Kolmogórov.

Diremos que se ha dado un proceso de Márkov en amplio sentido con valores en  $R^m$ , si está definida la probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$ .

**Definición 1.** Un proceso de Márkov en amplio sentido con valores en  $R^m$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  lleva el nombre de proceso de difusión, si se cumplen las siguientes condiciones:

- para todo  $\varepsilon > 0$  y cualesquiera  $t \in [0, T]$  y  $x \in R^m$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \varepsilon} P(t, x, t + \Delta t, dy) = 0;$$

- existen una función  $a(s, x)$  con valores en  $R^m$  y un operador lineal simétrico definido de modo no negativo  $b(s, x)$ , que aplica  $R^m$  en  $R^m$ , tales que para cualesquiera  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in R^m$  y  $t \in [0, T]$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x) P(t, x, t + \Delta t, dy) = a(t, x);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{|y-x| < \varepsilon} (y-x, \theta)^2 P(t, x, t + \Delta t, dy) = (b(t, x) \theta, \theta),$$



cualquiera que sea  $\theta \in R^m$ . Aquí,  $(\theta, y)$  es un producto escalar en  $R^m$ .

Es fácil ver, que si está cumplida la condición 1) y en la condición 2) los límites existen para cierto  $\varepsilon > 0$ , existen también para todos los  $\varepsilon > 0$  y, además, no dependen de  $\varepsilon$ .

La denominación «procesos de difusión» se debe a que ellos describen con suficiente exactitud el fenómeno de difusión. Si en el momento  $t$  una partícula en difusión se encontraba en el punto  $x$ , su desplazamiento durante el tiempo de  $t$  hasta  $t + \Delta t$  puede escribirse en forma de la suma  $a(t, x) \Delta t + \delta(t, t + \Delta t, x)$ , donde  $a(t, x) \Delta t$  es un desplazamiento no aleatorio ligado con el movimiento macroscópico del medio en el cual se realiza la difusión, en tanto que  $\delta(t, t + \Delta t, x)$  es un vector aleatorio ligado con movimiento térmico caótico de las moléculas del medio en consideración. En este caso, consideramos que la esperanza matemática del vector  $\delta(t, t + \Delta t, x)$  es nula, y la media del cuadrado de su proyección en una dirección arbitraria  $\theta \in R^m$  tiene por expresión:  $|\theta|^2 \times \int (b(t, x) \theta, \theta) \Delta t$ . El vector  $a(t, x)$  lleva el nombre de vector de traslado y el operador  $b(t, x)$ , operador de difusión. En el caso unidimensional éstos se llaman coeficientes de traslado y difusión, respectivamente.

**19.1.2. Ecuaciones de Kolmogórov.** Los dos teoremas que siguen muestran que los procesos de difusión están íntimamente ligados con las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo parabólico.

Supongamos que en  $R^m$  está elegida una base. Designemos mediante  $a^i(s, x)$  las coordenadas del vector  $a(s, x)$  mientras que mediante  $b^{ij}(s, x)$ , los elementos de la matriz  $b(s, x)$  en esta base.

**Teorema 1.** Sea dado un proceso de difusión para el cual las funciones  $a(s, x)$  y  $b(s, x)$  son continuas y la función continua acotada  $f(x)$  de valores reales es tal que la función

$$u(s, x) = \int_{R^m} P(s, x, t, dy) f(y)$$

es dos veces continuamente derivable respecto de  $x$ . En este caso, la función  $u(s, x)$  es derivable respecto de  $s$  y satisface la ecuación

$$-\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m b^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^m a^i(s, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad x \in R^m,$$

$$0 \leq s < t,$$

la condición inicial

$$\lim_{s \rightarrow t} u(s, x) = f(x).$$

Esta ecuación se llama ecuación inversa de Kolmogórov.

En muchos casos la probabilidad de paso tiene la densidad  $G(s, x, t, \Gamma)$  respecto de la medida lebesguiana. Esto significa que para cualesquiera  $0 \leq s < t$ ,  $x \in R^m$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} G(s, x, t, y) dy.$$

Si la función  $G(s, x, t, y)$  es suficientemente suave, como función de  $(t, y)$ , entonces satisface la ecuación normal de Kolmogórov, llamada también ecuación de Fokker-Planck.

**Teorema 2.** Si para un proceso de difusión los correlaciones límites en la definición 1 se cumplen uniformemente respecto de  $x \in R^m$  y existen las derivadas continuas

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i} (a^i(t, y) G(s, x, t, y)), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (b^{ij}(t, y) G(s, x, t, y)),$$

entonces la función  $G(s, x, t, y)$  para todos los  $(t, y) \in (s, T) \times R^m$  satisface la ecuación

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j} (b^{ij}(t, y) G(s, x, t, y)) - \\ - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y^i} (a^i(t, y) G(s, x, t, y)).$$

Los teoremas 1 y 2 muestran que al construir los procesos de difusión y al estudiar sus propiedades, se puede emplear la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo parabólico. No obstante, existe también otro método para construir procesos de difusión basado en la construcción inmediata de las trayectorias de tales procesos en calidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas. Con el fin de comprender qué forma han de tener estas ecuaciones, examinemos un proceso de difusión  $\xi(t)$ . Su incremento  $\xi(t + \Delta t) - \xi(t)$  tendrá los mismos momentos marginados condicionales (para  $\xi(t)$  fijado) de dos primeros órdenes como el vector

$$a(t, \xi(t)) \Delta t + \sigma(t, \xi(t)) (w(t + \Delta t) - w(t)),$$

donde el operador  $\sigma(t, x)$  es tal que  $\sigma^2(t, x) = b(t, x)$ , y  $w(t)$  es un proceso de Wiener  $m$ -dimensional. Con la exactitud hasta  $o(\Delta t)$  podemos escribir una igualdad aproximada (teniendo en cuenta la coincidencia de las distribuciones condicionales en los miembros primero y segundo)

$$\xi(t + \Delta t) - \xi(t) \approx a(t, \xi(t)) \Delta t + \sigma(t, \xi(t)) (w(t + \Delta t) - w(t)).$$

Es natural esperar que al pasar a las diferenciales obtendremos la coincidencia exacta de las distribuciones. La propia ecuación tiene que poseer la forma

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) d w(t).$$

Con el objeto de dar sentido a esta ecuación, escribámosla en forma integral

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) d w(s).$$

Ahora, el problema consiste en dar sentido a la segunda integral en el segundo miembro de esta ecuación. Las integrales de este tipo, llamadas integrales estocásticas, se han considerado en el p. 19.2. Hemos de hacer notar que un proceso de Wiener tiene, con la probabilidad 1, una variación no acotada en cualquier intervalo, por lo cual dicha integral no puede entenderse en el sentido de Stieltjes.

Como conclusión, demos a conocer las condiciones suficientes cuyo cumplimiento hace que un proceso sea de difusión.

Para que un proceso de Márkov (en amplio sentido) sea proceso de difusión, es suficiente que la probabilidad de paso del proceso  $P(s, x, t, l')$  satisfaga las condiciones:

1) para cierto  $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} |y-x|^{2+\delta} P(t, x, t+\Delta t, dy) = 0, \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T];$$

2) existe un vector función  $a(t, x) \in R^m$  y una función operacional  $b(t, x)$  que representa en sí, para todos los  $t$  y  $x$ , un operador simétrico definido de modo no negativo y que actúa en  $R^m$ , tales que para cualesquiera  $t$  y  $x$  quedan cumplidas las correlaciones ( $x \in R^m$ ,  $t \in [0, T]$ )

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} (y-x) P(t, x, t+\Delta t, dy) = a(t, x);$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{R^m} (y-x, \theta)^2 P(t, x, t+\Delta t, dy) = (b(t, x) \theta, \theta), \quad \theta \in R^m.$$

## 19.2. Integrales estocásticas extendidas al proceso de Wiener

19.2.1. Definición de la integral estocástica extendida a un proceso de Wiener unidimensional. Definamos primero la integral estocástica

$$\int_0^T f(t) dw(t)$$

para el caso en que  $w(t)$  es un proceso de Wiener unidimensional. Supongamos que en un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  está dado el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  (es decir, la familia de  $\sigma$ -álgebras subordinada a la condición: cuando  $t_1 < t_2$ , se tiene que  $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2} \subset \mathfrak{F}$ ) y el proceso de Wiener  $w(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , con valores en  $R^1$ , es tal que  $w(0) = 0$ ,  $w(t)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible para todo  $t \in [0, T]$ , en tanto que los incrementos  $w(t+s) - w(t)$  no dependen de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$  cuando  $s > 0$ .

Designemos mediante  $H_2[0, T]$  un espacio de las funciones aleatorias  $f(t) = f(t, \omega)$  con valores en  $R^1$ , definidas en  $[0, T]$  y de tal índole, que para todo  $t \in [0, T]$  la magnitud aleatoria  $f(t)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible (en este caso diremos que el proceso  $f(t)$  está subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ ) y, con la probabilidad 1, es finita

la integral

$$\int_0^T f^2(t) dt.$$

**Teorema 1.** A todo proceso  $\{f(t), t \in [0, T]\}$  del espacio  $H_2[0, T]$  se le puede poner en correspondencia una magnitud aleatoria  $I_T^0(f)$ , que está definida en el espacio  $(\Omega, \mathfrak{F})$  y posee las siguientes propiedades:

1) si  $f_1, f_2 \in H_2[0, T]$ , y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son unas constantes arbitrarias, entonces

$$I_T^0(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_T^0(f_1) + \alpha_2 I_T^0(f_2);$$

2) si  $\chi_{[t_1, t_2]}(t)$  es el indicador del segmento  $[t_1, t_2]$ , entonces

$$I_T^0(\chi_{[t_1, t_2]}) = w(t_2) - w(t_1);$$

3) si  $f \in H_2[0, T]$  y  $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$ , entonces

$$M I_T^0(f) = 0, M (I_T^0(f))^2 = M \int_0^T f^2(t) dt,$$

4) cualesquiera que sean  $f \in H_2[0, T]$  y las constantes  $C > 0$  y  $N > 0$ , tiene lugar la igualdad

$$P(|I_T^0(f)| > C) \leq P\left\{\int_0^T f^2(t) dt > N\right\} + \frac{N}{C^2}.$$

**Definición 1.** La magnitud aleatoria  $I_T^0(f)$  se denomina integral estocástica de la función  $f(t)$  extendida a un proceso de Wiener y se designa

$$I_T^0(f) = \int_0^T f(t) dw(t).$$

Llamemos la función  $f \in H_2[0, T]$  escalonada, si existe tal partición del segmento  $[0, T]$  por medio de los puntos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , que  $f(t) = f(t_k)$  para  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . Es evidente que para las funciones escalonadas

$$\int_0^T f(t) dw(t) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) [w(t_{k+1}) - w(t_k)].$$

Si  $\{f_n(t), t \in [0, T]\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , es una sucesión de funciones escalonadas para las cuales con cualquier  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt > \varepsilon\right\} = 0,$$

donde  $f(t)$  es una función de  $H_2[0, T]$ , entonces, de acuerdo con la condición 4)

$$P \left\{ \left| \int_0^T f_n(t) d\omega(t) - \int_0^T f_r(t) d\omega(t) \right| > \varepsilon \right\} \leq \\ \leq \rho + P \left\{ \int_0^T |f_n(t) - f_r(t)|^2 dt > \rho \varepsilon^2 \right\},$$

de donde se deduce que la sucesión de magnitudes aleatorias

$$\int_0^T f_n(t) d\omega(t)$$

es fundamental en el sentido de convergencia en probabilidad. El límite de esta sucesión es precisamente la integral  $\int_0^T f(t) d\omega(t)$ .

En el caso en que  $f \in H_2[0, T]$  y  $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$ , existe una sucesión de funciones escalonadas  $f_n(t) \in H_2[0, T]$  tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

De la propiedad 3) se desprende la igualdad

$$M \left[ \int_0^T f_n(t) d\omega(t) - \int_0^T f_r(t) d\omega(t) \right]^2 = M \int_0^T |f_n(t) - f_r(t)|^2 dt,$$

la cual significa que la sucesión de magnitudes aleatorias  $\int_0^T f_n(t) d\omega(t)$  es fundamental en el sentido de convergencia en media cuadrática y, consecuentemente, en este caso

$$\int_0^T f(t) d\omega(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T f_n(t) d\omega(t).$$

Si el proceso  $f \in H_2[0, T]$  es continuo con la probabilidad 1, entonces

$$\int_0^T f(t) d\omega(t) = \lim_{\max \Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{h=0}^{n-1} f(t_h) [\omega(t_{h+1}) - \omega(t_h)],$$

donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ ,  $\Delta t_h = t_{h+1} - t_h$ .

**19.2.2. Estimaciones para los momentos.** Para estimar los momentos de las integrales estocásticas resulta útil el siguiente teorema.  
**Teorema 2.** Si  $f \in H_2 [0, T]$  y para cierto  $p > 0$

$$M \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2} < \infty,$$

se verifican las desigualdades:

$$M \left| \int_0^T f(t) dw(t) \right|^p \geq A_p M \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2},$$

si  $p > 4$ , y

$$M \left| \int_0^T f(t) dw(t) \right|^p \leq B_p M \left( \int_0^T |f(t)|^2 dt \right)^{p/2},$$

si  $p > 0$ . Aquí,  $A_p$  y  $B_p$  son constantes que sólo dependen de  $p$ .

Cuando  $p = 2$ , ambas desigualdades se transforman, evidentemente, en igualdades, con la particularidad de que  $A_2 = B_2 = 1$ .

He aquí una igualdad más para las integrales estocásticas que fácilmente se deduce de la definición: si  $f_1, f_2 \in H_2 [0, T]$  y

$$M \int_0^T f_1^2(t) dt < \infty, M \int_0^T f_2^2(t) dt < \infty, \text{ entonces}$$

$$M \int_0^T f_1(t) dw(t) \int_0^T f_2(t) dw(t) = M \int_0^T f_1(t) f_2(t) dt.$$

**19.2.3. Integral estocástica como función del límite superior.** Para  $f \in H_2 [0, T]$  y  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$  hagamos

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) = \int_0^T \chi_{[t_1, t_2]}(t) f(t) dw(t),$$

donde  $\chi_{[t_1, t_2]}(t)$  es el indicador del segmento  $[t_1, t_2]$ .

Se puede mostrar que si  $f \in H_2 [0, T]$  y  $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$ , entonces

$$M \left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) / \sqrt{\mathfrak{V}_{t_1}} \right\} = 0;$$

$$M \left\{ \left( \int_{t_1}^{t_2} f(t) dw(t) \right)^2 / \mathfrak{V}_{t_1} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} M \{ f^2(t) / \mathfrak{V}_{t_1} \} dt,$$

donde  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ .

Examinemos el proceso

$$I_t(f) = \int_0^t f(s) d\omega(s), \quad t \in [0, T],$$

donde  $f \in H_2[0, T]$ . Con todo  $t$  este proceso está definido sólo para casi todos los  $\omega$ , es decir, con la exactitud salvo la equivalencia estocástica. Consideraremos, que entre todos los procesos estocásticos equivalentes, a título de  $I_t(f)$  está elegido el proceso separable. En este caso, podemos demostrar que el proceso  $\{I_t(f), t \in [0, T]\}$  es continuo con la probabilidad 1 y tiene lugar la desigualdad

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + P \left\{ \int_0^T f^2(s) ds > N \right\}.$$

Si  $f \in H_2[0, T]$  y  $M \int_0^T f^2(t) dt < \infty$ , entonces el proceso  $(I_t(f), \mathfrak{F}_t)$ ,  $t \in [0, T]$ , representa en sí una martingala continua con cuadrado integrable, cuya característica se determina por la fórmula

$$\langle I(f) \rangle_t = \int_0^t f^2(s) ds.$$

En este caso quedan cumplidas las desigualdades:

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right| > C \right\} \leq \frac{1}{C^2} M \int_0^T f^2(s) ds;$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) d\omega(s) \right|^2 \leq 4M \int_0^T f^2(s) ds.$$

**19.2.4. Fórmula de Ito.** Supongamos que un proceso  $\{\zeta(t), t \in [0, T]\}$  subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  puede ser representado para cualesquiera  $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$  en la forma

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b(t) d\omega(t),$$

donde  $b \in H_2[0, T]$ , y el proceso  $a(t)$ , subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ , es tal que

$$P \left\{ \int_0^T |a(t)| dt < \infty \right\} = 1.$$

En este caso suele decirse que el proceso  $\zeta(t)$  tiene una diferencial estocástica en  $[0, T]$ :

$$d\zeta(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t).$$

Es evidente que si  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  son dos procesos con diferenciales estocásticas, y  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  son constantes arbitrarias, entonces

$$d(\alpha_1 \zeta_1(t) + \alpha_2 \zeta_2(t)) = \alpha_1 d\zeta_1(t) + \alpha_2 d\zeta_2(t),$$

es decir, la operación de derivación es lineal. Demos a conocer ahora la fórmula de derivación de un producto de dos procesos y también la de derivación de una función compuesta.

**Teorema 3.** Si los procesos  $\zeta_1(t)$  y  $\zeta_2(t)$  tienen las diferenciales estocásticas

$$d\zeta_1(t) = \alpha_1(t) dt + b_1(t) dw(t);$$

$$d\zeta_2(t) = \alpha_2(t) dt + b_2(t) dw(t),$$

el proceso  $\zeta_1(t) \zeta_2(t)$  también tiene diferencial estocástica y

$$d(\zeta_1(t) \zeta_2(t)) = \zeta_1(t) d\zeta_2(t) + \zeta_2(t) d\zeta_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt.$$

**Teorema 4.** Si el proceso  $\xi(t)$  tiene la diferencial estocástica

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dw(t),$$

y la función continua de valores reales  $f(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^1$ , tiene derivadas continuas  $f'_t(t, x)$ ,  $f'_x(t, x)$  y  $f''_{xx}(t, x)$ . entonces el proceso  $f(t, \xi(t))$  también tiene diferencial estocástica y

$$df(t, \xi(t)) = \left[ f'_t(t, \xi(t)) + f'_x(t, \xi(t)) a(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, \xi(t)) b^2(t) \right] dt + f'_x(t, \xi(t)) dw(t).$$

La última fórmula lleva el nombre de **fórmula de Ito**. Supongamos ahora que los procesos  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$ , ...,  $\xi_l(t)$  tienen diferenciales estocásticas

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + b_i(t) dw(t), \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

y la función continua real  $f(t, x_1, \dots, x_l)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x_1, \dots, x_l \in R^1$ , tiene derivadas parciales continuas

$$f'_t, f'_{x_i}, f''_{x_i x_k}, \quad k, i = 1, \dots, l.$$

En este caso, el proceso  $f(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t))$  también tiene diferencial estocástica, con la particularidad de que

$$df(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t)) = \left[ \frac{\partial f}{\partial t}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^l f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_l(t)) a_i(t) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^l f''_{x_i x_j}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) b_i(t) b_j(t) \right] dt + \\ + \sum_{i=1}^l f'_{x_i}(t, \xi_1(t), \dots, \xi_l(t)) b_i(t) dw(t)$$

Esta fórmula también lleva el nombre de Ito.



**EJEMPLO.** Haciendo  $f(x) = x^2$ , de la fórmula de Ito obtenemos la correlación

$$\int_{t_1}^{t_2} w(t) dw(t) = \frac{1}{2} (w(t_2))^2 - \frac{1}{2} (w(t_1))^2 - \frac{1}{2} (t_2 - t_1), \quad 0 \leq t_1 \leq t_2.$$

**19.2.5. Identidades de momento.** Definamos las funciones  $G_n(t, x) = t^{n/2} \text{He}_n(t^{-1/2}x)$ ,  $t \geq 0$ ,  $x \in R^1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , donde  $\text{He}_n(z)$  son polinomios de Hermite:

$$\text{He}_n(z) = (-1)^n \exp\left(\frac{z^2}{2}\right) \frac{d^n}{dz^n} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Escribamos, como ejemplo, las cinco primeras funciones  $G_k(t, x)$ :

$$G_0(t, x) = 1, \quad G_1(t, x) = x, \quad G_2(t, x) = x^2 - t,$$

$$G_3(t, x) = x^3 - 3tx, \quad G_4(t, x) = x^4 - 6x^2t + 3t^2.$$

La afirmación que sigue es un corolario de la fórmula de Ito.

**Teorema 5.** Si  $f \in H_2[0, T]$  y para cierto  $n$  natural se cumple la condición

$$M \left( \int_0^T f^2(t) dt \right)^{n/2} < \infty,$$

entonces, para cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$  reales, el proceso

$$\left\{ G_n \left( \alpha + \int_0^t f^2(s) ds, \beta + \int_0^t f(s) dw(s) \right), \mathfrak{F}_t \right\}, \quad t \in [0, T],$$

es una martingala y, en particular,

$$MG_n \left( \alpha + \int_0^T f^2(s) ds, \beta + \int_0^T f(s) dw(s) \right) = G_n(\alpha, \beta).$$

De este teorema se deduce (cuando  $n = 1$ ) que a condición de que

$$M \left( \int_0^T f^2(t) dt \right)^{1/2} < \infty$$

el proceso

$$\left( \int_0^t f(s) dw(s), \mathfrak{F}_t \right), \quad t \in [0, T]$$

es una martingala (quizás, sin el segundo momento) y, en particular, con esta condición se verifica

$$M \int_0^T f(s) dw(s) = 0.$$

Como corolario de esta afirmación se obtiene, sin dificultad alguna, la siguiente propiedad del proceso de Wiener.

Si  $\tau$  es un momento de Márkov respecto del proceso de Wiener  $\{w(t), t \geq 0\}$ , entonces, a condición de que  $M\tau^{1/2} < \infty$ , se verifica la igualdad  $Mw(\tau) = 0$ . Que esto no es siempre así, nos lo muestra el ejemplo de un momento de Márkov  $\tau_1 = \inf\{t : w(t) \geq 1\}$ , para el cual  $w(\tau_1) = 1$  y, por ello,  $Mw(\tau_1) = 1$ . Observemos que  $M\tau_1^{1/2} = \infty$ , aunque para todo  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  se tiene  $M\tau_1^{1/2-\varepsilon} < \infty$ .

**19.2.6. Integrales estocásticas extendidas al proceso de Wiener multidimensional.** Sean dados en cierto espacio probabilístico un flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  y  $m$  procesos de Wiener unidimensionales e independientes entre sí  $w^1(t), w^2(t), \dots, w^m(t)$  tales que  $w^k(0) = 0$  y todos ellos están subordinados al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ , mientras que los incrementos  $w^k(t+s) - w^k(t)$ ,  $s \geq 0, k = 1, \dots, m$ , no dependen de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$ . Designemos mediante  $w(t)$  el proceso de Wiener  $m$ -dimensional  $(w^1(t), w^2(t), \dots, w^m(t))$ .

Supongamos ahora que  $f(t), t \in [0, T]$ , es un proceso aleatorio de valores matriciales. Los elementos de la matriz  $f(t)$  se designarán  $f^{ij}(t), i = 1, 2, \dots, l; j = 1, 2, \dots, m$ . Supongamos que para cualesquiera  $i$  y  $j$   $f^{ij} \in H_2[0, T]$ . Esto significa que los procesos  $f^{ij}(t)$  están subordinados al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  y

$$P\left\{\int_0^T (f^{ij}(t))^2 dt < \infty\right\} = 1, \quad i = 1, \dots, l; \quad j = 1, \dots, m.$$

Dejamos intacta la designación  $H_2[0, T]$  para la totalidad de matrices  $f(t)$ , cuyos elementos satisfacen las condiciones mencionadas. Si  $f(t)$  es una matriz de orden  $l \times m$ , entonces con  $f^*(t)$  se designa la matriz transpuesta. Esta es una matriz de orden  $m \times l$ , en la que el lugar perteneciente a la  $i$ -ésima línea y  $j$ -ésima columna lo ocupa el elemento  $f^{ij}(t)$ . Para la traza de la matriz  $f(t) \times f^*(t)$  tenemos la siguiente fórmula

$$\text{Sp}(f(t)f^*(t)) = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m (f^{ij}(t))^2.$$

En particular, si  $l = 1$  entonces  $f(t)$  es un vector de coordenadas  $(f^1(t), \dots, f^m(t))$ . En este caso

$$\text{Sp}(f(t)f^*(t)) = \sum_{j=1}^m (f^j(t))^2 = |f(t)|^2.$$

Definamos ahora, para  $f \in H_2[0, T]$ , la integral estocástica

$$\int_0^T f(t) dw(t)$$

como un vector aleatorio de coordenadas

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T f^{ij}(t) dw^j(t), \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Si  $l = 1$ , esto será una magnitud aleatoria escalar

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T f^j(t) d\omega^j(t),$$

la que designaremos también

$$\int_0^T (f(t), d\omega(t)).$$

Aquí,  $f^j(t)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  son las coordenadas del vector  $f(t)$ .  
Indiquemos las siguientes propiedades de las integrales estocásticas extendidas a un proceso de Wiener multidimensional.

1) La integral estocástica representa en sí una función lineal del proceso  $f(t)$ .

2) Si  $f \in H_2[0, T]$  y  $M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt < \infty$ , entonces

$$M \int_0^T f(t) d\omega(t) = 0, \quad M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^2 = M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt.$$

3) Si  $f(t)$  y  $g(t)$  son dos procesos matriciales de orden  $l \times m$  del espacio  $H_2[0, T]$ , para los cuales

$$M \int_0^T \text{Sp}(f(t) g^*(t)) dt < \infty,$$

entonces

$$M \left( \int_0^T f(t) d\omega(t), \int_0^T g(t) d\omega(t) \right) = M \int_0^T \text{Sp}(f(t) g^*(t)) dt.$$

En particular, cuando  $l = 1$ ,

$$M \left[ \int_0^T (f(t), d\omega(t)) \int_0^T (g(t), d\omega(t)) \right] = M \int_0^T (f(t), g(t)) dt,$$

siempre que la magnitud en el segundo miembro de esta igualdad es finita. Cuando  $f = g$ , de aquí se obtiene la igualdad

$$M \left[ \int_0^T (f(t), d\omega(t)) \right]^2 = M \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

4) La modificación separable del proceso

$$\int_0^t f(s) d\omega(s), \quad t \in [0, T],$$

representa en sí un proceso  $l$ -dimensional continuo, cualquiera que sea  $f \in H_2[0, T]$ . Si  $\theta$  es un elemento arbitrario (no aleatorio) del espacio  $R^l$ , entonces, al hacer

$$\xi_0(t) = \left( \theta, \int_0^t f(s) d\omega(s) \right),$$

tendremos la desigualdad

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_0(t)| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + P \left\{ \int_0^T (f(t) \cdot f^*(t) \theta, \theta) dt > N \right\},$$

donde  $N$  y  $C$  son constantes positivas arbitrarias.

Si  $l = 1$ , de aquí obtenemos

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (f(s), d\omega(s)) \right| > C \right\} \leq \frac{N^2}{C} + P \left\{ \int_0^T |f(t)|^2 dt > N \right\}.$$

5) Si  $f \in H_2[0, T]$  y  $M \int_0^T \text{Sp}(f(t) f^*(t)) dt < \infty$ , el proceso

$$\left( \int_0^t f(s) d\omega(s), \mathfrak{Y}_t \right), \quad t \in [0, T],$$

será una martingala continua  $l$ -dimensional con cuadrado integrable. Su característica, que representa en sí un proceso de valores matriciales de orden  $l \times l$ , se determina por la integral

$$\int_0^t f(s) f^*(s) ds, \quad t \in [0, T].$$

Además, para  $\theta \in R^l$  arbitrario se cumplen las desigualdades

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_0(t)| > C \right\} \leq \frac{1}{C^2} M \int_0^T (f(t) f^*(t) \theta, \theta) dt;$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_0(t)|^2 \leq 4M \int_0^T (f(t) f^*(t) \theta, \theta) dt,$$

donde  $\xi_0(t)$  está definido en la propiedad 4).

En particular, cuando  $l = 1$ , la característica de la martingala

$$\int_0^t (f(s), d\omega(s)), \quad t \in [0, T],$$

es igual a

$$\int_0^t |f(s)|^2 ds, \quad t \in [0, T].$$

6) Si  $f \in H_2[0, T]$  y para cierto  $p > 0$

$$M \left[ \int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right]^{p/2} < \infty,$$

entonces se verifican las desigualdades:

$$M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^p \geq A_p M \left( \int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right)^{p/2},$$

si  $p > 1$ , y

$$M \left| \int_0^T f(t) d\omega(t) \right|^p \leq B_p M \left( \int_0^T \text{Sp} (f(t) f^*(t)) dt \right)^{p/2},$$

si  $p > 0$ . Aquí,  $A_p$  y  $B_p$  son constantes que sólo dependen de  $p$ .

7) Supongamos que para cierto proceso  $l$ -dimensional  $\zeta(t)$  con cualesquiera  $0 \leq t_1 < t_2 = T$  tiene lugar la representación

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s) d\omega(s),$$

donde  $b(t)$  es un proceso de valores matriciales de orden  $l \times m$  del espacio  $H_2[0, T]$ , en tanto que el proceso vectorial  $a(t)$  es tal que todas sus coordenadas están subordinadas al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  y son integrables con la probabilidad 1 en el segmento  $[0, T]$ . En este caso diremos que el proceso  $\zeta(t)$  tiene diferencial estocástica

$$d\zeta(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t).$$

Si el proceso  $\zeta(t)$  tiene la diferencial estocástica citada y la función real continua  $f(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^l$ , tiene derivadas parciales continuas

$$f'_i(t, x), \quad f''_{x^i}(t, x), \quad f''_{x^i x^j}(t, x), \quad i, j = 1, \dots, l,$$

entonces el proceso  $f(t, \zeta(t))$ ,  $t \in [0, T]$  también tiene diferencial estocástica y

$$df(t, \zeta(t)) = \left[ f'_t(t, \zeta(t)) + (a(t), f'_x(t, \zeta(t))) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{Sp}(b(t) b^*(t) f''_{xx}(t, \zeta(t))) \right] dt + (f'_x(t, \zeta(t)), b(t) dw(t)),$$

donde  $f'_x$  es un vector de coordenadas  $f'_{x^1}, f'_{x^2}, \dots, f'_{x^m}$ , mientras que  $f''_{xx}$  es una matriz con elementos  $f''_{x^i x^j}$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ .

La fórmula citada también se llama fórmula de Ito. En forma desarrollada se escribe así:

$$df(t, \zeta(t)) = \left[ f'_t(t, \zeta(t)) + \sum_{i=1}^i a^i(t) f'_{x^i}(t, \zeta(t)) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{h,i=1}^i \sum_{j=1}^m b^{ij}(t) b^{hj}(t) f''_{x^i x^h}(t, \zeta(t)) \right] dt + \\ + \sum_{h=1}^i \sum_{j=1}^m f'_{x^h}(t, \zeta(t)) b^{hj}(t) dw^j(t).$$

### 19.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos continuos

19.3.1. Teorema de existencia y unicidad de la solución. Sean dados:

1) un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ ;

2) un proceso de Wiener  $m$ -dimensional  $w(t) = \{w^1(t), \dots, w^m(t)\}$  concordado con el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  (lo que significa que  $w(0) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$ ,  $w(t)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible y los incrementos  $w(t+s) - w(t)$  no dependen de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$ , cuando  $s \geq 0$ );

3) un vector aleatorio  $\mathfrak{F}_0$ -medible  $\xi_0$  (observemos que en virtud de 2) la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_0$  y, por lo tanto, el vector  $\xi_0$  no dependen del proceso  $\{w(t), t \in [0, T]\}$ );

4) las funciones  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , que toman valores en  $R^m$  y  $L(R^m)$ , respectivamente, donde  $L(R^m)$  es una totalidad de todos los operadores lineales que actúan desde  $R^m$  en  $R^m$ ; se supone que  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  son medibles en totalidad de las variables.

Se examinará la ecuación diferencial estocástica

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) dw(t) \quad (3.1)$$

con la condición inicial

$$\xi(0) = \xi_0.$$

Esta ecuación puede ser escrita en la forma integral

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(x, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(x, \xi(s)) d\omega(s), \quad t \in [0, T].$$

Aquí,  $\xi(t)$  es el proceso buscado. Demos a conocer la definición exacta de lo que se entenderá por solución de la ecuación (3.1).

**Definición 1.** Se llama solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial  $\xi(0) = \xi_0$  un proceso  $m$ -dimensional  $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$  tal que:

- a) para todo  $t \in [0, T]$   $\xi(t)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible;
- b) todas las coordenadas del proceso vectorial  $\{a(t, \xi(t)), t \in [0, T]\}$  son absolutamente integrable en el segmento  $[0, T]$  con la probabilidad 1;
- c) todos los elementos del proceso matricial  $\{\sigma(t, \xi(t)), t \in [0, T]\}$  son de cuadrado integrable en el segmento  $[0, T]$  con la probabilidad 1;
- d) el proceso  $\xi(t)$  tiene diferencial estocástica, con la particularidad de que  $d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) d\omega(t)$  y  $\xi(0) = \xi_0$ .

Ha de ser notado que en el caso en que  $\sigma(t, x) = 0$ , la ecuación (3.1) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria con condición inicial aleatoria. Tal ecuación se puede resolver para todo  $\omega$  mediante los medios corrientes.

**Definición 2.** Se dice que la ecuación (3.1) tiene una sola solución, si para cualesquiera dos de sus soluciones  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$  queda cumplida la condición

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\right\} = 0.$$

Abajo viene el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación (3.1).

**Teorema 1.** Supongamos que los coeficientes de la ecuación (3.1) satisfacen las condiciones:

A) para cualesquiera  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , se cumple la desigualdad

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

donde  $K$  es una constante,  $|\sigma(t, x)|^2 = \sum_{j, h=1}^m (\sigma^{jh}(t, x))^2$ ,

$\sigma^{jh}(t, x)$  son los elementos de la matriz  $\sigma(t, x)$ ;

B) para todo  $R > 0$  existe una constante  $C_R$  tal que con  $|x| \leq R$ ,  $|y| \leq R$  y  $t \in [0, T]$  se cumple la desigualdad

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq C_R |x - y|^2.$$

En este caso existe una única solución continua  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , de la ecuación (3.1).

**Observación 1.** Sean dadas las funciones  $a_i(t, x)$ ,  $\sigma_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2$ , que satisfacen las condiciones del teorema 1 y son tales que para cierto  $N > 0$ , siendo  $|x| \leq N$  y  $t \in [0, T]$ , se verifican las igualdades  $a_1(t, x) = a_2(t, x)$  y  $\sigma_1(t, x) = \sigma_2(t, x)$ . Designemos mediante  $\xi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , la solución de la ecuación

$$d\xi_i(t) = a_i(t, \xi_i(t)) dt + \sigma_i(t, \xi_i(t)) d\omega(t)$$

con una misma condición inicial  $\xi_i(0) = \xi_0$ ,  $i = 1, 2$ , Hagamos a continuación

$$\tau_i = \inf \{t : |\xi_i(t)| \geq N\}, \quad i = 1, 2,$$

con la particularidad de que, si el conjunto dentro de las llaves es vacío, suponemos  $\tau_i = T$ . En este caso se puede mostrar que  $P(\tau_1 = \tau_2) = 1$  y

$$P\left\{\sup_{0 \leq t \leq \tau_i} |\xi_1(t) - \xi_2(t)| > 0\right\} = 0.$$

Esta propiedad de las soluciones de la ecuación (3.1) caracteriza la llamada dependencia local en que se encuentran la solución y los coeficientes de la ecuación.

**Observación 2.** En las condiciones del teorema 1 la solución  $\xi(t)$  de la ecuación (3.1) es medible para todo  $t \in [0, T]$  respecto de la  $\sigma$ -álgebra mínima de los sucesos, engendrada por el vector aleatorio  $\xi_0$  y por los valores del proceso  $w(s)$  cuando  $s \leq t$ . Esto se deduce de que la solución de la ecuación (3.1) puede ser obtenida por el método de las aproximaciones sucesivas.

En lo sucesivo veremos que existen soluciones de la ecuación (3.1) que no poseen esta propiedad.

**Observación 3.** Si están cumplidas las condiciones del teorema 1 y para cierto  $p$  entero,  $M|\xi_0|^{2p} < \infty$ , entonces la solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial  $\xi_0$  satisface las condiciones:

$$M|\xi(t)|^{2p} \leq K_p(1 + M|\xi_0|^{2p}), \quad t \in [0, T];$$

$$M|\xi(t) - \xi_0|^{2p} \leq K'_p(1 + M|\xi_0|^{2p})t^p, \quad t \in [0, T],$$

donde  $K_p, K'_p$  son constantes que sólo dependen de  $p, K$  y  $T$ .

**19.3.2. Solución como un proceso de difusión.** En las condiciones del teorema 1 la solución  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , de la ecuación (3.1) posee la propiedad de Márkov respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ . Esto significa que para cualesquiera  $0 \leq s \leq t \leq T$  y  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ , donde  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos del espacio  $R^m$ , con la probabilidad 1 se cumple la correlación

$$P\{\xi(t) \in \Gamma / \mathfrak{F}_s\} = P\{\xi(t) \in \Gamma / \xi(s)\}.$$

De este modo, el proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$  es una función aleatoria de Márkov con la distribución inicial

$$\mu(\Gamma) = P\{\xi_0 \in \Gamma\}, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}.$$

La probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  de la función aleatoria de Márkov  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , se determina por la fórmula

$$P(s, x, t, \Gamma) = P\{\xi_{sx}(t) \in \Gamma\}, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad x \in R^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B},$$

donde  $\xi_{sx}(t)$  es la solución de la ecuación

$$\xi_{sx}(t) = x + \int_s^t a(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, \xi_{sx}(\tau)) dw(\tau). \quad (3.2)$$

Aquí,  $x$  es un vector no aleatorio de  $R^m$ ,  $t \in [s, T]$ .



El teorema que sigue muestra que la solución de la ecuación (3.1) representa en sí, bajo ciertas condiciones, un proceso de difusión.

**Teorema 2.** *Supongamos que las funciones  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  satisfacen las condiciones del teorema 1 y que, además, son continuas en totalidad de las variables. En este caso, el proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , que es la solución de la ecuación (3.1), es un proceso de difusión con el vector de traslado  $a(t, x)$  y la matriz de difusión  $b(t, x) = \sigma(t, x) [\sigma(t, x)]^*$ .*

Así pues, la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas ofrece la oportunidad de construir los procesos de difusión haciendo suposiciones bastante amplias respecto de los coeficientes  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$ . Más aún, al exigir la suavidad adicional de las funciones  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$ , se puede demostrar la existencia de dos derivadas continuas de la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(t)), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m,$$

respecto de  $x$  y, de este modo, obtener una ecuación inversa de Kolmogórov. Para mayor precisión es válido el

**Teorema 3.** *Supongamos que las funciones  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  satisfacen las condiciones del teorema 1, son continuas y dos veces continuamente derivables respecto de  $x$ . Supóngase, además, que para ciertos  $p > 0$  y  $K > 0$  queda cumplida la desigualdad*

$$\begin{aligned} & \sum_{i, h=1}^m \left| \frac{\partial a^i(t, x)}{\partial x^h} \right| + \sum_{i, j, h=1}^m \left| \frac{\partial^2 a^i(t, x)}{\partial x^j \partial x^h} \right| + \\ & + \sum_{j, i, h=1}^m \left| \frac{\partial \sigma^{ij}(t, x)}{\partial x^h} \right| + \sum_{i, j, h, l=1}^m \left| \frac{\partial^2 \sigma^{ij}(t, x)}{\partial x^h \partial x^l} \right| \leq K(1 + |x|^p). \end{aligned}$$

En este caso, si  $f(x)$ ,  $x \in R^m$ , es una función de valores reales dos veces continuamente derivable, para la cual

$$|f(x)| + \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right| + \sum_{i, h=1}^m \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^h} \right| \leq K(1 + |x|^p) \quad (p > 1),$$

entonces la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(t)), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m,$$

donde  $\xi_{sx}(t)$  es la solución de la ecuación (3.2), satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \sum_{i=1}^m a^i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i, h=1}^m \sum_{j=1}^m \sigma^{ij}(s, x) \sigma^{hj}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^h} = 0 \end{aligned}$$

en el dominio  $s \in (0, t)$ ,  $x \in R^m$  y la condición de frontera

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x) = f(x).$$

Como corolario de este teorema interviene el siguiente teorema de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy para las ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico.

**Teorema 4.** Sea dado en el dominio  $0 \leq s < T$ ,  $x \in R^m$ , un operador diferencial

$$\mathcal{L}u(s, x) = \frac{\partial u}{\partial s}(s, x) + \sum_{i=1}^m a_i(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^i} + \sum_{i, j=1}^m b^{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^i \partial x^j}$$

del tipo parabólico (esto significa que para todo  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , queda cumplida la desigualdad  $\sum_{i, j=1}^m b^{ij}(s, x) \theta^i \theta^j \geq 0$ , cualesquiera que sean los números reales  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^m$ ). Si la matriz  $b(t, x)$  con elementos  $b^{ij}(t, x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ , es tal que  $b(t, x) = \sigma(t, x)(\sigma(t, x))^*$ , y las funciones  $a(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  satisfacen las condiciones del teorema 3, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(s, x) = 0; \\ \lim_{s \uparrow T} u(s, x) = f(x) \end{cases}$$

tiene una sola solución para cualquier función dos veces continuamente derivable  $f(x)$  tal que la propia función y todas sus derivadas parciales hasta el segundo orden inclusive crecen en el infinito no más rápido que cierta potencia de  $|x|$ . En este caso, la solución  $u(s, x)$  del problema de Cauchy citado puede ser escrita en la forma

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)), \quad 0 \leq s < T, \quad x \in R^m,$$

donde  $\xi_{sx}(t)$ ,  $t \in [s, T]$ , es la solución de la ecuación (3.2).

El teorema enunciado señala que al estudiar las ecuaciones en derivadas parciales del tipo parabólico puede emplearse con éxito la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Una observación especial merece el hecho de que en el teorema 4 no se presupone la regularidad de la matriz  $b(t, x)$ , lo que constituye una ventaja esencial de los métodos basados en la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas.

**19.3.3. Ecuaciones para las funciones características de funcionales.** Sea  $\{\xi(t), t \in [0, T]\}$  la solución de la ecuación (3.1). Consideremos las funcionales

$$\int_0^T g(s, \xi(s)) ds, \quad \int_0^T h(s, \xi(s)) dw(s),$$

donde  $g(s, x)$ ,  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , es una función con valores en  $R^l$ , en tanto que  $h(s, x)$ ,  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , es una función de valores matriciales de orden  $l \times m$ . Las distribuciones de las funcionales

mencionadas quedarán determinadas, si hallamos la función

$$u(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)) \exp \left\{ i \left( \lambda, \int_s^T g(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau \right) + \right. \\ \left. + i \left( 0, \int_s^T h(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\omega(\tau) \right) \right\},$$

donde  $0 \leq s < T$ ,  $x \in R^m$ ,  $\lambda, 0 \in R^l$ ,  $\xi_{sx}(t)$  es la solución de la ecuación (3.2), y  $f(x)$ ,  $x \in R^m$ , cierta función real.

Se puede mostrar que si los coeficientes de la ecuación (3.1) y la función  $f(x)$  satisfacen las condiciones del teorema 3, mientras que las funciones  $g(t, x)$  y  $h(t, y)$  son dos veces continuamente derivables respecto de  $x$ , con la particularidad de que para ciertos  $p > 0$  y  $K > 0$  se tiene

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \left| \frac{\partial g^k(t, x)}{\partial x^j} \right| + \sum_{h, j=1}^m \sum_{r=1}^l \left| \frac{\partial^2 g^r(t, x)}{\partial x^h \partial x^j} \right| + \\ + \sum_{r, h, j=1}^m \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial^2 h^{ir}(t, x)}{\partial x^h \partial x^j} \right| + \sum_{r, h=1}^m \sum_{i=1}^l \left| \frac{\partial h^{ir}(t, x)}{\partial x^h} \right| \leq K(1 + |x|^p),$$

entonces, la función  $u(s, x)$  en el dominio  $0 \leq s < T$ ,  $x \in R^m$ , satisface la ecuación

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial s} + \sum_{k=1}^m a^k(s, x) \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \sum_{j, h=1}^m b^{jh}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x)}{\partial x^j \partial x^h} + \\ + i \sum_{j=1}^m \frac{\partial u(s, x)}{\partial x^j} \sum_{h=1}^l d^{jh}(s, x) \theta^h + \\ + u(s, x) \left[ i \sum_{h=1}^l \lambda^h g^h(s, x) - \frac{1}{2} \sum_{j, h}^l \theta^j \theta^h c^{jh}(s, x) \right] = 0,$$

donde

$$b^{jk}(s, x) = \sum_{r=1}^m \sigma^{jr}(s, x) \sigma^{kr}(s, x), \quad j, k = 1, 2, \dots, m;$$

$$c^{jk}(s, x) = \sum_{r=1}^m h^{jr}(s, x) h^{kr}(s, x), \quad j, k = 1, 2, \dots, l;$$

$$d^{jh}(s, x) = \sum_{r=1}^m \sigma^{jr}(s, x) h^{hr}(s, x), \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad h = 1, 2, \dots, l.$$

A esta ecuación se le puede añadir la condición inicial

$$\lim_{s \uparrow T} u(s, x) = f(x).$$

La ecuación para la función  $u(s, x)$  puede ser escrita de forma más breve:

$$\frac{\partial u(s, x)}{\partial x} + (a(s, x), u'_x(s, x)) + \frac{1}{2} \text{Sp}(\sigma(s, x) \sigma^*(s, x) u''_{xx}(s, x)) + \\ + (l(s, x) h^*(s, x) \theta, u'_x(s, x)) + u(s, x) \times \\ \times \left[ l(g(s, x) \lambda) - \frac{1}{2} |h^*(s, x) \theta|^2 \right] = 0,$$

donde  $u'_x$  es un vector de coordenadas  $\frac{\partial u}{\partial x^k}$ ,  $k=1, 2, \dots, m$ ,  $u''_{xx}$  es una matriz de coordenadas  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}$ ,  $j, k=1, \dots, m$ .

**19.3.4. Planteamiento del problema desde el punto de vista de las martingalas.** La condición de Lipschitz en el teorema 1 es demasiado rigurosa. Muchos problemas llevan a la necesidad de considerar ecuaciones diferenciales estocásticas cuyos coeficientes no satisfacen dicha condición. Con este motivo resulta más cómodo ampliar algo la propia noción de solución de una ecuación diferencial estocástica, a saber, se pueden considerar dados solamente los coeficientes de la ecuación. Se requiere construir un espacio probabilístico y definir en éste un proceso de Wiener  $w(t)$  y un proceso  $\xi(t)$  de una manera tal que estos dos procesos sean entrelazados por la ecuación (3.1) con los coeficientes dados. Por supuesto, en este caso es necesario que la  $\sigma$ -álgebra mínima generada por los valores del proceso  $\xi(s)$  para  $s \leq t$  y los incrementos  $w(t + \tau) - w(t)$  para  $\tau \geq 0$  sean independientes.

Ahora, si  $\xi(t)$  es una solución de la ecuación (3.1) con la condición inicial  $\xi_0$ , entonces, evidentemente, el proceso

$$\xi(t) - \xi_0 - \int_0^t a(s, \xi(s)) ds$$

será una martingala continua con cuadrado integrable cuya característica es

$$\int_0^t b(s, \xi(s)) ds,$$

donde  $b(s, x) = \sigma(s, x) c^*(s, x)$ . Y, viceversa, si el proceso  $\xi(t)$  posee estas propiedades, entonces, al ampliar algo (si esto es necesario) el espacio probabilístico, se puede construir el proceso de Wiener  $w(t)$  de un modo tal que los procesos  $\xi(t)$  y  $w(t)$  estén ligados mediante la ecuación (3.1).

Así pues, podemos formular el problema del modo siguiente: para cualesquiera  $s \in [0, T]$  y  $x \in R^m$  se han dado un vector  $a(s, x) \in R^m$  y una matriz simétrica definida de un modo no negativo  $b(s, x)$

de orden  $m \times m$ ; se requiere construir en cierto espacio probabilístico un proceso  $\xi(t)$  de una manera tal que el proceso

$$\xi(t) - \xi(0) - \int_0^t a(s, \xi(s)) ds, \quad t \in [0, T],$$

sea una martingala continua con cuadrado integrable y característica

$$\int_0^t b(s, \xi(s)) ds.$$

Más aún, puesto que el proceso buscado  $\xi(t)$  es continuo, podemos considerar que el espacio probabilístico básico coincide con el espacio de todas las funciones continuas  $x(t)$  que están definidas en  $[0, T]$  y toman valores en  $R^m$ . Convenimos en considerar también que  $\xi(t) = x(t)$  y el problema consiste en construir tal medida en el espacio de las funciones continuas que  $x(t)$  satisfaga las condiciones mencionadas. Enunciamos el problema en forma más precisa.

**Problema.** Sean dadas: a) una función medible  $a(s, x)$ ,  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , con valores en  $R^m$ ; b) una función medible  $b(s, x)$ ,  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , de cuyos valores sirven unos operadores simétricos lineales que están definidos de modo no negativo y actúan desde  $R^m$  en  $R^m$ .

Designemos mediante  $\Omega$  el espacio de todas las funciones continuas definidas en  $[0, T]$  con valores en  $R^m$  y sea  $\mathfrak{F}_t^x$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de subconjuntos de  $\Omega$  en la que están contenidos todos los conjuntos del tipo  $\{x(\tau) \in \Gamma\}$ ,  $\tau \in [s, t]$ , donde  $0 \leq s \leq t \leq T$ ,  $\Gamma$  es un subconjunto boreliano del espacio  $R^m$ .

Para  $s \in [0, T]$  y  $x \in R^m$  prefijados se requiere construir en el espacio medible  $(\Omega, \mathfrak{F}_t^x)$  una medida probabilística  $P_{sx}$  de un modo tal que sea:

- 1)  $P_{sx}\{x(s) = x\} = 1$ ;
- 2) el proceso

$$x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [s, T],$$

es una martingala respecto de  $(\mathfrak{F}_t^x, P_{sx})$  con cuadrado integrable cuya característica se determina mediante la fórmula

$$\int_s^t b(\tau, x(\tau)) d\tau.$$

Las condiciones suficientemente amplias de existencia y unicidad de tal medida se dan en el teorema siguiente.

**Teorema 5.** Si en el problema enunciado arriba las funciones  $a(t, x)$  y  $b(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , satisfacen las condiciones:

A)  $b(t, x)$  es continua en totalidad de las variables y para una constante  $C > 0$  se cumple la desigualdad

$$(b(t, x) \theta, \theta) \leq C |\theta|^2$$

siendo  $t \in [0, T]$ ,  $x, \theta \in R^m$  cualesquiera;

B) para cualesquiera  $t \in [0, T]$  y  $x \in R^m$  la matriz  $b(t, x)$  está positivamente definida, es decir,  $(b(t, x) \theta, \theta) > 0$ , cualesquiera que sean  $\theta \in R^m$  y  $\theta \neq 0$ ;

C)  $a(t, x)$  es medible y acotada, entonces, cualesquiera que sean  $s \in [0, T]$  y  $x \in R^m$ , existe una única medida probabilística  $P_{sx}^{a, b}$  en el espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}_T^x)$  que satisface las condiciones 1) y 2). En este caso, el proceso  $(x(t), \mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a, b})$  es de M $\acute{a}$ rkov.

De conformidad con este teorema, el proceso

$$\xi(t) = x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in [s, T],$$

representa en sí una martingala con cuadrado integrable respecto del flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^x$ ,  $t \in [s, T]$ , y la medida  $P_{sx}^{a, b}$ . Si  $\eta(t)$ ,  $t \in [s, T]$ , es un proceso de valores matriciales (de orden  $l \times m$ ) que está subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t^x$ ,  $t \in [s, T]$  y que satisface la condición

$$P_{sx}^{a, b} \left\{ \int_s^T \text{Sp}(\eta(t) b(t, x(t)) \eta^*(t)) dt < \infty \right\} = 1,$$

entonces, por analogía con el método usado para hallar las integrales estocásticas extendidas a un proceso de Wiener, podemos determinar la integral estocástica

$$\int_s^T \eta(t) d\xi(t).$$

Si, además,

$$M_{sx}^{a, b} \int_s^T \text{Sp}(\eta(t) b(t, x(t)) \eta^*(t)) dt < \infty,$$

el proceso separable

$$\int_s^t \eta(\tau) d\xi(\tau), \quad t \in [s, T],$$

será una martingala continua con cuadrado integrable respecto de  $(\mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a, b})$  de característica

$$\int_s^t \eta(\tau) b(\tau, x(\tau)) \eta^*(\tau) d\tau.$$

En particular, al suponer  $\eta(t) = b^{-1/2}(t, x(t))$ , donde  $b^{-1/2}(t, x)$  es una raíz positiva simétrica del operador positivo  $b^{-1}(t, x)$ , obtendremos que el proceso

$$w(t) = \int_s^t b^{-1/2}(\tau, x(\tau)) d\tilde{w}_0(\tau), \quad t \in [s, T],$$

es un proceso de Wiener respecto de  $(\tilde{\mathfrak{F}}_t^0, P_{ax}^{a, b})$ , con la particularidad de que

$$\xi(t) = \int_s^t b^{1/2}(\tau, x(\tau)) dw(\tau), \quad t \geq s,$$

donde  $b^{1/2}(t, x)$  es la raíz positiva del operador  $b(t, x)$ .

Así pues, en las condiciones del teorema 5 para cualesquiera  $s \in [0, T]$  y  $x \in R^m$  existe un proceso  $m$ -dimensional  $w(t)$ ,  $t \geq s$ , prefijado en  $\Omega$ , tal que el proceso  $(w(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, P_{ax}^{a, b})$  es de Wiener y  $P_{ax}^{a, b}$ -casi por cierto para todo  $t \in [s, T]$  se verifica

$$x(t) = x + \int_s^t a(\tau, x(\tau)) d\tau + \int_s^t b^{1/2}(\tau, x(\tau)) dw(\tau).$$

Ahora, designemos mediante  $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0$  la  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos  $\Omega$ , que contiene todos los conjuntos del tipo  $\{w(\tau) \in \Gamma\}$ , donde  $\tau \in [s, t]$ ,  $\Gamma$  es un subconjunto boreliano del espacio  $R^m$ . Es evidente que  $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0 \subset \tilde{\mathfrak{F}}_t^0$ . Según se deduce de la observación 2 al teorema 1, si los coeficientes  $a(t, x)$  y  $b^{1/2}(t, x)$  son suficientemente suaves, entonces  $\tilde{\mathfrak{F}}_t^0 \subset \tilde{\mathfrak{F}}_t^0$ . Esto significa que en el caso dado la solución de la ecuación diferencial estocástica puede ser construida partiendo sólo del proceso de Wiener  $w(t)$  y de los coeficientes de la ecuación. No obstante, en el caso general esto no es así, como lo demuestra el ejemplo que sigue.

**EJEMPLO.** Sea  $m = 1$ . Designemos mediante  $Q$  una medida de Wiener en el espacio  $(\Omega, \tilde{\mathfrak{F}}_T^0)$ , de suerte que el proceso  $(x(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, Q)$  es de Wiener, siendo  $x(0) = 0$ ,  $Q$ -casi por cierto. Hagamos

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Definamos el proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , haciendo

$$\xi(t) = \int_0^t \sigma(x(s)) dx(s).$$

Es fácil ver que el proceso  $(\xi(t), \tilde{\mathfrak{F}}_t^0, Q)$  es otra vez de Wiener, de lo cual proviene la correlación

$$x(t) = \int_0^t \sigma(x(s)) d\xi(s)$$

que es justa para todo  $t \in [0, T]$  Q-casi por cierto. Quiere decir, que el proceso  $x(t)$  es la solución de la ecuación

$$dx(t) = \sigma(x(t)) d\xi(t)$$

con la condición inicial  $x(0) = 0$ .

Luego, se puede mostrar que

$$\xi(t) = |x(t)| - \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \chi_{[0, \varepsilon]}(|x(s)|) ds,$$

donde  $\chi_{[0, \varepsilon]}(x)$  es el indicador del intervalo  $[0, \varepsilon]$ . De esta fórmula se desprende que  $\xi(t)$  es medible respecto de la  $\sigma$ -álgebra mínima de subconjuntos  $\Omega$  generada por los conjuntos del tipo  $\{x(\cdot) : |x(s)| \in \Gamma\}$ , donde  $s \in [0, t]$ .  $\Gamma$  es un conjunto boreliano en la semirrecta  $[0, \infty)$ .

De este modo, la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t^0$  es mucho más rica que la  $\sigma$ -álgebra mínima generada por los valores del proceso  $\xi(s)$  para  $s \leq t$ . Por consiguiente, la solución de la ecuación considerada no puede ser construida partiendo sólo del proceso de Wiener  $\xi(t)$ . Hemos de notar también que la ecuación en el ejemplo que acabamos de citar no es única: a la par con  $x(t)$  el proceso  $-x(t)$  es también una solución.

Como conclusión de este punto aduzcamos un teorema que generaliza en cierto grado el teorema 5.

**Teorema 6.** *Supongamos que la función  $b(t, x)$  es la misma que en el teorema 5, mientras que la función  $a(t, x)$  satisface, para cierto  $p > m + 2$ , la condición B')*

$$\int_0^T \int_{R^m} |a(t, x)|^p dt dx < \infty.$$

En este caso, para cualesquiera  $s \in [0, T]$  y  $x \in R^m$  en el espacio  $(\Omega, \mathfrak{F}_T^x)$  existe la medida probabilística  $P_{sx}^{a,b}$  que satisface las condiciones 1) y 2) citadas arriba. Con ello, el proceso  $(x(t), \mathfrak{F}_t^x, P_{sx}^{a,b})$  es de Mátkov.

19.3.5. **Diferenciabilidad de las medidas correspondientes a las soluciones de las ecuaciones diferenciales estocásticas.** El teorema que muestra que la solución de una ecuación diferencial estocástica, con coeficiente de traslado no nulo, en muchos casos puede ser obtenida de la solución de la correspondiente ecuación con coeficiente de traslado nulo mediante una sustitución absolutamente continua de la medida.

**Teorema 7.** *En las condiciones del teorema 5 las medidas  $P_{sx}^{a,b}$  y  $P_{sx}^{0,b}$  son equivalentes, con la particularidad de que*

$$\frac{dP_{sx}^{a,b}}{dP_{sx}^{0,b}} = \exp \left\{ \int_s^T (b^{-1}(t, x(t)) a(t, x(t)), dx(t)) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_s^T (b^{-1}(t, x(t)) a(t, x(t)), a(t, x(t)) dt \right\}$$



Observemos que la primera integral en el segundo miembro de la última fórmula representa en sí una integral estocástica por la martingala.

Enunciemos un teorema del cual se deduce, en particular, que una afirmación análoga a la del teorema 7 no siempre tiene lugar.

**Teorema 8.** Sean dadas las funciones  $a(x)$  y  $b(x)$  con valores en  $R^m$  y  $L^+(R^m)$ , respectivamente, donde  $L^+(R^m)$  es una totalidad de todos los operadores positivos simétricos lineales que actúan en  $R^m$ . Supongamos cumplidas las condiciones;

1) existen tales constantes positivas  $C_1$  y  $C_2$  que para cualesquiera  $x, \theta \in R^m$

$$C_1 |\theta|^2 \leq (b(x)\theta, \theta) \leq C_2 |\theta|^2;$$

2) para cualesquiera  $x, y \in R^m$

$$\|b(x) - b(y)\| \leq K |x - y|^\alpha,$$

donde  $K$  y  $\alpha$  son unas constantes positivas,  $\alpha \leq 1$ ,  $\|\cdot\|$  es la norma del operador y  $|\cdot|$ , norma del vector;

3) para cierto  $p > m$

$$\int_{R^m} |a(x)|^p dx < \infty.$$

En este caso, para todo  $x \in R^m$  en el espacio  $(\Omega, \mathfrak{F})$  (aquí,  $\Omega$  es una totalidad de todas las funciones continuas definidas en  $[0, \infty)$  con valores en  $R^m$ , mientras que  $\mathfrak{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra mínima de los subconjuntos de  $\Omega$  que contiene todas las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_T^0$  para  $T < \infty$ ) existe una medida probabilística  $P_x^{a,b}$  tal que

a)  $P_x^{a,b}(x(0) = x) = 1$ ;

b) el proceso

$$x(t) - x(0) - \int_0^t a(x(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

es una martingala con cuadrado integrable respecto de  $(\mathfrak{F}_t^0, P_x^{a,b})$  cuya característica se determina según la fórmula

$$\int_0^t b(x(s)) ds.$$

El proceso  $(x(t), \mathfrak{F}_t^0, P_x^{a,b})$  es un proceso homogéneo de Márkov. En el caso en que  $m \geq 2$  y  $p \geq m$ , y también cuando  $m = 1$  y  $p \geq 2$ , las contracciones de las medidas  $P_x^{a,b}$  y  $P_x^{0,b}$  en las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_T^0$  son equivalentes, siendo  $T \geq 0$  cualquiera. Si, en cambio,  $m = 1$  y  $1 < p < 2$ , entonces, en el caso general, las contracciones de las medidas  $P_x^{a,b}$  y  $P_x^{0,b}$  en las  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_T^0$  no son equivalentes, cualquiera que sea  $T \geq 0$ .

Observemos, que el caso cuando las contracciones de las medidas  $P_x^{a, b}$  y  $P_x^{0, b}$  en la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_T^0$  son equivalentes, la densidad  $\frac{dP_x^{a, b}}{dP_x^{0, b}}$  se determina por la fórmula

$$\frac{dP_x^{a, b}}{dP_x^{0, b}} = \exp \left\{ \int_0^T (b^{-1}(x(s)) a(x(s)), dx(s)) - \frac{1}{2} \int_0^T (b^{-1}(x(t)) a(x(t)), a(x(t))) dt \right\}.$$

#### 19.4. Integrales estocásticas extendidas por las medidas de Poisson

19.4.1. Definición de la integral estocástica extendida por la medida  $\nu$ . Sea  $R^l$  un espacio euclídeo  $l$ -dimensional. Designemos mediante  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , la  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos borelianos de  $R^l$  contenidos en el conjunto  $\{x : x \in R^l, \varepsilon \leq |x| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ , y sea  $\mathfrak{F}_0$  la designación de la unión de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{B}_\varepsilon$  según todos los  $\varepsilon \in (0, 1]$ .

Supongamos, además, que en cierto espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  está dado un flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$ ,  $\mathfrak{F}_t \in \mathfrak{F}$ . Diremos que en el espacio  $[0, T] \times R^l$  está definida una medida de Poisson, si a cada conjunto boreliano  $\Delta \in [0, T]$  y cada conjunto  $A \subset \mathfrak{F}_0$  se les ha puesto en correspondencia una magnitud aleatoria  $\nu(\Delta, A)$ , definida en  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ , tal que quedan cumplidas las condiciones:

1) para cualesquiera  $A \subset \mathfrak{B}_0$  y  $t \in [0, T]$  la magnitud  $\nu([0, t], A)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible, mientras que la magnitud  $\nu((t, t+h], A)$  con todo  $h > 0$  no depende de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{F}_t$ ;

2) si los conjuntos borelianos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  de  $[0, T]$  y los conjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de  $\mathfrak{B}_0$  son de tal índole que los conjuntos  $\Delta_1 \times A_1, \Delta_2 \times A_2, \dots, \Delta_n \times A_n$  son disjuntos dos a dos, entonces las magnitudes aleatorias  $\nu(\Delta_1, A_1), \dots, \nu(\Delta_n, A_n)$  son independientes entre sí.

3) si los conjuntos borelianos  $\Delta_k, k = 1, 2, \dots$ , de  $[0, T]$  y los conjuntos  $A_k, k = 1, 2, \dots$ , de  $\mathfrak{B}_\varepsilon$  son para cierto  $\varepsilon > 0$  de tal índole que los conjuntos  $\Delta_j \times A_k, j, k = 1, 2, \dots$ , son disjuntos dos a dos, entonces, con la probabilidad 1,

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{j, k=1}^{\infty} \nu(\Delta_j, A_k);$$

4) la magnitud aleatoria  $\nu(\Delta, A)$  tiene distribución de Poisson para la cual

$$M\nu(\Delta, A) = |\Delta| \Pi(A),$$

donde  $|\Delta|$  es una medida de Lebesgue del conjunto boreliano  $\Delta \in [0, T]$  y  $\Pi(A)$ , una función numérica en  $\mathfrak{B}_0$ , con la particularidad de que  $0 \leq \Pi(A) < \infty$  para  $A \in \mathfrak{B}_\varepsilon$ .

De la definición se desprende que si  $A_n \in \mathfrak{B}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , para cierto  $\varepsilon > 0$  y los conjuntos  $A_n$  son disjuntos dos a dos, entonces

$$\Pi \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi(A_n).$$

Así pues,  $\Pi(A)$  es una medida en la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos del espacio  $R^l$ . Con ello, para todo  $A \in \mathfrak{B}_0$  se tiene que  $\Pi(A) < \infty$ , pero, en el caso general,

$$\Pi(\{|x| < \varepsilon\}) = \infty, \quad \Pi(\{|x| > \varepsilon\}) = \infty.$$

Hagamos  $\tilde{\nu}(\Delta, A) = \nu(\Delta, A) - |\Delta| \cdot \Pi(A)$  para  $\Delta \subset [0, T]$ ,  $A \in \mathfrak{B}_0$ .

Serán consideradas las integrales estocásticas por la medida  $\tilde{\nu}$ . Designemos mediante  $H_2(\Pi)$  la totalidad de todas las funciones aleatorias  $\varphi(t, x) = \varphi(t, x, \omega)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^l$ ,  $\omega \in \Omega$ , con valores reales, medibles según la totalidad de variables, para cualesquiera  $t \in [0, T]$  y  $x \in R^l$  fijados, la magnitud aleatoria  $\varphi(t, x)$  es  $\mathfrak{F}_t$ -medible y

$$P \left\{ \int_0^T \int_{R^l} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty \right\} = 1.$$

**Teorema 1.** *A toda función aleatoria  $\varphi \in H_2(\Pi)$  se le puede poner en correspondencia una magnitud aleatoria  $J_T^0(\varphi)$  de modo tal que se cumplan las condiciones:*

a) si  $\varphi_1, \varphi_2 \in H_2(\Pi)$  y  $\alpha_1, \alpha_2$  son constantes arbitrarias, entonces

$$J_T^0(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 J_T^0(\varphi_1) + \alpha_2 J_T^0(\varphi_2);$$

b) si  $\chi_{\Delta \times A}(t, x)$  es el indicador del conjunto  $\Delta \times A$ , entonces

$$J_T^0(\chi_{\Delta \times A}) = \tilde{\nu}(\Delta, A);$$

c) si  $\varphi \in H_2(\Pi)$  y  $\int_0^T \int_{R^l} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty$ ,

entonces

$$MJ_T^0(\varphi) = 0, \quad M(J_T^0(\varphi))^2 = \int_0^T \int_{R^l} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx);$$

d) si  $\varphi \in H_2(\Pi)$ , entonces para cualesquiera  $N > 0$  y  $C > 0$

$$P\{|J_T^0(\varphi)| > C\} \leq \frac{N}{C^2} + P\left\{\int_0^T \int_{R^l} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) > N\right\}.$$

**Definición.** Una magnitud aleatoria  $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$  se llama integral estocástica de la función  $\varphi$  extendida por la medida de Poisson  $\tilde{\nu}$  y se designa

$$J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi) = \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) \tilde{\nu}(dt, dx).$$

Una función  $\varphi \in H_2(\Pi)$  se denomina escalonada, si el segmento  $0, T]$  puede ser dividido en intervalos mediante los puntos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , mientras que el espacio  $R^l$  resulta representable en forma de una suma de los conjuntos borelianos disjuntos dos a dos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de un modo tal que  $\varphi(t, x)$  sea constante en los conjuntos del tipo  $[t_k, t_{k+1}] \times A_j$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Para la función escalonada  $\varphi$  se verifica, evidentemente,

$$J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n C_{kj} \tilde{\nu}([t_k, t_{k+1}] \times A_j),$$

donde  $C_{kj}$  es un valor de la función  $\varphi$  en el conjunto  $[t_k, t_{k+1}] \times A_j$ .

Si  $\varphi$  es una función arbitraria de  $H_2(\Pi)$  y  $\varphi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , una sucesión de las funciones escalonadas de  $H_2(\Pi)$  para la cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \int_0^T \int_{R^l} |\varphi_n(t, x) - \varphi(t, x)|^2 dt \Pi(dx) > \varepsilon \right\} = 0$$

cualquiera que sea  $\varepsilon > 0$ , entonces de la condición d) se deduce que la sucesión de magnitudes aleatorias  $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi_n)$  converge en probabilidad hacia cierta magnitud aleatoria. Esta magnitud es precisamente la integral  $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$ . Cuando  $\varphi \in H_2(\Pi)$  y

$$\int_0^t \int_{R^l} M \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

puede indicarse tal sucesión de funciones escalonadas  $\varphi_n \in H_2(\Pi)$  para la cual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{R^l} M |\varphi_n(t, x) - \varphi(t, x)|^2 dt \Pi(dx) = 0$$

y, consiguientemente, en este caso la sucesión de magnitudes aleatorias  $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi_n)$  converge en media cuadrática hacia una magnitud aleatoria que es la integral estocástica  $J_T^{\mathcal{Q}}(\varphi)$ .

Luego, si  $\varphi \in H_2(\Pi)$ , entonces la modificación separable del proceso

$$\int_0^t \int_{R^l} \varphi(s, x) \tilde{\nu}(ds, dx)$$

representa en sí un proceso sin discontinuidades de segunda especie. Con ello,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right| > C \right\} \leq \frac{N}{C^2} + \\ + P \left\{ \int_0^T \int_{R^1} \varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) > N \right\}.$$

Si, además,

$$\int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

entonces, el proceso

$$\int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx)$$

es una martingala con cuadrado integrable (sin discontinuidades de segunda especie), cuya característica es

$$\int_0^t \int_{R^1} \varphi^2(s, x) ds \Pi(dx).$$

En este caso,

$$P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right| > C \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{C^2} \int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(s, x) ds \Pi(dx);$$

$$M \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \int_{R^1} \varphi(s, x) \tilde{v}(ds, dx) \right|^2 \leq 4 \int_0^T \int_{R^1} M\varphi^2(s, x) ds \Pi(dx).$$

**19.4.2. Integrales estocásticas extendidas a la medida  $\nu$ .** Demos la definición de la integral estocástica extendida a la medida de Poisson  $\nu$ . Introduzcamos en la consideración una clase  $H_1(\Pi)$  de funciones aleatorias  $\varphi(t, x) = \varphi(t, x, \omega)$ , medibles según una totalidad de variables,  $\mathfrak{F}_t$ -medibles para todo  $t$  y de tal índole que

$$P \left\{ \int_0^T \int_{R^1} |\varphi(t, x)| dt \Pi(dx) < \infty \right\} = 1,$$

Para  $\varphi \in H_1(\Pi) \cap H_2(\Pi)$  hagamos

$$\int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx) = \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) \tilde{v}(dt, dx) + \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) dt \Pi(dx).$$

De aquí, con la ayuda de paso al límite, la integral

$$\int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx)$$

puede ser determinada para todas las funciones  $\varphi \in H_1(\Pi)$ . Con ello, si

$$\int_0^T \int_{R^l} M\varphi(t, x) dt \Pi(dx) < \infty,$$

entonces

$$M \left| \int_0^T \int_{R^l} \varphi(t, x) v(dt, dx) \right| \leq \int_0^T \int_{R^l} M|\varphi(t, x)| dt \Pi(dx).$$

Indiquemos también que la modificación separable del proceso

$$\int_0^t \int_{R^l} \varphi(s, x) v(ds, dx)$$

representa en sí un proceso sin discontinuidades de segunda especie.

19.4.3. Fórmula generalizada de Ito. Supongamos que en cierto espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  está dado un flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T], \mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ . Sean  $w(t) = (w^1(t), \dots, w^r(t))$  un proceso de Wiener  $r$ -dimensional concordado con el flujo  $\{\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]\}$  y  $v(dt, dx)$ , una medida de Poisson concordada (en el sentido del p. 19.4.1) con el mismo flujo, prefijada en  $[0, T] \times R^l$  y que no depende del proceso de Wiener  $w(t)$ ,  $Mv(dt, dx) = dt \Pi(dx)$ .

Si cierto proceso  $m$ -dimensional  $\xi(t), t \in [0, T]$  admite la representación

$$\begin{aligned} \xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s) ds + \int_0^t b(s) dw(s) + \\ + \int_0^t \int_{R^l} c(s, y) \tilde{v}(ds, dy), \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

donde  $a(t)$  es un proceso  $m$ -dimensional subordinado al flujo  $\mathfrak{F}_t$  y  $b(t)$ , un proceso de valores matriciales de orden  $m \times r$ , todos los elementos del cual pertenecen al espacio  $H_2[0, T]$  (véase el p. 19.2), mientras que  $c(t, x) = c(t, x, \omega)$  es un proceso vectorial de coordena-

das  $c^k(t, x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , perteneciente al espacio  $H_2(\Pi)$ , entonces diremos que el proceso  $\xi(t)$  admite la diferencial estocástica:

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) d\omega(t) + \int_{R^l} c(t, y) \tilde{v}(dt, dy). \quad (4.1)$$

Es obvio que la operación de derivación estocástica es lineal. Aduzcamos, ahora, la fórmula para diferenciar fórmulas complejas.

**Teorema 2.** Si un proceso  $m$ -dimensional  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , tiene la diferencial estocástica (4.1) y  $f(t, x)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , es tal función real, dos veces continuamente derivable respecto a  $x$  y continuamente derivable respecto a  $t$ , que, con la probabilidad 1, se verifica

$$\int_0^T \int_{R^l} \left| f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t)) - \sum_{h=1}^m c^h(t, y) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} \right| dt \Pi(dy) < \infty,$$

entonces, el proceso  $f(t, \xi(t))$ ,  $t \in [0, T]$ , también admite una diferencial estocástica y

$$\begin{aligned} df(t, \xi(t)) = & \left[ \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial t} + \sum_{h=1}^m a^h(t) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i, h=1}^m \sum_{j=1}^r b^{ij}(t) b^{hj}(t) \frac{\partial^2 f(t, \xi(t))}{\partial x^i \partial x^h} + \\ & + \int_{R^l} \left\{ f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t)) - \right. \\ & \left. - \sum_{h=1}^m c^h(t, y) \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} \right\} \Pi(dy) \Big] dt + \\ & + \sum_{h=1}^m \sum_{j=1}^r \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^h} b^{hj}(t) d\omega^j(t) + \\ & + \int_{R^l} (f(t, \xi(t) + c(t, y)) - f(t, \xi(t))) \tilde{v}(dt, dy). \end{aligned}$$

Esta es la fórmula generalizada de Ito. Como corolario de la fórmula generalizada de Ito aduzcamos una fórmula para derivar el producto de dos procesos.

Supongamos que los procesos (unidimensionales)  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$  admiten las diferenciales estocásticas

$$d\xi_i(t) = a_i(t) dt + b_i(t) dw(t) + \int_{R^l} c_i(t, y) \tilde{v}(dt, dy), \quad i=1, 2.$$

Entonces,  $(c_i \in H_2(\Pi) \cap H_4(\Pi))$

$$d(\xi_1(t) \xi_2(t)) = \xi_1(t) d\xi_2(t) + \xi_2(t) d\xi_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt + \int_{R^l} c_1(t, y) c_2(t, y) v(dt, dy).$$

### 19.5. Ecuaciones diferenciales estocásticas para los procesos con discontinuidades

19.5.1. Teorema de existencia y ecuación de Kolmogórov. Sean:

a) un espacio probabilístico  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  con el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\mathfrak{F}_t \subset \mathfrak{F}$ ;

b) un proceso de Wiener  $m$ -dimensional  $w(t) = (w^1(t), \dots, w^m(t))$  concordado con el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ ;

c) una medida de Poisson  $v(dt, dx)$  definida en  $[0, T] \times R^m$  para la cual  $Mv(dt, dx) = dt \Pi(dx)$  y que no depende del proceso de Wiener  $w(t)$  y está concordada con el flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ ;

d) un vector aleatorio  $\mathfrak{F}$ -medible  $\xi_0 \in R^m$ ;

e) unas funciones  $a(t, x)$ ,  $\sigma(t, x)$  y  $c(t, x, y)$ ;  $t \in [0, T]$ ,  $x, y \in R^m$ , que toman los valores en  $R^m$ ,  $L(R^m)$  y  $R^m$ , respectivamente, donde  $L(R^m)$  es la totalidad de todos los operadores lineales que actúan de  $R^m$  en  $R^m$ ; se supone que todas estas funciones son medibles en totalidad de las variables.

Examinemos una ecuación diferencial estocástica del tipo

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t)) dt + \sigma(t, \xi(t)) dw(t) + \int_{R^m} c(t, \xi(t), y) \tilde{v}(dt, dy) \quad (5.1)$$

con la condición inicial

$$\xi(0) = \xi_0.$$

En la forma integral la ecuación (5.1) puede ser escrita así:

$$\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s, \xi(s)) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi(s)) dw(s) + \int_0^t \int_{R^l} c(s, \xi(s), y) \tilde{v}(ds, dy).$$

Aquí,  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , es el proceso buscado.

**Definición.** Se denomina solución de la ecuación (5.1) un proceso  $m$ -dimensional  $\xi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , subordinado al flujo de  $\sigma$ -álgebras  $\mathfrak{F}_t$ ,  $t \in [0, T]$ , tal que:



- 1) con la probabilidad 1 todas las coordenadas del proceso vectorial  $a(t, \xi(t))$  son absolutamente integrables en  $[0, T]$ ;  
 2) todos los elementos del proceso matricial  $\sigma(t, \xi(t))$  con la probabilidad 1 son de cuadrado integrable en  $[0, T]$ ;  
 3) con la probabilidad 1

$$\int_0^T \int_{R^m} |c(s, \xi(s), y)|^2 ds \Pi(dy) < \infty;$$

4) el proceso  $\xi(t)$  tiene la diferencial estocástica (5.1).

Enunciamos el teorema de existencia y unicidad de la solución de la ecuación (5.1).

**Teorema 1.** Supongamos que los coeficientes de la ecuación y la medida  $\Pi$  satisfacen las condiciones:

A) existe una constante  $K$  tal que para cualesquiera  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$  queda cumplida la desigualdad

$$|a(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 + \int_{R^m} |c(t, x, y)|^2 \Pi(dy) \leq K(1 + |x|^2),$$

donde  $|\sigma(t, x)|^2 = \sum_{j, h=1}^m (\sigma^{jh}(t, x))^2$ ;

B) para todo  $R > 0$  existe una constante  $C_R > 0$  tal que con  $|x| \leq R$ ,  $|y| \leq R$  y  $t \in [0, T]$  queda cumplida la desigualdad

$$|a(t, x) - a(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 + \int_{R^m} |c(t, x, z) - c(t, y, z)|^2 \Pi(dz) \leq C_R |x - y|^2.$$

En este caso, existe una única solución continua a la derecha de la ecuación (5.1) que no tiene discontinuidades de segunda especie y que satisface la condición inicial  $\xi(0) = \xi_0$ .

Señalemos que para  $c(t, x, y) \equiv 0$  este teorema se convierte en el teorema 1 del p. 19.3.

Luego, se puede mostrar que en las condiciones del teorema 1 la solución de la ecuación (5.2) posee la propiedad de Márkov, es decir, representa en sí una función aleatoria de Márkov. Su probabilidad de paso  $P(s, x, t, \Gamma)$  se determina por la fórmula

$$P(s, x, t, \Gamma) = P\{\xi_{sx}(t) \in \Gamma\}, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in R^m, \quad \Gamma \in \mathfrak{B}$$

donde  $\mathfrak{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra de los conjuntos borelianos en  $R^m$  y  $\xi_{sx}(t)$ ,  $t \in [s, T]$ , la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \xi_{sx}(t) = x + \int_s^t a(\tau, \xi_{sx}(\tau)) d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, \xi_{sx}(\tau)) dw(\tau) + \\ + \int_s^t \int_{R^m} c(\tau, \xi_{sx}(\tau), y) \tilde{v}(d\tau, dy). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Enunciemos, por fin, un teorema que muestra que con ciertas suposiciones adicionales sobre los coeficientes de la ecuación (5.1) la función

$$v(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T))$$

satisface cierta ecuación diferencial integral.

**Teorema 2.** Supongamos cumplidas las condiciones del teorema 1 y también las condiciones a seguir:

1) las funciones  $a^i(t, x)$ ,  $\sigma^{ij}(t, x)$  y  $c^i(t, x, y)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$ ,  $t \in [0, T]$  son dos veces continuamente derivables respecto de  $x$ ;

2) las derivadas parciales respecto de  $x$  de las funciones  $a^i(t, x)$  y  $\sigma^{ij}(t, x)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, m$  de primero y segundo órdenes son uniformemente acotadas;

3) existe una constante  $L > 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^m \int_{R^m} \left[ \sum_{h=1}^m \left( \frac{\partial c^i(t, x, y)}{\partial x^h} \right)^2 + \sum_{h=1}^m \left( \frac{\partial c^i(t, x, y)}{\partial x^h} \right)^4 + \sum_{i, j=1}^m \left( \frac{\partial^2 c^i(t, x, y)}{\partial x^j \partial x^h} \right)^2 \right] \Pi(dy) \leq L;$$

4) la función  $f(x)$  es dos veces continuamente derivable respecto de  $x$  y es acotada junto con sus derivadas parciales de primero y segundo órdenes.

En este caso la función

$$v(s, x) = Mf(\xi_{sx}(T)), \quad 0 \leq s \leq T, \quad x \in R^m,$$

donde  $\xi_{sx}(t)$ , que es la solución de la ecuación (5.2) en el segmento  $[s, T]$ , es también la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(s, x)}{\partial s} + \sum_{h=1}^m a^h(s, x) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x^h} + \frac{1}{2} \sum_{h, j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma^{hij}(s, x) \sigma^{jil}(s, x) \times \\ \times \frac{\partial^2 v(s, x)}{\partial x^h \partial x^j} + \int_{R^m} \left[ v(s, x + c(s, x, y)) - v(s, x) - \right. \\ \left. - \sum_{h=1}^m c^h(s, x, y) \frac{\partial v(s, x)}{\partial x^h} \right] \Pi(dy) = 0 \end{aligned}$$

en el dominio  $s \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ , con la condición inicial

$$\lim_{s \uparrow T} v(s, x) = f(x).$$

# 3

parte

## Capítulo 20

### VERIFICACIÓN DE LAS HIPÓTESIS ESTADÍSTICAS

#### 20.1. Nociones fundamentales y problemas de la estadística matemática

**20.1.1. Espacio muestral.** La teoría de las probabilidades propone, para resolver diferentes problemas, métodos que exigen el conocimiento de diversas características probabilísticas. Al resolver problemas prácticos estas características no pueden ser conocidas a priori. La estadística matemática nos enseña cómo se determinan las características probabilísticas a base de datos empíricos.

Uno de los más importantes problemas está relacionado con la determinación de la distribución de la magnitud aleatoria según las observaciones de ésta. A este problema general se reducen muchos particulares, tales como la determinación de la probabilidad de uno o varios sucesos, la distribución conjunta de algunas variables, etc.

Considerando la definición de la función de distribución como un problema de estadística matemática hay que tener en cuenta que este término necesita definición. Según entendemos la definición estadística obtendremos distintos problemas de estadística matemática.

La sucesión de observaciones independientes de la magnitud aleatoria es el material de partida para resolver problemas de estadística matemática. Con otras palabras, suponemos que existe un experimento probabilístico cuando se observa la magnitud aleatoria, y tienen lugar  $n$  realizaciones independientes de este experimento. Los valores de la magnitud aleatoria que observamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se llama muestra aleatoria; el número de observaciones, volumen de la muestra. El conjunto de todos los vectores  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  que pueden observarse durante  $n$  realizaciones del experimento, forman el espacio muestral. Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades la muestra  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas. El problema de estadística surge si la función general de distribución de las magnitudes  $x_i$  no es conocida.

El surgimiento de distintos problemas estadísticos (los principales están formulados más abajo) depende de cuál es la clase de posibles funciones de distribución y qué se necesita conocer acerca de la función de distribución

**20.1.2. Verificación de una hipótesis simple.** La función desconocida de distribución  $F$  pertenece a cierta clase de distribuciones  $\mathfrak{F}$ . De las consideraciones apriorísticas se puede deducir que  $F = F_0 \in \mathfrak{F}$ . A base de las observaciones hechas se necesita confirmar o rechazar esta hipótesis. Por ejemplo,  $\mathfrak{F}$  es un conjunto de distribuciones normales,  $F_0$ , una distribución normal con media 0 y varianza 1.

**20.1.3. Verificación de una hipótesis compuesta.** La función desconocida de distribución  $F$  pertenece a  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ . Hay que verificar la hipótesis:  $F \in \mathfrak{F}_0$ . Por ejemplo, la verificación de la hipótesis de que la magnitud con distribución normal tiene media 0. En este caso  $\mathfrak{F}$  coincide con la clase de todas las distribuciones normales y  $\mathfrak{F}_0$ , con la clase de distribuciones normales con media 0.

La verificación de las hipótesis simple y compuesta se reduce a la verificación de la hipótesis estadística, para resolverla se utiliza el criterio de aceptación. Este criterio se define por la fijación del dominio crítico  $G$  en el espacio muestral. Si la muestra se halla dentro del dominio crítico, la hipótesis se rechaza. La calidad del criterio se determina por la probabilidad de rechazar la hipótesis verdadera. Cuanto menor es esta probabilidad tanto mejor es este criterio. Por otro lado el criterio se caracteriza por las probabilidades de no rechazar (aceptar) la hipótesis falsa (esta probabilidad depende, naturalmente, de cuál es la distribución real). También es conveniente hacer estas probabilidades lo más pequeñas posible.

**20.1.4. Estimación del parámetro de distribución.** Se supone que la función desconocida de distribución pertenece a alguna familia de distribuciones  $F(\theta, x)$  que depende de cierto parámetro  $\theta \in \Theta$  donde  $\Theta$  es el conjunto en una recta o en un espacio euclídeo de dimensión finita. Esto significa que la distribución depende de uno o varios parámetros reales. Así, por ejemplo, la familia de distribuciones normales en la recta depende de dos parámetros reales: del valor medio y de la varianza. Se necesita estimar el parámetro (o varios parámetros reales) a partir de las observaciones. Para construir estimaciones se utilizan las estadísticas, funciones de los valores muestrales. Ejemplos de estadísticas son:

media muestral

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k;$$

varianza muestral

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2$$

(aquí  $x_1, \dots, x_n$  es una muestra de volumen  $n$ ). A título de estimación del parámetro real  $\theta$  se utiliza cierta estadística  $\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que se considera como valor aproximado del parámetro desconocido. La calidad de la estimación se determina por la distribución de la magnitud

$$\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta$$

(es evidente que esta distribución depende del valor del parámetro buscado). La estimación será buena si esta distribución está bastante

concentrada cerca del cero. En la práctica suelen limitarse sólo con los dos primeros momentos de estimación. En este caso la estimación se caracteriza por el desplazamiento

$$M_0 \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta$$

y la varianza

$$M_0 [\hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) - M_0 \hat{\theta}_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]^2$$

( $M_0$  es la esperanza matemática suponiendo que la distribución real coincide con  $F(\theta, x)$ ). Las estimaciones para las cuales el desplazamiento es igual a cero se llaman insesgadas. La calidad de las estimaciones insesgadas se determina por el valor de la varianza: cuanto menor es ésta, tanto mejor es la estimación.

**20.1.5. Estimación confidencial de los parámetros.** El planteamiento del problema es el mismo que en el punto antecedente. Sin embargo, en vez de la estimación del parámetro se construye el dominio confidencial para el parámetro, o sea, un dominio  $S$  en  $\Theta$  tal para el cual la probabilidad de que  $S$  contenga el valor real del parámetro no sea menor que  $1 - \alpha$  (este número, que se llama nivel de confianza, debe ser bastante próximo a 1). El dominio confidencial se construye respecto de los valores muestrales. Está dado por una función determinada en el espacio muestral cuyos valores son dominios en  $\Theta$ . Para estimar uno de los parámetros reales se utilizan intervalos confidenciales dados por dos estadísticas que determinan los extremos del intervalo. Sea  $S(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Theta$  un dominio confidencial. La calidad del dominio confidencial se caracteriza por el nivel de confianza, así como por la forma y dimensiones del dominio.

**20.1.6. Problemas generales de soluciones estadísticas.** Como regla la definición de la función de distribución del parámetro desconocido, la aceptación de una u otra hipótesis es parte integrante de cierto problema más general que consiste en tomar alguna solución. Por ejemplo, la aceptación de cierta hipótesis puede ser tal solución. Otro ejemplo más complejo: al seleccionar un nuevo tipo de cultivo es preciso, en cada etapa del experimento, aceptar determinada solución referente a cómo realizar la selección de las semillas y después, tomar la solución definitiva de que el cultivo satisface las exigencias necesarias. La base para aceptar una u otra solución es el material estadístico en observación (en el ejemplo citado, los datos acerca de unas u otras propiedades de las semillas obtenidas en las parcelas experimentales). Cada problema de este tipo tiene un conjunto de posibles soluciones  $D$ . La regla para aceptar la solución se da por la función  $d(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en el espacio muestral, la cual toma valores de  $D$  y se llama función resolutive. Se supone que las distribuciones probables de la muestra pertenecen a cierto conjunto de distribuciones  $\mathcal{P}$ . Con el fin de estimar la calidad de la regla para tomar la solución se utiliza cierta función de pérdida  $W(d, P)$  que determina nuestra pérdida después de tomar la solución  $d$  si la distribución real de la muestra es  $P \in \mathcal{P}$  (la pérdida puede ser negativa). Es natural buscar tales reglas para las cuales la pérdida media es la mínima.

**20.1.7. Análisis sucesivo.** Entre las reglas para tomar soluciones juegan un papel muy importante las reglas de sucesión. En tal caso, es conveniente considerar un espacio muestral de dimensión infinita, ya que al resolver se utilizan muestras de volumen tan grande como se

quiere. La regla de sucesión indica para qué  $n$ , según la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , se debe cesar la observación y qué solución se toma en este caso. Así, pues, durante la sucesiva distinción de dos hipótesis las magnitudes  $x_1, x_2, \dots$  se observan sucesivamente y para cada  $n = 1, 2, \dots$  se adopta una de las soluciones:  $d_1$  significa que se acepta la primera hipótesis;  $d_2$ , la segunda;  $d_3$ , es necesario realizar una observación más (es decir, añadir a la muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  la observación  $x_{n+1}$ ).

La regla de sucesión para tomar soluciones puede ser descrita por dos sucesiones de funciones. Sea  $e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ , si las observaciones cesan en el  $n$ -ésimo paso, y  $e_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  en el caso contrario;  $d_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la solución que debe tomar en el  $n$ -ésimo paso; ésta es la función que se determina en el subconjunto del espacio muestral donde  $e_n = 1$  y que toma valores de  $D$ . Entre las reglas se escoge la que minimiza alguna pérdida, tomando en consideración el número de observaciones necesarias según la regla.

**20.1.8. Estadística de sucesos aleatorios.** Para los procesos aleatorios se resuelvan los mismos problemas que para las observaciones independientes: verificación de las hipótesis y estimación de los parámetros de las distribuciones. La particularidad de los problemas estadísticos de los procesos aleatorios consiste en que suele observarse una sola trayectoria del proceso aleatorio y a base de esta observación se toman las soluciones estadísticas. De este modo, la estadística de los procesos aleatorios es la de una observación (independiente). Sin embargo, éstas son observaciones no de una magnitud aleatoria sino de un número infinito de ellas (de valores del proceso en distintos momentos de tiempo) enlazadas entre sí. Por eso la estadística de los procesos aleatorios se puede caracterizar como la estadística de observaciones enlazadas. Señalemos algunas propiedades de la estadística de los procesos aleatorios. Primero, los parámetros de los cuales dependen las distribuciones son frecuentemente de dimensión infinita (así, la familia de distribuciones de los procesos gaussianos depende de dos parámetros funcionales: del valor medio y de la función de correlación). Segundo, a pesar de que tenemos sólo una observación se puede de una manera cierta escoger una de las hipótesis o determinar con absoluta exactitud el valor del parámetro. En los problemas clásicos para las distribuciones regulares no hay tal efecto.

Ya que, en general, las distribuciones de los procesos aleatorios no pueden ser dadas de modo efectivo, no siempre es posible resolver problemas estadísticos de una manera constructiva utilizando todas las distribuciones de dimensión finita. En los casos elementales sólo se emplean funciones de momentos hasta cierto orden. Adquirió un desarrollo muy amplio la siguiente tendencia.

**20.1.9. Métodos lineales en la estadística matemática.** Estos métodos reúnen problemas estadísticos en los cuales se utilizan funciones de momentos de los dos primeros órdenes. Estos problemas, como regla, se refieren a la estimación de parámetros de los cuales depende el valor medio o la función de correlación del proceso. En este caso, se emplean sólo estadísticas lineales y cuadráticas, es decir, funcionales lineales y cuadráticas, según la trayectoria en observación del proceso. Los métodos lineales son, de hecho, la aplicación de la teoría de los espacios de Hilbert en los problemas de la estadística matemática.

## 20.2. Procedimientos de verificación de las hipótesis

20.2.1. Esquema general de la construcción de criterios estadísticos (no randomizados). Uno de los problemas fundamentales de la estadística matemática es la construcción y estudio de las propiedades de los procedimientos estadísticos de verificación de las hipótesis según los resultados dados de las observaciones.

En la estadística matemática la hipótesis estadística afirma: el parámetro desconocido  $\theta$  de la distribución iulcal de probabilidades  $P_\theta$  pertenece al subconjunto dado  $H \subset \Theta$  del conjunto de los valores probables del parámetro  $\theta$ . El subconjunto complementario  $K = \Theta \setminus H$  se llama **alternativa de la hipótesis  $H$** .

**EJEMPLO.** Se observa un suceso aleatorio, la probabilidad  $p$  de su comienzo es desconocida. Como hipótesis estadística se considera la suposición de que  $p \leq p_0$  ( $0 < p_0 < 1$ ).

La hipótesis  $H$  se llama **simple** si el conjunto  $H$  consta de un solo valor del parámetro  $\theta$ ; en el caso contrario,  $H$  es una hipótesis **compuesta**.

La aplicación práctica de la estadística matemática consiste en que se verifica la correspondencia real de los resultados reales de los experimentos a la hipótesis supuesta. Con este fin se construye el **procedimiento de verificación de la hipótesis (criterio de aceptación)** que permite, a base de las observaciones, aceptar o rechazar la hipótesis dada.

El espacio muestral  $X$  se parte en dos subconjuntos disjuntos:  $X_0$  y  $X_1$ . La regla de verificación de la hipótesis se formula así. Si los resultados de las observaciones son  $x \in X_0$  se considera que la hipótesis dada  $H$  se confirma por los datos empíricos, o sea, la hipótesis  $H$  se admite. Si el valor muestral es  $x \in X_1$  se afirma que la hipótesis dada  $H$  no concuerda con los resultados de las observaciones, o sea,  $H$  se rechaza. El conjunto  $X_0$  se llama **dominio de aceptación de la hipótesis**; el conjunto  $X_1$  se llama **dominio crítico**. Por abreviar, el conjunto  $X_1$  a veces se llama **criterio de la hipótesis  $H$** . Ya que el suceso  $x \in X_1$  es aleatorio la hipótesis dada se admite o se rechaza después de observar el suceso aleatorio que tiene cierta probabilidad  $P_\theta\{x \in X_1\}$  para cada  $\theta$  prefijado. La aplicación del procedimiento de verificación de la hipótesis entraña errores de dos géneros: **rechazar la hipótesis cuando es verdadera (error de primer género)**; **aceptar la hipótesis cuando es falsa (error de segundo género)**.

Al construir los procedimientos de verificación de las hipótesis es deseable procurar obtener los valores mínimos de los errores de ambos géneros. En la mayoría de los situaciones prácticamente importantes es imposible construir criterios de aceptación con errores de primero y segundo géneros, cuan se quiera pequeños. Las reglas de verificación de las hipótesis tienen sentido estadístico, es decir, al aplicar múltiplemente una regla determinada el por ciento del número de soluciones falsas se expresa por las probabilidades de errores de primero y segundo géneros.

Si los datos experimentales no concuerdan con la hipótesis dada según el criterio escogido, esto significa que los datos muestrales  $x \in X_1$ . Entonces, con la probabilidad de error de primer género, se observa un suceso aleatorio que contradice la hipótesis. Si la probabilidad de este suceso aleatorio es pequeña esto significa que se observa

prácticamente un suceso imposible. En este caso, la hipótesis dada debe ser rechazada con certeza práctica.

Cuando los datos experimentales concuerdan con la hipótesis supuesta esto no significa que es imposible concordar estos datos con otra hipótesis. Al aplicar criterios estadísticos a base de las observaciones es imposible demostrar una u otra hipótesis. Sólo se puede afirmar que los resultados de las observaciones no contradicen la hipótesis aceptada.

De este modo, las deducciones adoptadas a base de los datos estadísticos se formulan así: *los datos experimentales concuerdan con la hipótesis dada (o le contradicen).*

**20.2.2. Función de la potencia de un criterio.** La probabilidad de error de primer género  $\beta(\theta) = P_{\theta}(X_1)$  considerada como función del parámetro  $\theta \in \Theta$  se llama **función de la potencia de un criterio**:

El valor máximo admisible  $\alpha$  del error de primer género para el criterio dado se denomina **nivel de significación del criterio**.

$$\sup_{\theta \in H} P_{\theta}(X_1) \leq \alpha.$$

Si para el criterio se cumple la condición  $P_{\theta}(X_1) = \alpha$  cuando  $\theta \in H$ , el dominio crítico  $X_1$  se llama **semejante al espacio muestral**.

Generalmente el nivel de significación  $\alpha$  se elige a base de razonamientos prácticos según se trata la hipótesis. Si la hipótesis supuesta es muy verosímil, el nivel de significación se elige bastante pequeño. En este caso, la hipótesis se rechazará con menor probabilidad. Al elegir el nivel de significación es conveniente tomar en consideración el comportamiento de la función de potencia del criterio  $\beta(\theta) = P_{\theta}(X_1)$  para los valores alternativos del parámetro  $\theta \in K$ . La propiedad deseable del criterio es su carácter insesgado que se determina por las condiciones

$$\begin{aligned} P_{\theta}(X_1) &\leq \alpha && \text{para } \theta \in H; \\ P_{\theta}(X_1) &> \alpha && \text{para } \theta \in K. \end{aligned}$$

Puede resultar que para el nivel dado de significación la potencia del criterio  $\beta(\theta)$  es muy pequeña si  $\theta \in K$ , o sea, es grande el error de segundo género del criterio de la hipótesis falsa.

Es natural considerar óptimo el criterio que logra para el nivel dado de significación el valor máximo de la función de potencia del criterio (problema de Neumann — Pearson).

Como regla, el criterio, que es óptimo para el valor dado del parámetro  $\theta \in K$ , depende de éste.

El criterio  $X_1^*$  se llama **uniformemente más potente (U.M.P.)** si para cualquier otro criterio  $X_1$  se cumplen las condiciones:

$$\begin{aligned} P_{\theta}(X_1^*) &\leq P_{\theta}(X_1) && \text{para } \theta \in H; \\ P_{\theta}(X_1^*) &\geq P_{\theta}(X_1) && \text{para } \theta \in K. \end{aligned}$$

El **criterio randomizado** se determina por la función crítica  $\varphi(x)$  en el espacio muestral  $X$  cuyo valor es la probabilidad de rechazo de la hipótesis  $H$  para el valor dado de  $x$  de dos resultados de las observaciones. La potencia del criterio randomizado con la fun-



ción crítica  $\varphi(x)$  se determina por la correlación

$$\beta(\theta) = M_{\theta} \varphi(x) = \int_X \varphi(x) P_{\theta}(dx).$$

En particular, cuando  $\varphi(x) = 1$  para  $x \in X_1$  y  $\varphi(x) = 0$  para  $x \in X \setminus X_1$ , es decir, cuando la función crítica es función característica del conjunto  $X_1$ , el criterio determinado por la función  $\varphi$  resulta ser no randomizado con el dominio crítico  $X_1$ .

Cuando la muestra es simple y aleatoria los datos estadísticos son los resultados de las observaciones de los valores de la magnitud aleatoria  $\xi$  en la sucesión de experimentos independientes. En este caso, el espacio muestral  $X$  es un espacio euclídeo  $n$ -dimensional:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , donde  $x_k$  ( $k = \overline{1, n}$ ) son magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas. El número  $n$  de elementos de la sucesión muestral se llama volumen de la muestra.

El criterio de aceptación con el dominio crítico  $X_1$  se llama conciliable, si tenemos la correlación

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{\theta}(X_1) = 1 \quad \text{para } \theta \in K.$$

La conciliabilidad del criterio significa que el error de segundo género —la probabilidad de aceptación de la hipótesis falsa— tiende a cero para  $n \rightarrow \infty$ .

Para comparar distintos criterios entre sí se utilizan las medidas de eficiencia asintótica de los criterios, que se basan en el análisis de la velocidad de convergencia de la función de potencia en el entorno del parámetro  $\theta \in H$ .

### 20.3. Criterios de verificación de las hipótesis estadísticas

**20.3.1. Criterio de Neumann—Pearson.** Para la hipótesis simple  $H_0$  a la cual le corresponde la distribución  $P_0(x)$ , en comparación con la alternativa simple  $K$  a la cual corresponde la distribución  $P_1(x)$ , la función crítica  $\varphi(x)$  del criterio óptimo de Neumann—Pearson para el nivel dado de significación  $\alpha$  se determina por las condiciones:

$$\int_X \varphi(x) p_0(x) dx = \alpha;$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & p_1(x) \geq C_{\alpha} p_0(x); \\ 0, & p_1(x) < C_{\alpha} p_0(x), \end{cases}$$

donde  $p_0(x)$  y  $p_1(x)$  son las densidades de las distribuciones  $P_0$  y  $P_1$ , a partir de la medida inicial  $\nu$ . El criterio de Neumann—Pearson es el criterio uniformemente más potente del nivel  $\alpha$ .

La aplicación práctica del criterio de Neumann—Pearson consiste en comprobar la desigualdad  $p_1(x) \geq C_{\alpha} p_0(x)$  para los resultados dados de las observaciones  $x$ . Si se cumple esta desigualdad la hipótesis  $H_0$  se rechaza; en el caso contrario la hipótesis  $H_0$  se acepta.

La constante  $C_{\alpha}$  en el criterio de Neumann—Pearson se determina por la cuantila de distribución de la magnitud aleatoria

$T(\xi) = \frac{P_1(\xi)}{P_0(\xi)}$  para la hipótesis  $H$  ( $\xi$  tiene la distribución  $P_0$ ):

$$P_0(T(\xi) \geq C_\alpha) = \alpha.$$

Si las probabilidades  $P_0(T(\xi) \geq C_\alpha)$  no dependen de los valores alternativos del parámetro  $\theta$ , el criterio de Neumann—Pearson de verificación de la hipótesis simple  $H_0$  es uniformemente más potente con respecto a todas las alternativas.

Los criterios basados en la utilización de la distribución de estadísticas  $T(\xi) = \frac{P_1(\xi)}{P_0(\xi)}$  se llaman **criterios de la relación de verosimilitud**. Tienen muchas propiedades útiles (véase [37]).

**EJEMPLO 1.** Sean  $P(x; a, \sigma)$  las densidades normales de distribución con valores medios  $a$  y varianzas  $\sigma^2$ . Consideremos la hipótesis simple  $H_0: a = a_0$  para el valor conocido del parámetro  $\sigma$  en comparación con la clase de alternativas  $k: a > a_0$  con el mismo valor del parámetro  $\sigma$ . En la elección aleatoria simple  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un vector  $n$ -dimensional de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En este caso, el criterio de Neumann—Pearson se determina por la desigualdad

$$\exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a)^2}{2\sigma^2} \right\} \geq I_\alpha \exp \left\{ - \sum_{k=1}^n \frac{(x_k - a_0)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Después de la determinación por logaritmos esta desigualdad se reduce a la forma siguiente:

$$(a - a_0) \sum_{k=1}^n x_k \geq I_\alpha.$$

Para las clases de alternativas  $a > a_0$  el dominio crítico se da por la desigualdad

$$\sum_{k=1}^n x_k \geq C_\alpha,$$

donde la constante  $C_\alpha$  se determina de la condición

$$P_0 \left( \sum_{k=1}^n x_k \geq C_\alpha \right) = \alpha.$$

El criterio  $\sum_{k=1}^n x_k \geq C_\alpha$  de la hipótesis simple  $H: a = a_0$  es uniformemente más potente para la clase de alternativas  $a > a_0$ . Análogamente, para la clase de alternativas  $a < a_0$  el criterio uniformemente más potente de la hipótesis simple  $H_0: a = a_0$  se determina por la desigualdad  $\sum_{k=1}^n x_k \leq C_\alpha$ .

Si el conjunto de los valores alternativos del parámetro  $a$  contiene puntos tanto a la izquierda como a la derecha de  $a_0$ , el criterio uniformemente más potente no existe.

**EJEMPLO 2.** Para la hipótesis simple  $H_0 : a = a_0$ , cuando el valor del parámetro  $\sigma$  es desconocido, en comparación con la alternativa  $K : a > a_0$  el criterio de Neumann—Pearson se determina por el dominio crítico

$$\frac{\bar{x} - a_0}{s} \geq C_\alpha; \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k; \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

**EJEMPLO 3.** Para la hipótesis simple  $H_0 : \sigma = \sigma_0$  en comparación con la alternativa  $K : \sigma < \sigma_0$  el criterio uniformemente más potente se determina por la correlación  $s^2 \geq C_\alpha$ .

**20.3.2.** Los criterios de la relación de verosimilitud se construyen empleando las propiedades de la función de la relación de verosimilitud  $l(x) = \frac{P_\theta(x)}{P_{\theta_0}(x)}$ .

Resulta natural la elección del dominio crítico de tal manera que con  $x \in X_1$  la relación de verosimilitud adquiera los valores máximos posibles para todos los valores alternativos del parámetro  $\theta \in K$ .

El criterio de la relación de verosimilitud para la hipótesis simple  $H_\theta : \theta = \theta_0$  con respecto a la alternativa compuesta  $\theta \in K$  se determina por la estadística

$$l(x) = \frac{\sup_{\theta \in K} P_\theta(x)}{P_{\theta_0}(x)}.$$

El dominio crítico tiene el aspecto de  $X_1 = \{x : l(x) \geq C_\alpha\}$ , donde la constante  $C_\alpha$  se determina por la condición:  $P_{\theta_0}(X_1) = \alpha$ . Por ejemplo, para la muestra  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de la población normal  $P(x; a, \sigma)$  con parámetros desconocidos  $a$  y  $\sigma$  el criterio de la relación de verosimilitud para la hipótesis  $H_0 : a = a_0$  se determina por la estadística

$$l(x) = \left(1 + \frac{t^2(x)}{n-1}\right)^{-n/2},$$

donde  $t(x) = \sqrt{n}(\bar{x} - a_0)/s$  tiene distribución de Student con  $n-1$

grados de libertad. (Aquí  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ ,  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ ).

El criterio de la relación de verosimilitud de la hipótesis compuesta  $\theta \in H$  con respecto a la alternativa compuesta  $\theta \in K$  se determina por la estadística

$$l(x) = \frac{\sup_{\theta \in K} P_\theta(x)}{\sup_{\theta_0 \in H} P_{\theta_0}(x)}.$$

**20.3.3. Criterio  $\chi^2$ .** Para verificar la hipótesis simple  $H_\theta$ , a la cual corresponde la distribución discreta  $(p_1, p_2, \dots, p_m)$ ,  $\sum_{k=1}^m p_k =$

= 1 se emplea la estadística

$$\chi^2 = \sum_{h=1}^m \frac{(v_h - np_h)^2}{np_h}$$

donde  $v_1, v_2, \dots, v_n$  son las frecuencias de los resultados de las observaciones en la muestra de volumen  $n = \sum_{h=1}^m v_h$ . Para  $n \rightarrow \infty$  la distribución de la estadística  $\chi^2$  tiende a la distribución  $\chi^2$  con  $m$  grados de libertad y densidad de probabilidad

$$K_{m-1}(x) = \frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} x^{\frac{m-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

La distribución límite no depende del tipo de la distribución discreta inicial. El criterio  $\chi^2$  se define del modo siguiente. Sea  $\chi^2_\alpha$  la cuantila de la distribución límite  $\chi^2: \alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha)$ . Entonces el dominio crítico del criterio  $\chi^2$  se determina por la desigualdad para la estadística  $\chi^2: \chi^2 > \chi^2_\alpha$ .

El criterio  $\chi^2$  se emplea también para verificar una hipótesis simple referente a la distribución inicial cuando se agrupan los valores de la magnitud aleatoria  $\xi$  que se observa. En este caso,  $p_h = P\{\xi \in X_h\}$  donde  $X_h$  son grupos en los cuales está partido el conjunto de los valores probables de la magnitud aleatoria  $\xi$ . En la práctica el criterio  $\chi^2$  es bastante efectivo cuando todas las frecuencias esperadas  $np_h \geq 10$ .

**EJEMPLO 4.** En la sucesión de los experimentos independientes se observa un suceso aleatorio cuya probabilidad  $p$  ( $0 < p < 1$ ) es desconocida. Sea  $v_n$  la frecuencia de las observaciones del suceso en la muestra de volumen  $n$ . Entonces, para  $n$  grandes la estadística  $\chi^2 = \frac{(v - np)^2}{np(1-p)}$  está distribuida aproximadamente con una densidad

$$K_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0.$$

Las tablas existentes de cuantilas de la distribución  $\chi^2$  (véase [37]) dan la posibilidad de verificar la hipótesis acerca de que en la serie dada de observaciones la probabilidad del suceso aleatorio es igual al número dado  $p$ .

El criterio  $\chi^2$  se emplea también cuando tenemos varias series independientes de observaciones.

**EJEMPLO 5.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_m$  las frecuencias de las observaciones en las muestras de volumen  $n_1, n_2, \dots, n_m$  del suceso aleatorio cuya probabilidad se supone igual a  $p$ .

Para verificar la hipótesis supuesta se puede utilizar la estadística  $\chi^2 = \sum_{h=1}^m \frac{(v_h - d_h p)^2}{n_h p(1-p)}$  cuya distribución para grandes

$n = \sum_{h=1}^m n_h$  es próxima a la distribución  $\chi^2$  con  $m$  grados de libertad.

Si la distribución inicial depende de los parámetros desconocidos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$ , entonces, a título de criterio de aceptación, se emplea la estadística

$$\hat{\chi}^2 = \sum_{h=1}^m \frac{[v_h - n p_h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)]^2}{n p_h(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r)},$$

en la cual  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r$  son estimaciones de los parámetros desconocidos construidos según los resultados de las observaciones. A condiciones determinadas la estadística  $\hat{\chi}^2$  en límite para  $n \rightarrow \infty$  tiene la distribución  $\chi^2$  con  $m - r - 1$  grados de libertad.

**EJEMPLO 6.** Valiéndonos del ejemplo 5, utilicemos la estimación de la probabilidad desconocida  $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^m v_h$ .

La estadística  $\chi^2 = \sum_{h=1}^m \frac{(v_h - n_h \hat{p})^2}{n_h \hat{p} (1 - \hat{p})}$  con  $m - 1$  grados de libertad

se utiliza para verificar la hipótesis de la homogeneidad de las muestras: la suposición de que en todas las  $m$  series de las observaciones independientes la probabilidad del suceso en observación queda invariable.

**20.3.4. Criterios no paramétricos.** Uno de los principales problemas estadísticos no paramétricos es el problema de verificación de la concordancia de los datos muestrales con la hipótesis de que la función inicial de distribución  $F(x)$  está prefijada y no contiene parámetros desconocidos. Si la función inicial de distribución  $F(x)$  es continua, entonces, a título de criterio no paramétrico, se emplea la estadística de Kolmogórov

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)|,$$

cuya distribución no depende del aspecto de  $F(x)$  y para la cual es conocida la distribución límite (véase el punto 20.4).

El dominio crítico del criterio para el nivel de significación dado se determina por la desigualdad

$$\sqrt{n} D_n > d_\alpha,$$

donde  $d_\alpha$  es la cuantila de la distribución límite de Kolmogórov:  $1 - K(d_\alpha) = \alpha$ .

El problema de verificación de la homogeneidad de los datos estadísticos se plantea del modo siguiente. A partir de dos series de observaciones independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  hay que verificar la hipótesis referente a que los resultados de las observaciones en ambas series fueron obtenidos como resultado de los experimentos con magnitudes aleatorias con la misma función de distribución  $F(x)$ . Si la función inicial de distribución  $F(x)$  es continua, entonces,

a título del criterio de homogeneidad de los datos muestrales, se emplea la estadística de Smirnov cuya distribución no depende del aspecto de la función  $F(x)$ :

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} = \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \max_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F_m(x)|,$$

donde  $F_n(x)$  y  $F_m(x)$  son funciones empíricas de distribución de la primera y la segunda series de observaciones, respectivamente. El dominio crítico del criterio de homogeneidad se determina por la desigualdad

$$\sqrt{\frac{nm}{n+m}} D_{nm} \geq d_\alpha,$$

donde  $d_\alpha$  es la cuantila de distribución de la estadística de Smirnov para  $n$  y  $m$  pequeñas, en tanto que si  $n$  y  $m$  son grandes,  $d_\alpha$  es la cuantila de la distribución límite de la estadística de Smirnov:  $1 - K(d_\alpha) = \alpha$ . En caso particular, cuando los volúmenes de las muestras son iguales ( $n = m$ ) la distribución exacta de la estadística de Smirnov tiene una expresión analítica bastante simple.

Los criterios no paramétricos de orden se construyen a base de las estadísticas de la serie variacional, las cuales no dependen de los valores concretos de los términos de la serie variacional.

El criterio de las series de Wald-Wolfowitz está basado en la estadística  $U_{nm}$ , es decir, en el número de series de los valores observados de la primera y la segunda muestras en la serie variacional general  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n+m}$ , donde cada  $x_h$  es  $x_{1h}$  o  $y_{1h}$ .

La distribución de la estadística  $U_{nm}$  no depende del aspecto de  $F(x)$  de la distribución inicial

$$U_{nm} = \sum_{h=1}^{n+m} v_h,$$

donde las magnitudes aleatorias  $v_h$  son independientes y toman valores 1 ó 0 con probabilidades iguales a 1/2. Si  $n$  y  $m$  son grandes la distribución de la estadística  $U_{nm}$  es asintóticamente normal con media  $\frac{nm}{2}$  y variancia  $\frac{nm}{2}(n+m+1)$ . Para  $m$

fijado y  $n \rightarrow \infty$  la estadística  $\frac{1}{n} U_{nm}$  en límite está distribuida como

$U_m = \sum_{t=1}^m W_t$ , donde  $W_t$  son independientes, uniformemente distribuidas en el intervalo (0, 1).

Hay otros criterios no paramétricos (véase [37]).

**20.3.5. Criterio sucesivo de la relación de verosimilitud.** En la práctica los experimentos se realizan sucesivamente. En cada etapa hay posibilidad de decidir si es necesario continuar o cesar los experimentos. El volumen de la muestra durante el análisis estadístico sucesivo no se fija de antemano y es una magnitud aleatoria. Sean  $H_0$  y  $H_1$  dos hipótesis alternativas sobre el aspecto de la densidad de distribución  $p_0(x)$  o  $p_1(x)$  de la magnitud aleatoria en observación. El

criterio sucesivo de la relación de verosimilitud (de Wald) se construya según los resultados de las observaciones independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  de modo siguiente. Se prefijan dos constantes  $A$  y  $B$  que determinan la partición del espacio muestral según la relación de verosimilitud

$$\prod_{h=1}^n \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)}$$

para cada  $n$  en tres dominios:

$$X_1: \prod_{h=1}^n \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)} \geq B \text{ es el dominio de aceptación de la hipótesis } H_1;$$

$$X_0: \prod_{h=1}^n \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)} \leq A \text{ es el dominio de aceptación de la hipótesis } H_0;$$

$$X_{01}: A < \prod_{h=1}^n \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)} < B \text{ es el dominio de continuación de los experimentos.}$$

La calidad de criterio sucesivo de la relación de verosimilitud se determina por los errores de primer género  $\alpha = P_0(X_1)$  y de segundo género  $\beta = P_1(X_0)$ , así como por el número medio de observaciones  $M_{0v}$  y  $M_{1v}$ ; el número aleatorio de observaciones  $v$  se determina por las condiciones:

$$\prod_{h=1}^{v-1} \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)} \in (A, B), \quad \prod_{h=1}^v \frac{p_1(x_h)}{p_0(x_h)} \notin (A, B).$$

El criterio sucesivo de la relación de verosimilitud exige, por término medio, menor número de observaciones que el criterio con volumen fijo de la muestra con los mismos errores de primero y segundo géneros.

El criterio sucesivo se termina con probabilidad 1 tanto para la hipótesis  $H_0$ , como para la hipótesis  $H_1$ , es decir,  $P_0(v < \infty) = P_1(v < \infty) = 1$ .

La determinación exacta de las fronteras  $A$  y  $B$  y del volumen medio de la muestra  $M_{0v}$  en el criterio sucesivo está vinculada con grandes dificultades. Sin embargo, hay desigualdades útiles para las aplicaciones:

$$A \geq \frac{\beta}{1-\alpha}, \quad B \leq \frac{1-\beta}{\alpha};$$

$$M_{0v} \leq \frac{(1-\alpha) \log B + \alpha \log A}{M_{0z}};$$

$$M_{0v} \geq \frac{(1-\alpha) \log \frac{B}{1-\alpha} + \alpha \log \frac{1-\beta}{\alpha}}{M_{0z}}.$$

$$\text{Aquí } z = \log \frac{p_1(\xi)}{p_0(\xi)}.$$

## 20.4. Distribución de la muestra

20.4.1. **Serie variacional.** La muestra de volumen finito  $n$  es el material inicial para el análisis estadístico, obtenido como resultado de la elección aleatoria simple de una población madre, que se define por la magnitud aleatoria  $\xi$  con la función de distribución  $P(x)$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \quad (4.1)$$

es decir, una sucesión de magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , con la función general de distribución  $P(x)$ .

La sucesión de valores muestrales ordenada según las magnitudes

$$x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)} \quad (4.2)$$

se llama **serie variacional**. Los elementos de la muestra iguales entre sí se numeran en orden arbitrario.

Los términos de la serie variacional  $x_m^{(n)}$  ( $m = 1, 2, \dots, n$ ) se llaman **estadísticas de orden** (de rango). El número  $\lambda_m = \frac{m}{n}$  se llama **rango** del término  $x_m^{(n)}$ .

La estadística  $v_n(x)$  igual al número de valores de la muestra menores que  $x$

$$(v_n(x) = m) = \{x_m^{(n)} < x \leq x_{m-1}^{(n)}\}, \quad m = 0, 1, \dots, n \quad (4.3)$$

se llama **frecuencia empírica**. La magnitud aleatoria  $v_n(x)$  es igual al número de apariciones del suceso  $\{\xi < x\}$  en  $n$  experimentos independientes, así que la frecuencia empírica  $v_n(x)$  tiene distribución binomial con el parámetro  $p = P\{\xi < x\} = P(x)$ :

$$P(v_n(x) = m) = C_n^m P^m (1 - P(x))^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

La distribución de los términos de la serie variacional (estadísticas de orden) se determina simplemente según la distribución de la frecuencia empírica:

$$P(x_m^{(n)} < x) = P(v_n(x) \geq m) = \sum_{k=m}^n C_n^k P^k (1 - P(x))^{n-k}. \quad (4.5)$$

En particular, un aspecto muy simple lo tienen las distribuciones de los términos extremos de la serie variacional  $x_1^{(n)}$  y  $x_n^{(n)}$ :

$$\left. \begin{aligned} P(x_1^{(n)} < x) &= 1 - (1 - P(x))^n; \\ P(x_n^{(n)} < x) &= P^n(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Se puede representar la distribución de los términos de la serie variacional de otro modo más cómodo para el análisis:

$$P(x_m^{(n)} < x) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \int_0^{P(x)} y^{m-1} (1-y)^{n-m} dy. \quad (4.7)$$

La distribución (4.7) pertenece al tipo de distribuciones  $\beta$ .



Si la distribución inicial de la población madre  $P(x)$  tiene la densidad  $p(x) = \frac{dP}{dx}$ , entonces la distribución de las estadísticas de orden tiene la densidad en forma

$$\frac{d}{dx} P(x_m^{(n)} < x) = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} P^{m-1}(x) (1-P(x))^{n-m} p(x). \quad (4.8)$$

En los problemas del control estadístico de la calidad de la producción se emplea a menudo la estadística  $R_n = x_n^{(n)} - x_1^{(n)}$  que se llama recorrido de la muestra. La distribución del recorrido tiene el aspecto

$$P(x_n^{(n)} - x_1^{(n)} < t) = n \int_{-\infty}^{\infty} [P(x+t) - P(x)]^{n-1} dP(x). \quad (4.9)$$

Es difícil emplear las distribuciones exactas de las estadísticas de orden en el análisis estadístico, ya que dependen considerablemente de la distribución inicial. Es natural esperar que al crecer indefinidamente el volumen de la muestra  $n$  esta dependencia debe disminuir. La representación aproximada de las estadísticas de orden para  $n$  grandes se llama representación asintótica. La transformación de los términos de la serie variacional según la fórmula

$$z_m^{(n)} = nP(x_m^{(n)}) \quad (4.10)$$

da la densidad de la distribución  $g_m^{(n)}(z)$  de las magnitudes aleatorias  $z_m^{(n)}$  en la forma

$$g_m^{(n)}(z) = C_{n-1}^{m-1} \left(\frac{z}{n}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-m}. \quad (4.11)$$

Para  $z$  fijadas esta distribución de Bernoulli (según  $m$ ), si  $n \rightarrow \infty$ , se aproxima por la distribución de Poisson

$$g_m^{(n)}(z) \approx \frac{z^{m-1} e^{-z}}{(m-1)!}, \quad z > 0 \quad (4.12)$$

que según  $z$  es la densidad de la distribución gamma con parámetro  $m-1$ .

Análogamente la transformación de los términos extremos de la serie variacional según la fórmula  $z_{n-m}^{(n)} = n(1-P(x_{n-m}^{(n)}))$  nos ofrece la densidad de la distribución  $g_{n-m}^{(n)}(z)$  de las magnitudes aleatorias  $z_{n-m}^{(n)}$  en la forma

$$g_{n-m}^{(n)}(z) = C_{n-1}^m \left(\frac{z}{n}\right)^m \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-m-1}. \quad (4.13)$$

Para  $n \rightarrow \infty$  y  $m$  y  $z$  fijados  $g_{n-m}^{(n)}(z)$  se aproxima por la densidad de distribución gamma con parámetro  $m$ :

$$g_{n-m}^{(n)}(z) \approx \frac{z^m e^{-z}}{m!}, \quad z > 0. \quad (4.14)$$

Las distribuciones  $x_i^{(n)}$  y  $x_{n-m}^{(n)}$  se pueden emplear para hallar la representación asintótica de los términos extremos de la serie variacional para  $m$  fijados.

EJEMPLO 1. La distribución inicial  $P(x)$  es uniforme en el segmento  $[-a, a]$ . Entonces, para el término mínimo  $x_i^{(n)}$  y el término máximo  $x_n^{(n)}$  de la serie variacional existen las representaciones asintóticas

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(n)} &\simeq -a + \frac{2a}{n} z; \\ x_n^{(n)} &\simeq a - \frac{2a}{n} z, \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

donde  $z$  es una magnitud aleatoria con distribución gamma y parámetro  $m = 0$ , es decir, con densidad  $g(z) = e^{-z}$ ,  $z > 0$ .

EJEMPLO 2. La distribución  $P(x)$  tiene densidad de la forma  $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ . Entonces, los términos mínimo y máximo de la serie variacional tienen las representaciones asintóticas en la forma

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(n)} &\simeq v - \ln \frac{n}{2}; \\ x_n^{(n)} &\simeq -v + \ln \frac{n}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

donde  $v$  es una magnitud aleatoria con densidad de distribución  $g(v) = e^v - e^{-v}$ .

En el caso del rango finito, cuando  $m = [nq]$ , es decir, para  $m$  enteros que satisfacen las desigualdades  $0 < \frac{m}{n} \leq q < \frac{m+1}{n} \leq 1$ , la transformación de los términos de la serie variacional con rango finito  $x_q^{(n)} = P(x_{[nq]}^{(n)})$  nos da la densidad  $g_q(z)$  de la distribución  $x_q^{(n)}$  en la forma

$$g_q(z) = C_{n-1}^{m-1} z^{m-1} (1-z)^{n-m},$$

que en el entorno del punto  $z = q$  se aproxima por la densidad de distribución normal con parámetros  $(q, \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}})$ , donde  $q$  es el valor medio,  $\sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}$  es la desviación típica, lo que permite representar asintóticamente la magnitud aleatoria  $z$  para  $n \rightarrow \infty$  en la forma

$$x_q^{(n)} \simeq q + u \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}},$$

donde  $u$  tiene distribución normal con parámetros  $(0, 1)$ . En este caso, los términos medios de la serie variacional  $x_{[nq]}^{(n)}$  pueden ser representados asintóticamente en forma de

$$x_{[nq]}^{(n)} \simeq x_q + \frac{u}{p(x_q)} \sqrt{\frac{q(1-q)}{n}}$$

donde  $x_q$  es cuantila de orden  $q$  de la distribución  $P(x)$ , es decir,  $P(x_q) = q$ ,  $p(x)$  es la densidad de la distribución inicial.

**20.4.2. Función empírica de distribución.** Anteriormente fue deducida la frecuencia empírica  $v_n(x)$  igual al número de valores muestrales menores que  $x$  y que tiene una distribución binomial con parámetro  $P(x)$ .

Se llama función empírica de distribución la función  $\bar{P}_n(x)$  determinada por la relación

$$\bar{P}_n(x) = \frac{v_n(x)}{n}. \quad (4.17)$$

De otro modo, la función empírica de distribución se determina por la siguiente relación:

$$\bar{P}_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1^{(n)}, \\ \frac{m}{n}, & x_m^{(n)} < x \leq x_{m+1}^{(n)}, \\ 1, & x > x_n^{(n)}. \end{cases} \quad (4.18)$$

El gráfico de la función empírica de distribución es una línea escalonada con saltos múltiples a la magnitud  $1/n$  en los puntos determinados por los términos de la serie variacional  $x_1^{(n)} \leq x_2^{(n)} \leq \dots \leq x_n^{(n)}$ . La función empírica de distribución tiene todas las propiedades de la distribución de probabilidades. La función empírica de distribución se llama también distribución de la muestra.

Para  $x$  fijado la esperanza matemática  $\bar{P}_n(x)$  es igual a  $P(x)$ :  $M\bar{P}_n(x) = P(x)$ . Por consiguiente, según la ley de los grandes números cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada  $x$  la función empírica de distribución converge, con respecto a la probabilidad, a la distribución teórica inicial  $P(x)$ . Además, tiene lugar el

**Teorema de Glivenko.** La función empírica de distribución  $P_n(x)$  converge uniformemente según  $x$  con probabilidad 1, para  $n \rightarrow \infty$ , a la distribución teórica  $P(x)$ :

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n(x) - F(x)| = 0 \right\} = 1.$$

A título de la medida probable de la desviación de la función empírica de distribución  $\bar{P}_n(x)$  con respecto a la teórica  $P(x)$  para  $x$  fijado se puede hacer uso de que la diferencia  $\bar{P}_n(x) - P(x)$  es asintóticamente normal con media 0 y varianza  $\frac{P(x)(1-P(x))}{n}$  ( $x$ ). Pero esta medida de desviación no es uniforme según  $x$ . Un papel importante en la estadística matemática lo desempeñó el análisis de la estadística introducida por A. N. Kolmogórov:

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |P_n(x) - P(x)|.$$

**Teorema de Kolmogórov.** Si la función de distribución  $P(x)$  es continua, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{-\infty < x < +\infty} |\bar{P}_n(x) - P(x)| < z \right\} = K(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, \quad z > 0. \quad (4.19)$$

La función  $K(z)$  está tabulada [8]. La estadística  $D_n$  se emplea en el criterio no paramétrico de aceptación (véase el punto 20.3.4.) de los resultados empíricos con hipótesis sobre la distribución teórica inicial. Señalemos que la distribución de la estadística  $D_n$  no depende de la forma de la distribución continua inicial  $P(x)$ .

El cálculo práctico de la estadística  $D_n$  no cuesta mucho trabajo, ya que la desviación máxima de la función empírica de distribución con respecto a la función teórica continua de distribución se logra en los puntos de saltos  $\bar{P}_n(x)$ , así que

$$D_n = \max_{1 \leq m \leq n} \left\{ \left| \frac{m-1}{n} - P(x_m^{(n)}) \right|, \left| \frac{m}{n} - P(x_n^{(n)}) \right| \right\} \quad (4.20)$$

o de otro modo

$$D_n = \max_{1 \leq m \leq n} \left\{ \left[ \frac{2m-1}{2n} - P(x_m^{(n)}) \right] + \frac{1}{2n} \right\}. \quad (4.21)$$

En los criterios unilaterales de aceptación se puede emplear la distribución de las estadísticas de Smirnov:

$$D_n^+ = \sup_{-\infty < x < +\infty} [\bar{P}_n(x) - P(x)] \quad (4.22)$$

o

$$D_n^- = - \inf_{-\infty < x < +\infty} [\bar{P}_n(x) - P(x)]. \quad (4.22')$$

Estas estadísticas tienen distribuciones iguales:

$$P\{D_n^+ \geq x\} = P\{D_n^- \geq x\} = \sum_{k=0}^{[n(1-x)]} C_n^k x \left(x + \frac{k}{n}\right)^{k-1} \left(1 - x - \frac{k}{n}\right)^{n-k}, \quad 0 < x < 1. \quad (4.23)$$

**Teorema de Smirnov.** Si la distribución  $P(x)$  es continua, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\sqrt{n} D_n^+ < z\} = 1 - e^{-2z^2}, \quad z > 0. \quad (4.24)$$

Es conocida también la distribución límite conjunta de las estadísticas  $D_n^+$  y  $D_n^-$ .

**Teorema.** Si la distribución  $P(x)$  es continua, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} D_n^+ < z, \sqrt{\frac{n}{2}} D_n^- < v \right\} = \\ = 1 + 2 \sum_{h=1}^{\infty} e^{-2h^2(z+v)^2} - \sum_{h=1}^{\infty} [e^{-2(hv+(h-1)z)^2} + e^{-2((h-1)v+hz)^2}].$$

Hay también desarrollos asintóticos para las distribuciones de las estadísticas  $D_n$ ,  $D_n^+$  y  $D_n^-$ .

## 20.5. Distribución de las características muestrales

Se llaman muestrales (o empíricas) las características de la función empírica de distribución.

Las características muestrales son magnitudes aleatorias, funciones a partir de los valores muestrales, es decir, estadísticas representables en forma de

$$\bar{t}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} t(x) d\bar{P}(x). \quad (5.1)$$

Ya que la función empírica de distribución  $\bar{P}(x)$  sirve de estimación de la distribución inicial  $P(x)$  (véase 20.5.2) se debe esperar que las características muestrales también pueden servir de estimaciones de las correspondientes características de la distribución inicial, lo que explica la importancia del estudio de las distribuciones de las estadísticas muestrales y de sus características numéricas.

Convengamos que en adelante las características numéricas de las estadísticas muestrales (es decir, de la función empírica  $\bar{P}(x)$ ) se designen con la misma letra que las características numéricas correspondientes de la población madre (es decir, de la distribución inicial  $P(x)$ ), solamente con una raya encima.

**20.5.1. Momentos muestrales (estadísticos).** El valor medio de la muestra se determina por la relación

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = \int_{-\infty}^{\infty} x d\bar{P}(x). \quad (5.2)$$

Las características numéricas del valor medio se calculan fácilmente tomando en consideración que  $\bar{x}$  es la suma de las magnitudes aleatorias independientes igualmente distribuidas. Por ejemplo,

$$\left. \begin{aligned} M\bar{x} &= m; \\ D\bar{x} &= \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

donde  $m$  es el valor medio;  $\sigma^2$ , la varianza de la población madre

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x dP(x), \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 dP(x).$$

De las fórmulas (5.3) se deduce de inmediato que la media muestral  $\bar{x}$  converge según la probabilidad al valor medio de  $m$  de la población madre para  $n \rightarrow \infty$ . Además, la magnitud de desviación de la media muestral con respecto a su esperanza matemática  $\sqrt{n}(\bar{x}-m)$  es asintóticamente normal con parámetros  $(0, \sigma^2)$ .

La varianza muestral (estadística) se determina, corrientemente, por la relación

$$\bar{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2. \quad (5.4)$$

Las principales características numéricas de la varianza muestral tienen el aspecto

$$\left. \begin{aligned} M\bar{s}^2 &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2; \\ D\bar{s}^2 &= \frac{m_4 - m_2^2}{n} - \frac{2(m_4 - 2m_2^2)}{n^2} + \frac{m_4 - 3m_2^2}{n^3}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Aquí a  $m_2$  y  $m_4$  les corresponden el segundo y el cuarto momentos centrales de la población madre, es decir,

$$m_2 = \sigma^2, \quad m_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^4 dP(x).$$

De la primera fórmula (5.5) se deduce que la estadística

$$\frac{n}{n-1} \bar{s}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2$$

es la estimación insesgada de la varianza. Al mismo tiempo la magnitud de la desviación de la varianza muestral con respecto a la varianza de la población madre  $\sqrt{n}(\bar{s} - \sigma^2)$  es asintótica normal con parámetros  $(0, m_4 - m_2^2)$ .

Los momentos muestrales superiores (centrales) se determinan por la relación

$$\bar{m}_r = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^r, \quad r \geq 2. \quad (5.6)$$

Es fácil calcular las características numéricas de los momentos muestrales superiores. Se debe emplear la evidente correlación  $Mx_h^r = a_r =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r dP(x)$  y la independencia de las magnitudes aleatorias  $x_k$ .

Las expresiones exactas de las características numéricas de los momentos muestrales  $\bar{m}_r$  para  $r \geq 3$  son voluminosas, pero, sin embargo, si  $n$  son grandes, las expresiones asintóticas se simplifican considerablemente:

$$M\bar{m}_r = m_r + O\left(\frac{1}{n}\right); \quad (5.7)$$

$$D\bar{m}_r = \frac{1}{n} [m_{2r} - 2im_{r-1}m_{r+1} - m_r^2 + r^2 m_2 m_{r-1}^2] + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (5.8)$$

Lo mismo que en el caso de los dos primeros momentos muestrales, los momentos muestrales superiores  $\bar{m}_r$  son asintóticamente normales (para  $n \rightarrow \infty$ ) con media y varianza determinadas por los términos principales de las fórmulas (5.7) y (5.8).

**20.5.2. Funciones de los momentos muestrales.** Cuando se determinan las características numéricas de la función de los momentos muestrales es útil el siguiente

**Teorema.** Sea dada la función  $H(\bar{m}_r, \bar{m}_s)$  de los momentos muestrales  $\bar{m}_r$  y  $\bar{m}_s$  que no depende explícitamente de  $n$  y satisface las condiciones:

1) la función  $H(u, v)$  es diferenciable continuamente dos veces en el entorno del punto  $m_r, m_s$ :

2) para todos los valores de  $x_k, k = \overline{1, n}$ , la función  $H(\bar{m}_r, \bar{m}_s) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, n)$  satisface la estimación:  $|H| < Cn^p$ , donde  $C$  y  $p$  son constantes no negativas.

Entonces, el valor medio y la varianza de la variable aleatoria  $H(\bar{m}_r, \bar{m}_s)$  pueden ser representados por las fórmulas asintóticas:

$$MH = H(m_r, m_s) + O\left(\frac{1}{n}\right); \quad (5.9)$$

$$DH = D\bar{m}_r \frac{\partial H}{\partial m_r}(m_r, m_s) + 2M[(\bar{m}_r - m_r)(\bar{m}_s - m_s)] \times \\ \times \frac{\partial H}{\partial m_r}(m_r, m_s) \frac{\partial H}{\partial m_s}(m_r, m_s) + D\bar{m}_s \frac{\partial H}{\partial m_s}(m_r, m_s) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \quad (5.10)$$

El teorema citado es válido también para la función de cualquier número de argumentos en el caso de muestras multidimensionales.

Cuando se cumple solamente la primera condición del teorema la estadística  $H(\bar{m}_r, \bar{m}_s)$  es asintóticamente normal (para  $n \rightarrow \infty$ ) con media y varianza determinadas por los términos principales de la fórmula (5.9) y (5.10). Notemos que el término principal de la fórmula (5.10) puede resultar igual a cero. En este caso,  $\sqrt{n}(H - MH)$  es asintóticamente normal con varianza nula, es decir, converge según la probabilidad a cero. No se excluye la posibilidad de que para cierto  $p > \frac{1}{2}$   $n^p(H - MH)$  tiene distribución límite no trivial que no es obligatoriamente normal.

20.5.3. Las distribuciones exactas de las características muestrales son visibles sólo en casos excepcionales. Con más plenitud está estudiado el caso de la población madre normal.

Si la función inicial de distribución  $P(x)$  de valores muestrales  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , es normal con parámetros  $(m, \sigma^2)$ , entonces la media

muestral  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  y la varianza muestral  $\bar{s}^2$  son independientes,

además  $\bar{x}$  está normalmente distribuido con parámetros  $(m, \frac{\sigma^2}{n})$ ,

mientras que  $\frac{n}{\sigma^2} \bar{s}^2$  tiene distribución  $\chi_{n-1}^2$  con  $n-1$  grados de

libertad, o de otro modo,  $\frac{n}{n-1} \bar{s}^2$  tiene la misma distribución que la media aritmética de  $n-1$  cuadrados de las magnitudes normales independientes con parámetros  $(0, \sigma^2)$ . Además, la relación

$$t = \sqrt{n-1} \frac{\bar{x} - m}{\bar{s}} \quad (5.11)$$

tiene la distribución de Student (véase el cap. 6) con  $(n-1)$  grados de libertad.



## TEORÍA DE ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

21.1. Problemas de estimación  
y propiedades de las estimaciones

**21.1.1. Planteamiento del problema.** Sea  $\xi$  un elemento aleatorio que toma valores en un espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$ . Se considera conocido que la distribución del elemento  $\xi$  pertenece a cierta clase de distribuciones  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$  en  $(X, \mathfrak{B})$  la cual depende del parámetro  $\theta$ . Esto significa que en el conjunto  $\Theta$ , llamado conjunto de valores admisibles del parámetro, existe tal  $\theta_0$  que la distribución del elemento  $\xi$  coincide con  $P_{\theta_0}$ , es decir,  $P\{\xi \in \Gamma\} = P_{\theta_0}(\Gamma)$ ,  $\Gamma \in \mathfrak{B}$ . El valor  $\theta_0$  se llama valor real del parámetro. Se supone que el valor real del parámetro es desconocido y el problema consiste en estimar a base del experimento con el elemento  $\xi$  el valor real del parámetro  $\theta$ . En la práctica, el experimento de esta índole consiste ordinariamente en realizar la muestra de volumen  $n$ , es decir, de  $n$  observaciones (mediciones) independientes sobre el elemento aleatorio  $\xi$ . El resultado de la  $i$ -ésima observación se designará con  $x_i$  así que a consecuencia de  $n$  observaciones obtendremos un punto en el espacio  $X^n$  que se llama espacio muestral. A partir de las observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se construye la estimación del valor real del parámetro. De este modo, la estimación  $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una función dada en el espacio muestral  $X^n$  que toma el valor en el conjunto  $\Theta$ . Sustituyendo en esta función los resultados de las observaciones en vez de los argumentos obtendremos el valor del parámetro  $\theta^*$  que se toma en calidad de la estimación del valor real del parámetro. Se puede construir un número infinito de tales funciones y surge la pregunta acerca de cuáles de ellas son preferibles. La respuesta no es unívoca, pues se puede introducir diversos criterios de la calidad de las estimaciones.

**21.1.2. Principios de construcción de las estimaciones.** Es natural considerar que la calidad de la estimación  $\theta^*$  depende de la proximidad de  $\theta^*$  al valor real del parámetro. Sin embargo, se necesita precisar el término «proximidad».

Primero, se puede introducir de distintos modos la noción de proximidad en el conjunto  $\Theta$ . Por ejemplo, si  $\Theta$  es un espacio métrico es posible considerar como medida de proximidad entre los elementos  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$  la distancia entre ellos. De una manera más general, en el conjunto  $\Theta$  se puede introducir la función de pérdidas  $r(\theta_1, \theta_2)$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ , es decir, una función no negativa interpretada como las pérdidas que sufrimos si aceptamos a título de estimación del valor real del parámetro el valor  $\theta_2$ , mientras que el valor real es igual a  $\theta_1$ . En este caso la estimación  $\theta^*$  es tanto más próxima a  $\theta$  cuanto menores son las pérdidas  $r(\theta, \theta^*)$ .

Segundo, ya que los resultados de las observaciones  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son aleatorios, la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es también un elemento aleatorio, y por eso, la proximidad de  $\theta^*$  a  $\theta$  debe entenderse en cierto sentido promedio. Por ejemplo, se puede considerar que  $\theta^*$  es próximo a  $\theta$  si son pequeñas las pérdidas medias

$$\begin{aligned} M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, \dots, x_n)) &= \\ &= \int_X \dots \int_X r(\theta, \theta^*(x_1, \dots, x_n)) P_{\theta}(dx_1) \dots P_{\theta}(dx_n). \end{aligned}$$

Sin embargo, para la estimación dada  $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$  estas pérdidas pueden ser pequeñas con unos  $\theta$  y bastante grandes con otros  $\theta$ . Claro está, si existiese tal estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que para otra estimación cualquiera  $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$  con todos los  $\theta \in \Theta$  se cumpliera la desigualdad

$$M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

entonces, desde el punto de vista de la medida elegida de proximidad se convendría preferirla a otra estimación cualquiera. No obstante, hablando en general, tal estimación no existe. Por eso, eligiendo la estimación del parámetro desconocido se tienen en cuenta algunas consideraciones complementarias.

Se puede, por ejemplo, elegir la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de tal modo que el valor de la función

$$\sup_{\theta \in \Theta} M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

sea el mínimo. Este principio de elección de las estimaciones lleva el nombre de principio de minimax y las estimaciones correspondientes, si existen, se llaman minimáximas. Procediendo así tratamos de minimizar la pérdida máxima relacionada con la elección de una u otra estimación.

Otro procedimiento para elegir la estimación es el llamado bayesiano: se considera que hay algunos razonamientos apriorísticos sobre la preferencia de unos u otros valores del parámetro  $\theta$ . Con otras palabras, en el espacio  $\Theta$  se considera dada una distribución apriorística  $\mu(d\theta)$ . La estimación  $\theta^*(x_1, \dots, x_n)$  se elige de tal modo que el valor de la integral

$$\int_{\Theta} M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \mu(d\theta)$$

sea el mínimo. Son posibles otros principios de construcción de las estimaciones.

**2f.1.3. Desigualdad de Cramer—Rao.** En adelante, con respecto al conjunto  $\Theta$ , supondremos que es un intervalo en  $R^1$  o un dominio en el espacio euclídeo  $d$ -dimensional  $R^d$ . El conjunto  $X$ , como regla, coincidirá con  $R^1$ .

Llamemos insesgada la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  si para todos los  $\theta \in \Theta$

$$M_{\theta^*}(\theta, \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \theta,$$

En la clase de estimaciones insesgadas es natural considerar la mejor aquella estimación cuya distribución para todos los  $\theta$  se concentra «más densamente» alrededor del valor medio, es decir, alrededor de  $\theta$ . Cuando  $\theta$  es un parámetro unidimensional, de medida de tal concentración de la distribución puede servir la varianza de distribución. De esto modo, llegamos al problema de determinar en la clase de todas las estimaciones insesgadas una estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal para la cual, con cada  $\theta \in \Theta$ , el valor de la función

$$M_{\theta} (\theta^* (x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2$$

sea el mínimo. Resulta que esta expresión está acotada por abajo por cierta función de  $\theta$ , así que si para una estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  esta cota inferior para la varianza se obtiene con todos los  $\theta$ , ésta será la estimación buscada.

Supongamos que la distribución  $P_{\theta}(dx)$ ,  $\theta \in \Theta$  (aquí  $\theta$  es un parámetro unidimensional), tiene la densidad  $p(\theta, x)$  con respecto a alguna medida  $\sigma$ -finita  $\nu(dx)$  en  $(X, \mathfrak{B})$ . En particular,  $P_{\theta}(dx)$  puede ser una distribución discreta concentrada en los puntos  $x_1, x_2, \dots \in X$ . Además, los puntos  $x_1, x_2, \dots$  no dependen de  $\theta$  y  $p(\theta, x_h)$  es la masa (probabilidad) correspondiente al punto  $x_h$ , así que  $\sum_h p(\theta, x_h) = 1$ .

Supongamos, luego, que las densidades  $p(\theta, x)$  son diferenciables según  $\theta$ , con la particularidad de que para cualquier conjunto medible  $\Gamma$  de  $X$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\Gamma} p(\theta, x) \nu(dx) = \int_{\Gamma} \frac{\partial p(\theta, x)}{\partial \theta} \nu(dx).$$

Hagamos

$$I(\theta) = \int_X \left[ \frac{\partial \log p(\theta, x)}{\partial \theta} \right]^2 p(\theta, x) \nu(dx), \quad \theta \in \Theta.$$

La magnitud  $I(\theta)$  se llama cantidad de información sobre el parámetro  $\theta$ , contenida en una observación. En el caso discreto  $I(\theta)$  se escribe en forma de

$$I(\theta) = \sum_{h=1}^{\infty} \left[ \frac{\partial \log p(\theta, x_h)}{\partial \theta} \right]^2 p(\theta, x_h).$$

La cantidad de información sobre  $\theta$  contenida en  $n$  observaciones independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es igual a  $nI(\theta)$ .

Sea  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cualquier estimación insesgada del parámetro  $\theta$ . Para ciertas condiciones de regularidad tiene lugar la desigualdad

$$\sigma_{\theta}^2(\theta^*) = M_{\theta} (\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (1.1)$$

además, la igualdad se logra cuando, y sólo cuando,

$$\sum_{h=1}^n \frac{\partial \log p(\theta, x_h)}{\partial \theta} = \lambda [\theta^*(x_1, \dots, x_n) - \theta]$$

casi para todos los  $x \in R^n$  con respecto a la medida  $p(\theta, x_1) \dots p(\theta, x_n) \nu(dx_1) \dots \nu(dx_n)$ . Aquí  $\lambda$  no depende de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , no obstante, puede depender de  $\theta$ .

Las mencionadas condiciones de regularidad consisten en el cumplimiento de la igualdad

$$M_0 \frac{\partial \log L(\theta, x_1, \dots, x_n)}{\partial \theta} = \int_X \dots \int_X \frac{\partial \log L}{\partial \theta} \times \\ \times L \nu(dx_1) \dots \nu(dx_n) = 0$$

donde  $L(\theta, x_1, \dots, x_n) = p(\theta, x_1) p(\theta, x_2) \dots p(\theta, x_n)$ , así como en la posibilidad de diferenciar según  $\theta$  la igualdad

$$\int_X \dots \int_X \theta^* (x_1, \dots, x_n) L(\theta, x_1, \dots, x_n) \nu(dx_1) \dots \nu(dx_n) = \theta.$$

La desigualdad (1.1) se llama desigualdad de Cramer—Roa y da la cota inferior para la varianza de la estimación insesgada. Si para la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  en la desigualdad (1.1) se obtiene la igualdad, entonces tal estimación se llama eficiente. Así, pues, entre las estimaciones regulares insesgadas, las estimaciones eficientes tienen varianza mínima. Llamemos eficiencia de la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la relación entre la cota inferior para la varianza de la estimación y la varianza real de la estimación:

$$\text{eff}(\theta^*) = \frac{1}{nI(\theta)} \frac{1}{\sigma_0^2(\theta^*)}$$

Es evidente que  $\theta \leq \text{eff}(\theta^*) \leq 1$ . Dos estimaciones eficientes del mismo parámetro coinciden casi con seguridad para cada  $\theta$ .

**21.1.4. Estimaciones suficientes.** Designemos con  $Q_\theta(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  la medida en  $(X^n, \mathfrak{A}^n)$  determinada por la fórmula

$$Q_\theta(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = P_\theta(dx_1) P_\theta(dx_2) \dots P_\theta(dx_n).$$

La estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama suficiente para el parámetro  $\theta$  si la distribución condicional

$$Q_\theta(A|\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = t), \quad A \in \mathfrak{A}^n,$$

no depende de  $\theta$ . La estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es suficiente cuando y sólo cuando la distribución condicional de otra estimación cualquiera, a condición de  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = t$ , no depende de  $\theta$ . La siguiente afirmación da el criterio de suficiencia de la estimación suponiendo que existe la densidad de distribución.

**Teorema 1.** Supongamos que las medidas  $P_\theta(dx)$ ,  $\theta \in \Theta$ , son absolutamente continuas con respecto a cierta medida  $\sigma$ -finita  $\nu(dx)$ , dada en  $(X, \mathfrak{A})$ , y sea  $p(\theta, x) = \frac{dP_\theta}{d\nu}$ . La estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es suficiente para el parámetro  $\theta$  cuando, y sólo cuando, tiene lugar la representación

$$p(\theta, x_1) p(\theta, x_2) \dots p(\theta, x_n) = g_\theta(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) \times \\ \times h(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde  $g_\theta(\theta^*)$  y  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  son funciones medibles no negativas, con la particularidad de que  $g_\theta$  depende de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  solamente mediante la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no depende de  $\theta$ .

La siguiente afirmación subraya la importancia del concepto de estimación suficiente en la teoría de estimación.

**Teorema 2.** Supongamos que  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la estimación suficiente para el parámetro  $\theta$  y  $\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es la estimación insesgada arbitraria del parámetro  $\theta$ . Entonces, para todos los  $\theta \in \Theta$

$$M_\theta [f(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) - \theta]^2 \leq$$

$$\leq M_\theta [\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta]^2$$

donde  $f(t) = M_\theta \{\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n) / \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = t\}$  (como sigue de lo dicho anteriormente, la función  $f(t)$  no depende de  $\theta$ ). En este caso, la función  $f(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$  es también una estimación insesgada del parámetro  $\theta$ .

De este modo, teniendo para el parámetro  $\theta$  la estimación insesgada arbitraria  $\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y la estimación suficiente  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  podemos construir una nueva estimación insesgada del parámetro  $\theta$  la cual tendrá para todos los  $\theta$  varianza menor que la estimación inicial.

La estimación suficiente  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama completa si de lo que para cierta función  $\varphi(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n))$  se cumple la relación  $M_\theta \varphi(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$ , se deduce que  $\varphi(\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$  es casi cierta con respecto a la medida  $Q_\theta$  para cualquier  $\theta \in \Theta$ . Si existe la estimación insesgada completa  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del parámetro  $\theta$ , entonces para otra estimación cualquiera  $\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de parámetro  $\theta$  se cumple la desigualdad

$$M_\theta [\theta_1^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta]^2 \geq$$

$$\geq M_\theta [\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta]^2,$$

es decir, en este caso la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es eficiente.

**21.1.5. Estimaciones de los parámetros multidimensionales.** Supongamos que el conjunto  $\Theta$  de los valores admisibles del parámetro es un dominio (abierto) en el espacio euclideo  $d$ -dimensional  $R^d$ . En este caso, la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  representa también un vector  $d$ -dimensional. Como en el caso unidimensional planteemos el problema sobre la búsqueda entre todas las estimaciones insesgadas tales cuya distribución tuviese máximo grado de concentración alrededor del valor medio. En el caso multidimensional la medida cómoda de esta concentración es una elipsoide de dispersión.

Sea  $\xi$  un vector aleatorio  $d$ -dimensional con media  $a$  y matriz de segundos momentos  $V = \|v_{ij}\| : a = M\xi, v_{ij} = M\xi^i \xi^j, i, j = 1, 2, \dots, d$ , donde  $\xi^i$  es el  $i$ -ésimo componente del vector  $\xi$ . Sea  $S$  un elipsoide en  $R^d$  con el centro en un punto  $a$  tal que si se concentra dentro de él la distribución uniforme (es decir, una distribución con densidad constante), entonces esta distribución tendrá a título de media el vector  $a$ , y a título de matriz de los segundos momentos, la matriz  $V$ . El elipsoide de este tipo se llama elipsoide de dispersión. En el caso unidimensional se convierte en el intervalo  $(a - \sigma\sqrt{3}, a + \sigma\sqrt{3})$  donde  $a$  y  $\sigma^2$  son la esperanza matemática y la varianza de la magnitud  $\xi$ , respectivamente. En el caso general la ecuación del

elipsoide de dispersión tiene el aspecto de

$$(V^{-1}(x-a), x-a) = d+2,$$

donde  $V^{-1}$  es la matriz inversa a la matriz  $V$ ,  $x$  es un punto móvil del elipsoide,  $(y, x)$  es el producto escalar en  $R^d$ .

Supongamos ahora que  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$  es una familia de distribuciones en  $(X, \mathfrak{B})$  las cuales tienen la densidad  $p(\theta, x)$  respecto de alguna medida  $\sigma$ -finita  $\nu(dx)$  dada en  $\mathfrak{B}$ . Sea  $\theta$  un parámetro  $d$ -dimensional. Pongamos

$$i_{kr}(\theta) = \int \frac{\partial \log p(\theta, x)}{\partial \theta^k} \frac{\partial \log p(\theta, x)}{\partial \theta^r} p(\theta, x) \nu(dx)$$

donde  $k, r = 1, 2, \dots, d$  y designemos por  $I(\theta)$  la matriz con elementos  $i_{kr}(\theta)$ . La matriz  $I(\theta)$  se llama matriz de información. Además, sea  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  cierta estimación insesgada del parámetro  $\theta$ . Anotemos con  $S_{n*}(\theta)$  el elipsoide de dispersión para la distribución del vector  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  según la medida  $Q_\theta(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = p(\theta, x_1) p(\theta, x_2) \dots p(\theta, x_n) \nu(dx_1) \dots \nu(dx_n)$ .

El análogo multidimensional de la desigualdad de Cramer—Roach dice: para cualquier estimación insesgada  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del parámetro  $\theta$ , a ciertas condiciones de regularidad, el elipsoide  $S_{n*}(\theta)$  contiene un elipsoide cuya ecuación tiene por expresión

$$n(I(\theta)(u-\theta), u-\theta) = d+2, \quad (1.2)$$

donde  $n$  es el número de observaciones,  $u$  es el punto corriente del elipsoide ( $u \in R^d$ ). En el caso límite ambos elipsoides coinciden. En este caso la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama conjuntamente eficiente. La matriz de los segundos momentos para la estimación conjuntamente eficiente coincide con  $n^{-1}I^{-1}(\theta)$ . Se llama eficiencia de la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la relación entre el volumen del elipsoide (1.2) y el volumen del elipsoide  $S_{n*}(\theta)$ . De un modo evidente, para el caso multidimensional, se aplican la noción de estimación suficiente, así como las propiedades de estimaciones suficientes expuestas en los teoremas 1, 2.

**21.1.6. Propiedades asintóticas de las estimaciones.** Supongamos que el volumen de la muestra  $n$  crece, es decir,  $n \rightarrow \infty$ , y que nos interese por las propiedades asintóticas de las estimaciones.

La estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del parámetro  $\theta$  se llama conciliable si para  $n \rightarrow \infty$ ,  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \theta$  en probabilidad. A veces, tales estimaciones se llaman débilmente conciliables a diferencia de las estimaciones fuertemente conciliables para las cuales la convergencia correspondiente se realiza con la probabilidad 1.

Luego, notemos que las estimaciones eficientes no existen siempre ni mucho menos. Sin embargo, en muchos casos existen las estimaciones asintóticamente eficientes.

Llamemos eficiencia asintótica de la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  al límite

$$e_0(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{eff}(\theta^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nI(\theta)\sigma_n^2(\theta^*)},$$

si éste existe. En muchos casos  $\sigma_{\theta}^2(\theta^*) \sim \frac{c}{n}$  para  $n \rightarrow \infty$  y por eso, en estos casos,  $e_n(\theta^*) = [cI(\theta)]^{-1}$  existe. Es evidente que  $0 \leq e_n(\theta^*) \leq 1$ . Si  $e_n(\theta^*) = 1$  la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama asintóticamente eficiente.

## 21.2. Métodos de construcción de las estimaciones

**21.2.1. Método de los momentos.** Tenga la magnitud aleatoria la distribución perteneciente a la familia de las distribuciones  $\{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$ , donde  $\Theta$  es un dominio en  $R^d$ . Supongamos que existen los primeros  $d$  momentos de distribución  $P_{\theta}$  y hagamos

$$m_r(\theta) = \int_X x^r P_{\theta}(dx), \quad r = 1, 2, \dots, d.$$

Aquí  $X$  coincide con  $R^1$ , o  $X$  es un conjunto numerable. Teniendo  $n$  observaciones independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sobre la magnitud aleatoria  $\xi$  construyamos los momentos muestrales

$$\bar{m}_r = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^r, \quad r = 1, 2, \dots, d.$$

El método de los momentos consiste en igualar los momentos muestrales a los teóricos. Obtenemos el sistema de ecuaciones

$$m_r(\theta) = \bar{m}_r, \quad r = 1, 2, \dots, d,$$

con respecto a  $d$  incógnitas  $\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d$ . Si existe la solución única  $\theta_r^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_r(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_d)$ ,  $r = 1, \dots, d$ , de este sistema y las funciones  $f_r$  son continuas, entonces la estimación que se obtiene  $\{\theta_r^*, r = 1, 2, \dots, d\}$  es una estimación conciliable del parámetro  $\theta$ . No obstante, hablando en general, las estimaciones obtenidas mediante el método de momentos no son eficientes.

**21.2.2. Método del máximo de verosimilitud.** Supongamos que la familia de distribuciones  $\{P_{\theta}, \theta \in \Theta\}$  en el espacio medible  $(X, \mathfrak{B})$  tiene la densidad de distribución  $p(\theta, x)$  respecto de cierta medida  $\sigma$ -finita  $\nu(dx)$  dada en  $\mathfrak{A}$ . Si  $X$  es discreto,  $p(\theta, x)$  es la probabilidad de que  $\xi = x$  si el valor real del parámetro es igual a  $\theta$ . Sean  $x_1, \dots, x_n$  los resultados de  $n$  observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$ . Según el método de la verosimilitud máxima a título de la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  del parámetro  $\theta$  se elige tal función de las observaciones que da el máximo de la función

$$p(\theta, x_1) p(\theta, x_2) \dots p(\theta, x_n) = L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

la cual se llama función de verosimilitud. Si para  $\theta = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  la función de verosimilitud alcanza el valor máximo, entonces para este mismo  $\theta$  el valor máximo lo alcanza también la función  $\log L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . A menudo, es más cómodo utilizar la función  $\log L$ . Las estimaciones obtenidas por el método de verosimilitud máxima se llaman estimaciones de verosimilitud máxima.

Para encontrar las estimaciones de verosimilitud máxima es necesario resolver la ecuación ( $k = 1, 2, \dots, d$ )

$$\frac{\partial \log L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial \theta^k} = 0$$

si  $\theta = (\theta^1, \theta^2, \dots, \theta^d)$ . Las ecuaciones de este tipo se llaman ecuaciones de verosimilitud. Al resolver las ecuaciones de verosimilitud es conveniente rechazar las soluciones de tipo  $\theta = \text{const}$  y estudiar sólo las que dependen de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y caen en el dominio  $\Theta$  de valores admisibles del parámetro. Se debe también tener en cuenta que la función de verosimilitud puede tomar el valor máximo en la frontera del dominio  $\Theta$ .

Las estimaciones de verosimilitud máxima poseen las dos importantes propiedades siguientes:

A) Si existe la estimación suficiente  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  para el parámetro  $\theta$ , cada solución de la ecuación de verosimilitud es función de  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

B) Si para el parámetro  $\theta$  existe la estimación eficiente (en el caso multidimensional, conjuntamente eficiente)  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , la ecuación de verosimilitud tiene la única solución  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**21.2.3. Comportamiento asintótico de las estimaciones de verosimilitud máxima.** Sea  $\Theta$  un intervalo en  $R^1$ ,  $X = R^1$  y  $\nu(dx) = dx$ , donde  $dx$  es la medida de Lebesgue en  $R^1$ . Formulemos un teorema que muestra que las estimaciones de verosimilitud máxima tienen una serie de buenas propiedades cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.** Supongamos que la densidad  $p(\theta, x)$  satisface las condiciones:

1) para cada  $\theta \in \Theta$  y para casi todo  $x$  existen las derivadas

$$\frac{\partial^k \log p(\theta, x)}{\partial \theta^k}, \quad k=1, 2, 3;$$

2) para cada  $\theta \in \Theta$  están cumplidas las desigualdades

$$\left| \frac{\partial p(\theta, x)}{\partial \theta} \right| \leq G_1(x), \quad \left| \frac{\partial^2 p(\theta, x)}{\partial \theta^2} \right| \leq G_2(x), \\ \left| \frac{\partial^2 p(\theta, x)}{\partial \theta^3} \right| \leq G_2(x),$$

donde las funciones  $G_1(x)$  y  $G_2(x)$  son integrables en  $R^1$  según la medida de Lebesgue y

$$\sup_{\theta \in \Theta} \int_{R^1} G_2(x) p(\theta, x) dx < \infty;$$

3) para cada  $\theta \in \Theta$  la integral

$$I(\theta) = \int_{R^1} \left[ \frac{\partial \log p(\theta, x)}{\partial \theta} \right]^2 p(\theta, x) dx$$

es finita y positiva.

Entonces la ecuación de verosimilitud tiene la solución  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que es una estimación conciliable asintóticamente eficiente y



asintóticamente normal del parámetro  $\theta$ , lo que significa que la magnitud

$$I(\theta) \sqrt{n} (\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) - \theta)$$

es asintóticamente normal con parámetros  $(0, 1)$  si el valor real del parámetro es igual a  $\theta$ .

Este teorema se generaliza para el caso de una magnitud aleatoria discreta, así como para el del parámetro multidimensional  $\theta$ .

**21.2.4. Método del mínimo de  $\chi^2$ .** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$  con valores en  $(X, \mathfrak{B})$ , cuya distribución pertenece a la clase de distribuciones  $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ . Supongamos que el espacio  $X$  está partido en  $r$  conjuntos medibles disjuntos  $X_1, X_2, \dots, X_r$ . Designemos por  $n_i$  el número de observaciones en la muestra  $x_1, x_2, \dots, x_n$  caídas en el conjunto  $X_i$ . Si el conjunto  $X$  es finito, es decir, la magnitud aleatoria toma sólo un número finito de valores, se puede considerar que  $X_i$  es el conjunto de un punto. De este modo, están agrupados los resultados de las observaciones.

Compongamos la magnitud

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i(\theta))^2}{np_i(\theta)},$$

donde  $p_i(\theta) = P_\theta(X_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $\theta \in \Theta$ . La estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama estimación según el método del mínimo de  $\chi^2$  si se obtiene minimizando la magnitud  $\chi^2$  según  $\theta$ . Si  $\theta$  es un parámetro  $d$ -dimensional, entonces para encontrar la estimación según el método del mínimo de  $\chi^2$  obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^r \left[ \frac{n_i - np_i(\theta)}{r_i(\theta)} + \frac{(n_i - np_i(\theta))^2}{2np_i^2(\theta)} \right] \frac{\partial p_i(\theta)}{\partial \theta^k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Por sus propiedades asintóticas las estimaciones, obtenidas mediante el método del mínimo de  $\chi^2$ , son muy próximas a las estimaciones de verosimilitud máxima. Por ejemplo, a ciertas condiciones, con la probabilidad 1, se tiene sólo una raíz conciliable de las ecuaciones correspondientes, que da a la magnitud  $\chi^2$  el mínimo absoluto.

### 21.3. Dominios confidenciales

**21.3.1. Noción del dominio confidencial.** En algunos casos es importante no sólo dar la estimación para un parámetro desconocido de distribución, sino que también indicar el dominio donde supuestamente debe estar el valor real del parámetro. Este dominio está construido a partir de los resultados de las observaciones y por eso puede variar de una muestra a otra y, por lo tanto, es un dominio aleatorio. Por consiguiente, se puede hablar de la probabilidad de que este dominio recubre el valor real del parámetro. Eligiendo cierto número bastante pequeño  $\varepsilon > 0$  podemos proponernos construir la regla que nos permita asignar a los resultados de las observaciones tal dominio en el conjunto paramétrico que, con la probabilidad  $1 - \varepsilon$ , el valor

real del parámetro se contenga en este dominio. Esto significa que en una serie larga de muestras nos equivocamos sólo el 100  $\varepsilon$ % de casos.

Los dominios en cuestión se llaman dominios confidenciales y el número  $1 - \varepsilon$ , coeficiente de confianza.

21.3.2. Construcción de los dominios confidenciales. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$  cuya distribución contiene un parámetro desconocido que varía en el espacio  $R^1$  y sea  $\theta^*$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) cualquier estimación del parámetro  $\theta$ . Designemos con  $q_\theta(dt)$  la distribución de la estimación  $\theta^*$  suponiendo que el valor real del parámetro coincide con  $\theta$ , es decir,

$$q_\theta(dt) = Q_\theta\{\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) \in dt\},$$

donde  $Q_\theta(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  es una distribución en el espacio muestral  $R^n$  que se determina por la fórmula

$$Q_\theta(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = P_\theta(dx_1) P_\theta(dx_2) \dots P_\theta(dx_n).$$

Si la distribución  $q_\theta(dt)$  no tiene átomos, entonces según  $\varepsilon > 0$  fijado se puede siempre elegir los números  $a_1(\theta, \varepsilon)$  y  $a_2(\theta, \varepsilon)$  de tal modo que  $a_1(\theta, \varepsilon) < a_2(\theta, \varepsilon)$  y

$$\int_{\{t < a_1(\theta, \varepsilon)\}} q_\theta(dt) + \int_{\{t > a_2(\theta, \varepsilon)\}} q_\theta(dt) = \varepsilon.$$

Naturalmente, esta elección no es unívoca. Supongamos que se puede elegir estas funciones de modo que sean continuas según  $\theta$  y que cada una de las ecuaciones  $a_i(\theta, \varepsilon) = t$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \in \Theta$ , tenga la única solución  $c_i(t, \varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$ . Entonces las correlaciones

$$Q_\theta\{a_1(\theta, \varepsilon) < \theta^* < a_2(\theta, \varepsilon)\} = 1 - \varepsilon$$

y

$$Q_\theta\{c_1(\theta^*, \varepsilon) < \theta < c_2(\theta^*, \varepsilon)\} = 1 - \varepsilon$$

son equivalentes.

Así pues, conociendo la distribución de la estimación  $\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$  según  $\varepsilon > 0$  fijado podemos construir el intervalo de confianza  $(c_1(\theta^*, \varepsilon), c_2(\theta^*, \varepsilon))$  con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

Notemos que si la distribución  $q_\theta(dt)$  tiene átomos, los números  $a_1(\theta, \varepsilon)$  y  $a_2(\theta, \varepsilon)$  se deben elegir partiendo de la desigualdad

$$\int_{\{t < a_1(\theta, \varepsilon)\}} q_\theta(dt) + \int_{\{t < a_2(\theta, \varepsilon)\}} q_\theta(dt) \leq \varepsilon,$$

ya que en este caso pueden no existir tales  $a_1$  y  $a_2$  para los que se cumpla la igualdad correspondiente. Si continuamos construyendo del modo mencionado arriba, obtendremos un intervalo confidencial con coeficiente de confianza no menor que  $1 - \varepsilon$ .

Evidentemente, partiendo de distintas estimaciones  $\theta^*$  del parámetro  $\theta$  obtendremos diversos intervalos confidenciales. Es deseable que la longitud del intervalo confidencial sea lo más pequeña posible. Por eso, al construir intervalos confidenciales es natural basarse en las estimaciones eficientes o asintóticamente eficientes que se obtienen, por ejemplo, mediante el método de verosimilitud máxima.

21.3.3. Un método de construcción de los intervalos confidenciales. Supongamos que la distribución  $P_\theta(dx)$  no tiene átomos, y exista la función  $g(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\theta \in \Theta$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in R^1$ , que posee las propiedades:

1)  $g(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$  es continua y monótona según  $\theta$ ;  
 2) la función  $Q_\theta\{g(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n) < \alpha\}$  no depende de  $\theta$  para cada  $\alpha \in R^1$  (véase la definición de la medida  $Q_\theta$  en el p. 21.3.2).

A base de  $\varepsilon > 0$  fijado elegimos los números  $a_1(\varepsilon)$  y  $a_2(\varepsilon)$  de tal modo que

$$Q_\theta\{a_1(\varepsilon) < g(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n) < a_2(\varepsilon)\} = 1 - \varepsilon.$$

En virtud de la condición 2) los números  $a_1(\varepsilon)$  y  $a_2(\varepsilon)$  no dependen de  $\theta$ .

Designemos con  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ , los números que satisfacen las correlaciones  $g(c_i, x_1, x_2, \dots, x_n) = a_i(\varepsilon)$ ,  $i = 1, 2$ . La magnitud  $c_i$  depende sólo de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  y  $\varepsilon$ . Es fácil ver que

$$Q_\theta\{c_1 < \theta < c_2\} = 1 - \varepsilon$$

y, por eso,  $[c_1, c_2]$  es el intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

Pongamos

$$F_\theta(x) = \int_{-\infty}^x P_\theta(dy), \quad x \in R^1$$

y supongamos que  $F_\theta$  es continua y monótona según  $\theta$ . Como es fácil comprobar, la función

$$F_\theta(x_1) F_\theta(x_2) \dots F_\theta(x_n)$$

satisface las condiciones 1), 2) y entonces puede ser utilizada para construir intervalos confidenciales. Además, ya que  $F_\theta(x)$  es continua según  $x$

$$Q_\theta\{E_\theta(x_h) < \alpha\} = \begin{cases} 0 & \text{para } \alpha \leq 0; \\ \alpha & \text{para } 0 \leq \alpha \leq 1; \\ 1 & \text{para } \alpha > 1. \end{cases}$$

la suma  $\sum_{h=1}^n \log E_\theta(x_h)$  tiene la distribución gamma

$$\begin{aligned} Q_\theta\left\{-\log a_2 < -\sum_{k=1}^n \log F_\theta(x_k) < -\log a_1\right\} &= \\ &= \int_{\log a_2}^{-\log a_1} \frac{1}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

A partir de  $\varepsilon > 0$  fijado se puede elegir los números  $a_1$  y  $a_2$ ,  $a_1 < a_2$  de tal modo que la integral a la derecha sea igual a  $1 - \varepsilon$ .

De aquí obtenemos

$$Q_{\theta} \left\{ a_1 < \prod_{h=1}^n F_{\theta}(x_h) < a_2 \right\} = 1 - \varepsilon.$$

Ya que la función  $\prod_{h=1}^n F_{\theta}(x_h)$  es continua y monótona según  $\theta$ , existen tales  $c_1$  y  $c_2$  dependientes sólo de  $\varepsilon$  y  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que  $(c_1, c_2)$  es el intervalo confidencial para  $\theta$  con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

Si la función  $g(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$  satisface la condición 2) es continua según  $\theta$ , pero no es obligatoriamente monótona, entonces en vez del intervalo confidencial se obtiene cierto dominio confidencial. Este mismo principio puede ser utilizado también para la construcción de los dominios confidenciales cuando  $\theta$  es un parámetro multidimensional.

**21.3.4. Método de Bayes.** Aplicando el método de construcción de los intervalos confidenciales basado en la fórmula de Bayes, partimos de la suposición de que el mismo parámetro  $\theta$  es aleatorio. Se supone también que conocemos la distribución a priori de  $\theta$ . Designemos con  $\varphi(\theta)$  la densidad de esta distribución respecto de la medida de Lebesgue (recordemos que  $\Theta$  es un intervalo  $R^1$ ).

Luego, sea  $\theta^*$  ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ) cierta estimación del parámetro  $\theta$ , construida a base de las observaciones independientes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de la variable aleatoria  $\xi$ . Supongamos que la distribución  $q_{\theta}(dt)$  de la estimación  $\theta^*$  (véase el p. 21.3.2) es también absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue con densidad  $g(\theta, t)$ . Conforme a la fórmula de Bayes la densidad de distribución de la magnitud  $\theta$  para  $\theta^*$  fijado es igual a

$$\psi(\theta/\theta^*) = \frac{g(\theta, \theta^*) \varphi(\theta)}{\int_{\Theta} g(\theta, \theta^*) \varphi(\theta) d\theta}.$$

Por eso la probabilidad condicional de que el parámetro  $\theta$  está entre los límites  $c_1$  y  $c_2$  a condición de que  $\theta^*$  fijado se expresa por la fórmula

$$P\{c_1 < \theta < c_2/\theta^*\} = \int_{c_1}^{c_2} \psi(t/\theta^*) dt.$$

Ahora, por medio de  $\varepsilon > 0$  fijado podemos determinar los números  $c_1(\theta^*, \varepsilon)$  y  $c_2(\theta^*, \varepsilon)$  de tal modo que

$$P\{c_1(\theta^*, \varepsilon) < \theta < c_2(\theta^*, \varepsilon)\} = 1 - \varepsilon.$$

Así, pues, para  $\theta$  está obtenido el intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

Este método no siempre es cómodo, ya que en algunos casos no hay razón de considerar aleatorio el parámetro  $\theta$ , si es aleatorio, no siempre es conocida su distribución a priori.

## ESTIMACIONES DE LOS PARÁMETROS DE ALGUNAS DISTRIBUCIONES

### 22.1. Estimaciones de los parámetros de distribución normal

22.1.1. Estimación de la media con varianza conocida. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$  con densidad de distribución

$$f(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R^1,$$

donde  $\theta$  es un parámetro desconocido y  $\sigma$ , conocido. Hagamos

$$\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h.$$

Es evidente que  $\theta^*$  es una magnitud aleatoria normalmente distribuida con parámetros  $M_{\theta^*} = \theta$  y  $M_{\theta^*}[\theta^* - \theta]^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ . De este modo, la estimación  $\theta^*$  es insesgada y conciliable.

Luego, ya que  $I(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$ , el segundo miembro de la desigualdad de Cramer-Roa en el caso considerado es igual a  $\frac{\sigma^2}{n}$ , lo que significa que la estimación  $\theta^*$  es eficiente.

La magnitud aleatoria  $\frac{\sqrt{n}(\theta^* - \theta)}{\sigma}$  tiene distribución normal con los parámetros (0, 1). Hallando con ayuda de  $\varepsilon > 0$  fijado (por ejemplo, de las tablas) tal número  $c_\varepsilon$ , que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_\varepsilon}^{c_\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \varepsilon,$$

obtenemos

$$Q_0 \left\{ -c_\varepsilon < \frac{\sqrt{n}(\theta^* - \theta)}{\sigma} < c_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon.$$

de donde

$$Q_0 \left\{ \theta^* - \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} \sigma < \theta < \theta^* + \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} \sigma \right\} = 1 - \varepsilon.$$

Aquí  $Q_0(dx_1, \dots, dx_n) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^n (x_h - \theta)^2 \right\} \times dx_1, \dots, dx_n$ . De este modo  $\left( \theta^* - \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} \sigma, \theta^* + \frac{c_\varepsilon}{\sqrt{n}} \sigma \right)$  es el intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

22.1.2. Estimación de la varianza para la media conocida. En este caso

$$p(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\theta} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

donde  $\theta \in (0, \infty)$  es un parámetro desconocido y  $a$ , conocida. La estimación insesgada eficiente para  $\theta$  será

$$\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - a)^2,$$

donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son los resultados de las observaciones independientes. La varianza de la estimación  $\theta^*$  es igual a

$$M_0(\theta^* - \theta)^2 = \frac{2\theta^2}{n}.$$

La magnitud  $\frac{n\theta^*}{\theta}$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad. Para construir el intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$  elegimos los números  $a_1$  y  $a_2$  (por las tablas) de modo que

$$Q_0 \left\{ a_1 \leq \frac{n\theta^*}{\theta} < a_2 \right\} = 1 - \varepsilon,$$

donde

$$Q_0(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (2\pi\theta)^{-\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\theta} \sum_{h=1}^n (x_h - a)^2 \right\} dx_1 dx_2 \dots, dx_n.$$

Entonces

$$Q_0 \left\{ \frac{n\theta^*}{a_2} < \theta < \frac{n\theta^*}{a_1} \right\} = 1 - \varepsilon,$$

así que  $\left( \frac{n\theta^*}{a_2}, \frac{n\theta^*}{a_1} \right)$  es el intervalo buscado

22.1.3. Estimación de la varianza para la media desconocida. El problema es el mismo que en el punto 22.1.2, sin embargo, el parámetro  $a$  se considera desconocido. La estimación insesgada conciliable

para el parámetro  $\theta$  será

$$\theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2, \quad n > 1,$$

donde  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h$ . Para ésta

$$M_{\theta}(\theta^* - \theta)^2 = \frac{2\theta^2}{n-1}.$$

La magnitud  $\frac{(n-1)\theta^*}{\theta}$  tiene distribución  $\chi^2$  con  $(n-1)$ -ésimo grado de libertad y el intervalo confidencial se construye del mismo modo que en el punto 22.1.2.

22.1.4. Estimación de la media para la varianza desconocida. El problema es el mismo que en el punto 22.1.1, no obstante el parámetro  $\sigma$  es desconocido. Como antes, la estimación  $\theta^* = \bar{x}$  no es sesgada y es conciliable. Para construir el intervalo confidencial emplemos el hecho de que la magnitud  $\frac{\bar{x} - \theta}{s}$ , donde  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2$  tiene

la distribución de Student con  $(n-1)$ -ésimo grado de libertad. La densidad de esta distribución tiene el aspecto de

$$S_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} (1+x^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Al determinar el número  $c_v$  de la relación

$$2 \int_0^{c_v} S_{n-1}(x) dx = 1 - \varepsilon$$

obtendremos

$$Q_{\theta} \left\{ -c_v < \frac{\bar{x} - \theta}{s} < c_v \right\} = 1 - \varepsilon,$$

donde  $Q_{\theta}(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{h=1}^n (x_h - \theta)^2 \right\} \times$   
 $\times dx_1 dx_2 \dots dx_n$ .

Así, pues,  $(\bar{x} - c_v s, \bar{x} + c_v s)$  es el intervalo confidencial para el parámetro  $\theta$  con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

22.1.5. Estimación conjunta de los parámetros de la media y de la varianza. En la distribución normal sean desconocidos los parámetros

$a$  y  $\sigma$ . Resolviendo la ecuación de verosimilitud obtendremos:

$$a^* = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n x_h = \bar{x}, \quad (\sigma^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n (x_h - \bar{x})^2 = s^2.$$

No obstante, la estimación  $(\sigma^*)^2$  es sesgada. Pongamos  $b^* = \frac{n}{n-1} s^2$ . Entonces  $(a^*, b^*)$  será la estimación insesgada para los parámetros  $(a, \sigma^2)$ .

La elipse óptima (véase el p. 214.5) tiene la ecuación

$$\frac{(u-a)^2}{\sigma^2} + \frac{(v-\sigma)^2}{2\sigma^4} = \frac{4}{n}.$$

La elipse de dispersión para la estimación  $(a^*, b^*)$  se da por la ecuación

$$\frac{(u-a)^2}{\sigma^2} + \frac{n-1}{n} \frac{(v-\sigma^2)^2}{2\sigma^4} = \frac{4}{n}.$$

La estimación eficiente conjunta  $(a^*, b^*)$  es igual a  $\frac{n-1}{n}$ , así que la estimación  $(a^*, b^*)$  es asintóticamente eficiente conjunta. Las magnitudes  $a^*$  y  $b^*$  son independientes.

## 22.2. Estimaciones de los parámetros de las distribuciones binomial y de Poisson

22.2.1. **Distribución binomial.** Sea que la magnitud  $\xi$  toma los valores  $0, 1, 2, \dots$  con probabilidad  $p_h(\theta) = C_N^h \theta^h (1-\theta)^{N-h}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ , respectivamente, con la particularidad de que el parámetro  $\theta$ ,  $0 < \theta < 1$ , es desconocido. Sean  $k_1, k_2, \dots, k_n$  los resultados de  $n$  observaciones independientes de la magnitud  $\xi$ . Hagamos

$$\theta^* (k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{1}{nN} \sum_{i=1}^n k_i.$$

Entonces  $\theta^*$  es la estimación insesgada del parámetro  $\theta$  para la cual

$$M_\theta (\theta^* - \theta)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{nN}.$$

Do otro lado, no es difícil calcular que

$$I(\theta) = \frac{N}{\theta(1-\theta)}.$$

De aquí sigue que  $\theta^*$  es la estimación eficiente del parámetro  $\theta$ .

Para construir el intervalo confidencial empleemos el hecho de que la magnitud  $\frac{\sqrt{nN}(\theta^* - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$  es asintóticamente normal con los pará-



metros (0, 1). Admitiendo aproximadamente que

$$Q_0 \left\{ -a_\varepsilon < \frac{1 - \sqrt{Nn}(\theta^* - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} < a_\varepsilon \right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a_\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

y hallando  $a_\varepsilon$  de la condición

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{a_\varepsilon} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \varepsilon,$$

obtendremos aproximadamente

$$Q_0 \left\{ -a_\varepsilon < \frac{1 - \sqrt{Nn}(\theta^* - \theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} < a_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon,$$

donde  $Q_0$  se determina por la igualdad

$$Q_0(k_1, k_2, \dots, k_N) = p_{k_1}(\theta) p_{k_2}(\theta) \dots p_{k_N}(\theta), \quad k_i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Entonces, los extremos del intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$  son las raíces de la ecuación cuadrática

$$(Nn \pm a_\varepsilon^2) x^2 - (2Nn\theta^* \pm a_\varepsilon^2) x + Nn\theta^{*2} = 0.$$

En particular, si en el esquema estudiado ponemos  $N = 1$ , obtendremos que el resultado de la  $i$ -ésima observación de la magnitud  $\xi$  es la aparición o la no aparición del suceso  $A = \{\xi = 1\}$ . La probabilidad de este suceso es igual a  $\theta$ . El papel de su estimación lo juega  $\theta^* = \frac{v}{n}$  donde  $v$  es el número de aquellas observaciones durante las cuales se realizó el suceso  $A$ .

**22.2.2. Distribución de Poisson.** Tenga  $\xi$  una distribución de Poisson, lo que significa que  $\xi$  puede tomar los valores  $0, 1, 2, \dots$  con las probabilidades  $p_k(\theta) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$ ,  $0 < \theta < \infty$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido.

Es una estimación insesgada del parámetro  $\theta$  la estimación

$$\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$$

donde  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son los resultados de las observaciones independientes de la magnitud  $\xi$ . En este caso,

$$M_0(\theta^* - \theta)^2 = \frac{\theta}{n}.$$

Ya que  $I(\theta) = \theta^{-1}$ ,  $\theta^*$  es una estimación eficiente. Después, la magnitud

$$\sqrt{\frac{n}{\theta}}(\theta^* - \theta)$$

es asintóticamente normal con los parámetros  $(0, 1)$ . Por eso, para  $n$  grandes se verifica la igualdad aproximada

$$Q_{\theta} \left\{ -a_{\varepsilon} < \sqrt{\frac{n}{\theta}} (\theta^* - \theta) < a_{\varepsilon} \right\} = 1 - \varepsilon,$$

donde  $a_{\varepsilon}$  se elige del mismo modo que en el p. 22.1 y la medida  $Q_{\theta}$  se determina por la fórmula

$$Q_{\theta}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{\theta^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} e^{-n\theta}, \quad k_i = 0, 1, 2, \dots$$

De aquí obtenemos que los extremos del intervalo confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$  son raíces de la ecuación cuadrática

$$x^2 - \left( 2\theta^* + \frac{\varepsilon}{n} \right) x + \theta^{*2} = 0$$

Subrayemos una vez más que aquí, del mismo modo que en el p. 22.2.1, el intervalo confidencial está construido aproximadamente, sin embargo al crecer  $n$  el error tiende a cero.

### 22.3. Estimaciones de los parámetros de la distribución uniforme y de la distribución $\Gamma$

#### 22.3.1. Distribución uniforme en el segmento con extremo fijo.

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$ , distribuida uniformemente en el segmento  $[0, \theta]$ , con el parámetro  $\theta$  desconocido. Pongamos  $x_n^* = \max_{1 \leq h \leq n} x_h$ . Es fácil ver que la estimación  $x_n^*$  es suficiente para el parámetro  $\theta$  y la función de verosimilitud

$$L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{si } \max_{1 \leq i \leq n} x_i \leq \theta, \quad x_i \geq 0; \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

adquiere el valor máximo para  $\theta = x_n^*$ . No obstante, la estimación  $x_n^*$  es sesgada. La estimación insesgada del parámetro  $\theta$  será

$$\theta^* = \frac{n+1}{n} x_n^*.$$

En este caso  $\theta^*$  tendrá la varianza menor entre todas las estimaciones insesgadas, igual a

$$M_{\theta}(\theta^* - \theta)^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

Designemos con  $Q_{\theta}(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  la medida en  $R^n$ , cuya densidad respecto de la medida de Lebesgue es igual a  $L(\theta, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Señalamos que la distribución de la magnitud  $\frac{\theta^*}{\theta}$  no depen-

de de  $\theta$ :

$$Q_0 \left\{ \frac{\theta^*}{\theta} < \alpha \right\} = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \leq 0; \\ \left( \frac{\alpha n}{n+1} \right)^n, & \text{si } \alpha \in \left[ 0, 1 + \frac{1}{n} \right]; \\ 1, & \text{si } \alpha > 1 + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Según  $\varepsilon > 0$  dado escogemos  $a_\varepsilon$  de tal modo que

$$1 - \varepsilon = Q_0 \left\{ \frac{\theta^*}{\theta} > a_\varepsilon \right\} = 1 - \left( \frac{a_\varepsilon n}{n+1} \right)^n,$$

de donde obtendremos  $a_\varepsilon = \frac{n+1}{n} \sqrt[n]{1-\varepsilon}$ . Así pues,

$$Q_0 \left\{ x_n^* < \theta < \frac{x_n^*}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \right\} = 1 - \varepsilon,$$

es decir, el intervalo  $\left( x_n^*, \frac{x_n^*}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} \right)$  es confidencial con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

**22.3.2. Distribución uniforme en un segmento con extremos desconocidos.** Si la magnitud  $\xi$  tiene una distribución uniforme en el segmento  $[\theta_1, \theta_2]$  con parámetros desconocidos  $\theta_1, \theta_2$  ( $0 < \theta_1 < \theta_2$ ), entonces las estimaciones insesgadas con la varianza mínima para los parámetros  $\theta_1$  y  $\theta_2$  serán, respectivamente, las estimaciones

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{nx_1^*}{n-1} - \frac{x_n^*}{n-1};$$

$$\hat{\theta}_2^* = \frac{nx_n^*}{n-1} - \frac{x_1^*}{n-1};$$

donde  $x_1^* = \min_{1 \leq h \leq n} x_h$ ,  $x_n^* = \max_{1 \leq h \leq n} x_h$ . Las estimaciones insesgadas con varianza mínima para el punto medio  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  y el recorrido  $\theta_2 - \theta_1$  serán, respectivamente, las estimaciones

$$\hat{\theta}_1^* = \frac{x_n^* + x_1^*}{2};$$

$$\hat{\theta}_2^* = \frac{n-1}{n-1} (x_n^* - x_1^*).$$

La distribución conjunta de las magnitudes  $x_1^*$  y  $x_n^*$  se determina por la densidad

$$f(x_1, x_2) = n(n-1)(x_2 - x_1)^{n-2}(\theta_2 - \theta_1)^{-n},$$

donde  $\theta_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \theta_2$ .

22.3.3. Estimación del parámetro de escala en la distribución  $\Gamma$ . Supongamos que la magnitud aleatoria  $\xi$  tiene una distribución  $\Gamma$

$$P_{\theta}(dx) = \begin{cases} \frac{x^{\lambda-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\lambda) \theta^{\lambda}} dx, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

con el parámetro desconocido  $\theta \in (0, \infty)$  y el conocido  $\lambda \in (0, \infty)$ . Señalemos que para  $\lambda = 1$  esta distribución se convierte en la distribución exponencial

$$P_{\theta}^0(dx) = \begin{cases} 0^{-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$ . La estimación eficiente del parámetro  $\theta$  es

$$\theta^* = \frac{1}{n\lambda} \sum_{h=1}^n x_h,$$

además

$$M_0(\theta^* - \theta)^2 = \frac{\theta^2}{n\lambda}.$$

Indiquemos, luego, que la distribución de la magnitud  $\frac{n\lambda\theta^*}{\theta}$  es también distribución  $\Gamma$  independiente de  $\theta$ :

$$Q_0 \left\{ \frac{n\lambda\theta^*}{\theta} < x \right\} = \begin{cases} \int_0^x \frac{y^{n\lambda-1} e^{-y}}{\Gamma(n\lambda)} dy, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

donde la medida  $Q_0(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$  en  $R^n$  se determina por la fórmula

$$Q_0(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \begin{cases} \prod_{h=1}^n \frac{x_h^{\lambda-1} e^{-\frac{x_h}{\theta}}}{\theta^{\lambda} \Gamma(\lambda)} dx_h, & \text{si } x_h \geq 0, h = 1, 2, \dots, n; \\ 0 & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

De este modo, al obtener los números  $a_1$  y  $a_2$  de la correlación

$$Q_0 \left\{ a_1 + n\lambda < \frac{n\lambda\theta^*}{\theta} < a_2 + n\lambda \right\} = 1 - \varepsilon,$$

determinamos en intervalo confidencial  $\left( \frac{n\lambda\theta^*}{n\lambda + a_2}, \frac{n\lambda\theta^*}{n\lambda + a_1} \right)$  con coeficiente de confianza  $1 - \varepsilon$ .

22.3.4. Estimación del valor medio de la distribución  $\Gamma$ . Supongamos otra vez que la magnitud aleatoria  $\xi$  tiene a título de su distribución la distribución  $\Gamma^\theta$

$$P_\theta(dx) = \begin{cases} \frac{x^{\theta-1} e^{-x}}{\Gamma(\theta)} dx, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

con el parámetro desconocido  $\theta$ ,  $0 < \theta < \infty$ . No es difícil calcular que en este caso

$$I(\theta) = \frac{d^2 \log \Gamma(\theta)}{d\theta^2}.$$

El método de momentos lleva a la estimación  $\theta^* = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son observaciones independientes de la magnitud aleatoria  $\xi$ . Para ella  $M_0 \theta^* = \theta$  y  $M_0 (\theta^* - \theta)^2 = \frac{\theta}{n}$ . La eficiencia de la estimación  $\theta_1^*$  se determina por la fórmula

$$\text{eff}(\theta_1^*) = \frac{1}{\theta \frac{d^2 \log \Gamma(\theta)}{d\theta^2}},$$

así que ésta no depende de  $n$  y siempre es menor que uno. La ecuación de verosimilitud tiene el aspecto de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log x_k - \frac{d \log \Gamma(\theta)}{d\theta} = 0.$$

La única raíz positiva de esta ecuación define la estimación de verosimilitud máxima  $\theta^*$ . Es asintóticamente eficiente y es asintóticamente normal con parámetros  $(\theta, [n \frac{d^2 \log \Gamma(\theta)}{d\theta^2}]^{-1/2})$ .

## MÉTODO DE LOS CUADRADOS MÍNIMOS

## 23.1. Estimaciones del método de los cuadrados mínimos

**23.1.1. Principio de los cuadrados mínimos.** Sean representados los resultados de las observaciones de algún parámetro desconocido  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)'$  del cual conocemos que puede tomar los valores del dominio  $\Theta$  del espacio  $m$ -dimensional  $R^m$ , en forma de

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1(\theta, \varepsilon_1); \\ y_2 &= f_2(\theta, \varepsilon_2); \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(\theta, \varepsilon_n), \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

donde  $f_k(\theta, \varepsilon_k)$  son funciones conocidas salvo el parámetro  $\theta$ ;  $\varepsilon_k$  es el error (ruido) de la  $k$ -ésima observación. Se supone que la esperanza matemática del vector  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$  de los errores de la observación es igual al vector nulo:  $M\varepsilon = \bar{0}$ , lo que corresponde a la suposición sobre la ausencia de errores sistemáticos en la observación.

En la estadística matemática se llama método de los cuadrados mínimos el método de estimación estadística puntual (por puntos) fundado en el siguiente principio de los cuadrados mínimos: a título de estimación del parámetro desconocido  $\theta$  en (1.1) se elige tal valor  $\hat{\theta} \in \Theta$  para el cual se logra el mínimo de la suma de cuadrados:

$$s(\hat{\theta}) = \sum_{k=1}^n [y_k - f_k(\hat{\theta}, \varepsilon_k)]^2. \quad (1.2)$$

es decir,

$$\sum_{k=1}^n [y_k - f_k(\hat{\theta}, \varepsilon_k)]^2 = \min_{\theta \in \Theta} \sum_{k=1}^n [y_k - f_k(\theta, \varepsilon_k)]^2. \quad (1.3)$$

La estimación  $\hat{\theta}$  que minimiza la suma de cuadrados  $s(\hat{\theta})$  se llama estimación del método de los cuadrados mínimos o estimación MCM del parámetro  $\theta$ .

Como método de estimación estadística puntual, el método de los cuadrados mínimos se utiliza ampliamente al manejar los resultados de mediciones, en el análisis de regresión, la planificación de experimentos, la econometría, etc.

A diferencia, por ejemplo, del método de verosimilitud máxima el empleo del método de los cuadrados mínimos no supone la infor-

nación apriorística sobre el tipo de la distribución de magnitudes aleatorias  $\varepsilon_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Sin embargo, en un modelo tan general como (1.1) las estimaciones MCM del parámetro no poseen propiedades óptimas, hasta cierto grado buenas, excepto el caso cuando  $\varepsilon_k$  están distribuidas normalmente.

**23.1.2. Modelo lineal general.** Existe una situación prácticamente importante cuando las estimaciones MCM, poseen, incluso para pequeños volúmenes de muestras, la propiedad de ser óptimas, lo que consiste en que éstas son insesgadas y tienen varianza mínima. Este es el caso del modelo lineal cuando  $\Theta \in R^m$ ,  $m < n$  o

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_{11}\theta_1 + x_{12}\theta_2 + \dots + x_{1m}\theta_m + \varepsilon_1; \\ y_2 &= x_{21}\theta_1 + x_{22}\theta_2 + \dots + x_{2m}\theta_m + \varepsilon_2; \\ &\dots \\ y_n &= x_{n1}\theta_1 + x_{n2}\theta_2 + \dots + x_{nm}\theta_m + \varepsilon_n \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

o en forma matricial

$$y = X\theta + \varepsilon, \quad (1.5)$$

donde  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  es el vector columna de las observaciones,  $X = \{x_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, m < n\}$ , la matriz de coeficientes conocidos,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)'$ , el vector columna de los parámetros desconocidos y a estimar,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)'$ , es el vector columna de los errores aleatorios.

De ordinario se supone que  $M\varepsilon = 0$  y  $C(\varepsilon) = M[\varepsilon\varepsilon'] = \sigma^2 I$ , donde  $\sigma^2$  es la varianza (desconocida) de las magnitudes aleatorias incorrelacionadas igualmente distribuidas  $\varepsilon_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ , ya que si  $M[\varepsilon\varepsilon'] = \delta^2 V$ , donde  $V$  es una matriz conocida, la sustitución de

$$y_0 = V^{-\frac{1}{2}} y, \quad x_{0j} = V^{-\frac{1}{2}} x_j, \quad \varepsilon_0 = V^{-\frac{1}{2}} \varepsilon$$

lleva a  $M[\varepsilon_0\varepsilon_0'] = \sigma^2 I$ . La estimación del parámetro  $\theta$  en (1.5) según el método de los cuadrados mínimos consiste en determinar el vector  $\hat{\theta}$  que minimiza la suma de los cuadrados

$$s(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij}\hat{\theta}_j \right\}^2 = (y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta}) \quad (1.6)$$

**23.1.3. Estimaciones MCM en el modelo lineal regular.** Sea en el modelo lineal (1.5) del  $X'X \neq 0$ . Este modelo se llama regular.

Es estimación MCM  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  la solución del sistema de ecuaciones normales

$$X'X\hat{\theta} = X'y, \quad (1.7)$$

es decir,

$$\hat{\theta} = (X', X)^{-1} X'y, \quad (1.8)$$

además,  $M\hat{\theta} = \theta$ ,  $M(\hat{\theta}\hat{\theta}') - (\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)' = \sigma^2 (X'X)^{-1}$ .

La estimación insesgada para  $\sigma^2$  es

$$s^2 = \frac{1}{n-m} (y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta}) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij}\hat{\theta}_j \right]^2, \quad (1.9)$$

23.1.4. **Mediciones directas.** Los resultados de las mediciones independientes reiteradas se representan en forma de

$$y_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n},$$

donde  $\theta$  es la magnitud que se mide,  $\varepsilon_i$  son los errores de las mediciones. La matriz  $X$  en el modelo lineal (1.5) para el caso dado representa un vector columna de unidades. Si  $D\varepsilon_h = \sigma^2$  hablan de las mediciones equiexactas directas.

La estimación del MCM  $\hat{\theta}$  para mediciones equiexactas directas tiene el aspecto de

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad D\hat{\theta} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (1.10)$$

La estimación insesgada para la varianza  $\sigma^2$  tiene forma de

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\theta})^2.$$

Si  $D\varepsilon_h = \frac{\sigma^2}{p_h}$ , donde  $p_h$  son conocidos y, hablando en general, son distintos, se habla de mediciones no equiexactas directas.

La estimación MCM  $\hat{\theta}$  para las mediciones no equiexactas directas tiene el aspecto

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i y_i}{\sum_{i=1}^n p_i}, \quad (1.11)$$

además,

$$D\hat{\theta} = \frac{\sigma^2}{\sum_{h=1}^n p_h}.$$

a estimación insesgada para  $\sigma^2$  es

$$s^2 = \frac{1}{(n-1) \sum_{h=1}^n p_h} \sum_{h=1}^n p_h (y_h - \hat{\theta})^2. \quad (1.12)$$

23.1.5. **Estimaciones MCM en el modelo lineal degenerado.** Si el modelo lineal (1.5) es degenerado, es decir,  $\det X'X = 0$ , es cómodo definir las estimaciones MCM en términos de las matrices inversas generalizadas, también llamadas pseudoinversas.



Sea  $\Pi$  una matriz  $m \times m$  de proyección que se define unívocamente por las desigualdades

$$\Pi X'X - X'X\Pi = 0, \quad \Pi^2 = \Pi.$$

Se llama **seudoinversa (inversa generalizada)** de la matriz  $X'X$  la matriz  $(X'X)^{(-)}$  definida por la igualdad

$$(X'X)^{(-)} = (X'X + \Pi)^{-1} - \Pi. \quad (1.13)$$

Si  $\det X'X \neq 0$ ,  $\Pi = 0$  y, por consiguiente,  $(X'X)^{(-)} = (X'X)^{-1}$ , es decir, en este caso la matriz pseudoinversa coincide con la inversa.

Si el modelo lineal es degenerado, el método de los cuadrados mínimos define el subespacio de vectores en el que se consigue el mínimo de la suma de cuadrados  $s(\theta)$  en (1.6) y el cual tiene el aspecto

$$(X'X)^{(-)}X'y + \Pi h, \quad (1.14)$$

donde  $h$  es un vector arbitrario de  $R^m$ . Por esta causa, en el modelo lineal degenerado se estima no el parámetro  $\theta$ , sino una función lineal  $B\hat{\theta}$  de este parámetro, donde  $B = \{b_{ij}, i=1, k, j=1, m\}$  es la matriz  $k \times m$  definida,  $k$  es un número arbitrario, pero fijado.

La función lineal  $B\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  se llama **estimadora** si  $B\Pi = 0$ . La estimación MCM  $B\hat{\theta}$  de la función estimadora  $B\theta$  tiene por expresión

$$B\hat{\theta} = B(X'X)^{(-)}X'y, \quad (1.15)$$

además  $MB\hat{\theta} = B\theta$ .  $M \{B\hat{\theta} - B\theta\} [B\hat{\theta} - B\theta]' = \sigma^2 B(X'X)^{(-)}B'$ .

La estimación insesgada para  $\sigma^2$  es

$$s^2 = \frac{1}{n-r} (y - X\hat{\theta})' (y - X\hat{\theta}) = \frac{1}{n-r} \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij}\hat{\theta}_j \right]^2, \quad (1.16)$$

donde  $\hat{\theta} = (X'X)^{(-)}X'y$ ,  $r$  es el rango de la matriz  $X'X$ .

Si  $B_1\hat{\theta}$  y  $B_2\hat{\theta}$  son dos funciones estimadoras,

$$\text{Cov}(B_1\hat{\theta}, B_2\hat{\theta}) = \sigma^2 B_1(X'X)^{(-)}B_2'. \quad (1.17)$$

**23.1.6. Modelos lineales con parámetros aleatorios.** Analicemos el modelo lineal de la forma

$$y = X\theta + \varepsilon, \quad (1.18)$$

donde  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)'$  es un vector de los valores a observar,  $X = \{x_{ij}, j=1, n, i=1, m\}$ , una matriz de coeficientes conocidos,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)'$ , un vector aleatorio desconocido con esperanza matemática  $M\theta = a$  y una matriz de covariación  $M(\theta - a)(\theta - a)' = C$ ,  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$  es un vector de errores independiente de  $\theta$ ,  $M\varepsilon = 0$ ,  $M\varepsilon\varepsilon' = \sigma^2 I$ .

El problema de la estimación del vector desconocido  $\theta$  por el método de los cuadrados mínimos consiste en determinar la función lineal  $\hat{\theta}$  del vector  $y$  de los valores a observar, en la cual la magnitud

aleatoria

$$s(\hat{\theta}) = (y - X\hat{\theta})' (y - X\hat{\theta}) = \sum_{j=1}^n [y_j - \sum_{i=1}^m x_{ij}\hat{\theta}_i]^2 \quad (1.19)$$

tiene la esperanza matemática mínima. Si el vector  $a$  de las esperanzas matemáticas del parámetro  $\theta$  es conocido, entonces

$$\hat{\theta} = (I - L)X a + L y, \quad (1.20)$$

donde  $L = CX'(\sigma^2 I + X'CX)^{-1}$ , además,  $M\hat{\theta} = a$ ,  $M(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)' = C - CX'(\sigma^2 I + X'CX)^{-1}XC$ .

Si el vector  $a$  es desconocido, entonces

$$\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'y \quad (1.21)$$

con la particularidad de que  $M[\hat{\theta} - \theta](\hat{\theta} - \theta)' = \sigma^2(X'X)^{-1}$  y la estimación MCM del parámetro aleatorio  $\theta$  es la misma que en el caso del parámetro determinado.

Esto es cierto, si incluso  $\det X'X = 0$ . Naturalmente, aquí, como en el caso determinado, hay que considerar las funciones lineales a estimar del parámetro  $\theta$  y en vez de  $(X'X)^{-1}$  usar la matriz pseudoinversa  $(X'X)^{(-1)}$ .

**23.1.7. Propiedades de las estimaciones MCM.** Las estimaciones MCM en el modelo lineal general

$$y = X\theta + \varepsilon, \quad M\varepsilon = 0, \quad \text{Cov } \varepsilon = \sigma^2 I, \quad \det X'X \neq 0 \quad (1.22)$$

poseen las siguientes propiedades.

a) La estimación MCM  $\hat{\theta}$  es insesgada.

b) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(X'X)$  es una matriz no degenerada, la estimación

MCM  $\hat{\theta}$  es conciliable y el vector  $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$  es asintóticamente normal.

c) **Teorema de Gauss-Márkov.** La estimación MCM  $\hat{\theta}$  tiene varianza mínima en la clase de todas las estimaciones lineales insesgadas del parámetro  $\theta$ , con la particularidad de que  $\hat{\theta}$  e  $y - X\hat{\theta}$  son incorrelacionados.

En la clase de las estimaciones insesgadas la estimación MCM  $\hat{\theta}$  en el modelo lineal no posee, hablando en general, varianza mínima.

Si el vector  $\varepsilon$  en (1.22) está distribuido normalmente, la estimación MCM  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$ , además de las propiedades a), b), c), posee las siguientes.

d)  $\hat{\theta}$  es la estimación del método de verosimilitud máxima.

e)  $\hat{\theta}$  tiene varianza mínima en la clase de todas las estimaciones insesgadas del parámetro  $\theta$ .

f)  $\hat{\theta}$  tiene distribución normal con esperanza matemática  $\theta$  y matriz de covariación  $\sigma^2(X'X)^{-1}$ .

g) La magnitud aleatoria

$$\frac{(y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta})}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \sum_{j=1}^m x_{ij}\hat{\theta}_j \right]^2$$

tiene distribución  $\chi^2$  con  $n - m$  grados de libertad.

h) Las estimaciones  $\hat{\theta}$  y  $s^2 = \frac{1}{n-m} (y - X\hat{\theta})'(y - X\hat{\theta})$  son suficientes para la estimación de  $\theta$  y  $\sigma^2$ .

i)  $\hat{\theta}$  e  $y - X\hat{\theta}$  son independientes.

### 23.2. Modelos lineales de regresión

**23.2.1. Nivelación de los datos.** En las aplicaciones de la estadística a menudo se exige estimar el carácter de la dependencia entre las variables estadísticas observadas, por ejemplo, entre los parámetros de los procesos tecnológicos y la producción acabada, la luminosidad de las estrellas y sus dimensiones, la cantidad de precipitaciones atmosféricas en sector dado y el rendimiento de la cosecha en éstos, etc.

En este caso, el problema fundamental consiste en la nivelación (alisamiento) de los datos experimentales con ayuda de curvas especialmente elegidas llamadas líneas o superficies de regresión que con mayor o menor seguridad caracterizan la dependencia de correlación entre las variables en observación.

Sean  $\eta$  y  $\xi$  dos magnitudes aleatorias (hablando en general, dependientes).

**Definición.** Las funciones

$$f_{\eta/\xi}(x) = M[\eta/\xi = x], \quad g_{\xi/\eta}(y) = M[\xi/\eta = y]$$

se llaman regresiones (teóricas) de  $\eta$  en  $\xi$  y de  $\xi$  en  $\eta$ , respectivamente.

En el caso de regresión de  $\eta$  en  $\xi$ , por ejemplo, la magnitud aleatoria  $\xi$  se considera independiente y se llama variable de regresión.

La regresión tiene la siguiente propiedad de ser óptima: las magnitudes  $M[\eta - \varphi(\xi)]^2$  y  $M[\xi - \psi(\eta)]^2$  alcanzan el mínimo con  $\varphi(x) = f_{\eta/\xi}(x)$  y  $\psi(y) = g_{\xi/\eta}(y)$ , respectivamente.

En calidad de estimaciones estadísticas de las regresiones teóricas se eligen, como regla, las funciones linealmente dependientes de los parámetros desconocidos a estimar. Con este fin a menudo se usan diferentes escalas funcionales.

Las funciones más usadas en el análisis de regresión estadística son

$$y = \theta_0 + \theta_1 x;$$

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \dots + \theta_k x^k;$$

$$y = \theta_0 + \theta_1 \ln x;$$

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 \frac{1}{x};$$

$$y = \frac{1}{\theta_0 + \theta_1 x};$$

$$y = \frac{i}{\theta_0 + \theta_1 x + \dots + \theta_n x^n}$$

$$\ln y = \theta_0 + \theta_1 x;$$

$$\ln y = \theta_0 + \theta_1 \ln x.$$

23.2.2. Estimación de los parámetros de regresión lineal. Sean  $x_i$  el valor de la variable de regresión e  $y_i$  el valor de la variable dependiente que se obtiene en la  $i$ -ésima observación,  $i = \overline{1, n}$ . El modelo lineal de regresión puede ser representado en la forma

$$p(y_i) = r(\theta, x_i) + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

donde  $p(y)$  y  $r(\theta, x)$  son funciones que se consideran preferibles para describir la relación estadística entre la variable de regresión y la variable dependiente, con la particularidad de que  $r(\theta, x)$  es lineal según  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$ ,  $\varepsilon_i$  son magnitudes aleatorias incorrelacionadas con esperanzas matemáticas nulas.

La estimación del vector  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$  en (2.1) puede ser obtenida por el método de los cuadrados mínimos como el vector que minimiza la suma de cuadrados

$$s(\theta) = \sum_{i=1}^n [p(y_i) - r(\theta, x_i)]^2. \quad (2.2)$$

El modelo de regresión (2.1) es un caso particular del modelo lineal inesgado  $y = X\theta + \varepsilon$ , det  $X'X \neq 0$ . Por eso, si la matriz de covarianza  $\text{Mse}' = \sigma^2 I$ , entonces la estimación MCM  $\hat{\theta}$  del parámetro  $\theta$  en  $r(\theta, x)$  es la solución del sistema de las ecuaciones normales  $X_r' X_r \hat{\theta} = X_r' y_p$ , y, por consiguiente,

$$\hat{\theta} = (X_r' X_r)^{-1} X_r' y_p, \quad (2.3)$$

donde  $y_p = (p(y_1), p(y_2), \dots, p(y_n))$ . La función  $y = p^{-1}(r(\theta, x))$  describe la línea de regresión, estadística o muestral.

EJEMPLO 1. Regresión lineal simple. Sean  $p(y) = y$ ,  $r(\theta, x) = \theta_1 + \theta_2 x$ . Entonces

$$X_r = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{pmatrix}.$$

La línea de regresión muestral es

$$y = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x.$$

**EJEMPLO 2. Regresión polinomial.** Sean  $p(y) = y$ ,  $r(\theta, x) = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 x^2 + \dots + \theta_m x^{m-1}$ . Entonces

$$X_r = \begin{pmatrix} 1 & x_1 x_1^2 & \dots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 x_2^2 & \dots & x_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n x_n^2 & \dots & x_n^{m-1} \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dots \\ \theta_m \end{pmatrix}.$$

La estimación MCM  $\hat{\theta}$  es la solución del sistema de las ecuaciones normales

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{m-1} \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum x_i^{m-1} & \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \dots & \sum x_i^{2(m-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^{m-1} y_i \end{pmatrix}.$$

La línea de regresión muestral es

$$y = \hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x + \hat{\theta}_3 x^2 + \dots + \hat{\theta}_m x^{m-1}.$$

$\infty$  **EJEMPLO 3. Regresión exponencial.** Sean  $p(y) = \ln y$ ,  $r(\theta, x) = \theta_1 + \theta_2 x$ . Entonces

$$y_p = \begin{pmatrix} \ln y_1 \\ \ln y_2 \\ \dots \\ \ln y_n \end{pmatrix}, \quad X_r = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \frac{n \sum x_i \ln y_i - \sum x_i \sum \ln y_k}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ \frac{\sum x_i^2 \sum \ln y_k - \sum x_i \sum x_k \ln y_k}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \end{pmatrix}.$$

La línea de regresión muestral es

$$y = e^{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2 x}.$$

**23.2.3. Regresión polinomial.** La aplicación práctica de la regresión polinomial tiene un defecto esencial: el aumento del grado de polinomio de alisamiento exige realizar de nuevo todos los cálculos.

En este caso es útil emplear los polinomios ortogonales de Chebichev. En vez de estimar el parámetro  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$  en el

modelo

$$y_i = \theta_1 + \theta_2 x_i + \theta_3 x_i^2 + \dots + \theta_m x_i^{m-1} + v_i$$

se estima el parámetro  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1})'$  en el modelo

$$y_i = \alpha_0 \varphi_0(x_i) + \alpha_1 \varphi_1(x_i) + \dots + \alpha_{m-1} \varphi_{m-1}(x_i) + v_i, \quad (2.4)$$

donde  $\varphi_k(x)$  son polinomios de grado  $k$ , que poseen la siguiente propiedad de ortogonalidad:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_k(x_i) \varphi_l(x_i) = 0, \quad k \neq l.$$

El modelo (2.4) en forma matricial tiene el aspecto

$$y = \Phi \alpha + v, \quad (2.5)$$

donde

$$\Phi = \{\varphi_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, m-1}\}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_j(x_i)$$

Para el parámetro  $\alpha$  la estimación MCM tiene la forma

$$\hat{\alpha} = (\Phi' \Phi)^{-1} \Phi' y, \quad (2.6)$$

es decir,

$$\hat{\alpha}_h = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi_h(x_i) y_i}{\sum_{i=1}^n \varphi_h^2(x_i)}.$$

Los polinomios ortogonales de Chébishev  $\varphi_h(x)$  se calculan por la fórmula

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_{k+1}(x) = \frac{\det M_k(x)}{\det M_k}, \quad k = \overline{0, m-2}, \quad (2.7)$$

donde

$$M_k = \begin{pmatrix} n \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^k \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^k & \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} & \sum_{i=1}^n x_i^{k+2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2k} \end{pmatrix};$$

$$M_h(x) = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{h+1} \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{h+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_i^h & \sum_{i=1}^n x_i^{h+1} & \dots & \sum_{i=1}^n x_i^{2h+1} \\ 1 & x & \dots & x^{h+1} \end{pmatrix}$$

o bien de las relaciones recurrentes  $\varphi_0(x) \equiv 1$ ,

$$\varphi_h(x) = x^h - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^h \varphi_{h-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_{h-1}^2(x_i)} \varphi_{h-1}(x \dots) - \dots - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^h \varphi_0(x_i)}{\sum_{i=1}^n \varphi_0^2(x_i)} \varphi_0(x). \quad (2.8)$$

EJEMPLO 4.

$$\varphi_1(x) = \frac{\det \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ 1 & x \end{vmatrix}}{\det |n|} = x - \bar{x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\det \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= x^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) x_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} (x - \bar{x}) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n},$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$



## ESTADÍSTICA DE LOS PROCESOS ALEATORIOS

## 24.1. Distinción de las hipótesis

Al distinguir las hipótesis para los procesos aleatorios se observa la trayectoria del proceso aleatorio  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ ; respecto de las distribuciones de dimensión finita hay algunas hipótesis una de las cuales debe ser elegida a base de la trayectoria en observación. Actualmente está elaborada la solución del problema más simple, o sea, de dos hipótesis elegir una. Una aplicación importante de este problema es la detección de la señal en el fondo de un ruido. Por ejemplo, al receptor llega una información. Es necesario determinar si existe o no en la información llegada una señal útil en el fondo de un ruido aleatorio.

24.1.1. Formulación general del problema de la distinción de dos hipótesis referentes a la distribución del proceso aleatorio. Se observa la trayectoria del proceso aleatorio  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$  sobre la cual es conocido que debe sin falta pertenecer a cierto espacio de las funciones  $F_{[0, T]}$  dadas en  $[0, T]$  (por ejemplo, al espacio de funciones continuas o al espacio de funciones sin discontinuidades de primera especie, etc.) Respecto del proceso aleatorio hay dos hipótesis  $H_i$  ( $i = 1, 2$ ). Según la hipótesis  $H_i$  la medida correspondiente al proceso en el espacio  $F_{[0, T]}$  es  $\mu_i$  (ésta está dada en el  $\sigma$ -álgebra generada por conjuntos cilíndricos, véase el cap. 9) Valiéndose de la observación hay que resolver qué hipótesis es preferible.

Sea  $R$  cierta regla según la cual se acepta una u otra hipótesis. La forma más general de esta regla es la siguiente: para cada trayectoria posible  $x(\cdot)$  debe estar prefijada la probabilidad  $p(x(\cdot))$  ( $p$  es la funcional medible de la trayectoria) de aceptar la hipótesis  $H_1$ , si se observa la trayectoria  $x(\cdot)$ ;  $1 - p(x(\cdot))$  es la probabilidad de aceptar la hipótesis  $H_2$ . Esta regla se caracteriza por las probabilidades de errores  $\alpha_{12} = P(H_1/H_2)$ , es decir, aceptar la hipótesis  $H_1$  si  $H_2$  es cierta;  $\alpha_{21} = P(H_2/H_1)$ , o sea, aceptar la hipótesis  $H_2$  si  $H_1$  es cierta. Las expresiones para  $\alpha_{12}$  y  $\alpha_{21}$  están dadas por las fórmulas

$$\alpha_{12} = \int p(x(\cdot)) \mu_2(dx);$$

$$\alpha_{21} = \int (1 - p(x(\cdot))) \mu_1(dx).$$

Es natural buscar tales reglas que hagan mínimas las probabilidades de errores. Como veremos más adelante, en muchos casos podemos

limitarnos a las reglas no randomizadas para las cuales  $p(x(\cdot))$  toma sólo los valores 0 ó 1. Entonces,  $F_{[0, T]}$  se parte en dos subconjuntos:  $G_1$  y  $G_2 = F_{[0, T]} - G_1$ ; si  $x(\cdot) \in G_1$ , se toma la hipótesis  $H_1$ ; si  $x(\cdot) \in G_2$ , se adopta  $H_2$ . Las probabilidades de errores están dadas por la expresión

$$\alpha_{ij} = \int \mu_j(G_i) \quad (i, j = 1, 2).$$

**24.1.2. Continuidad absoluta de las medidas en los espacios funcionales.** Al resolver los problemas de estadística de los procesos aleatorios juega un papel importante la continuidad absoluta o la singularidad de las medidas correspondientes a los procesos en observación. Sean  $F_{[0, T]}$  un espacio fijado;  $\mathfrak{F}[0, T]$ , una  $\sigma$ -álgebra de los subconjuntos de este espacio, generada por conjuntos cilíndricos;  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , dos medidas en  $\mathfrak{F}[0, T]$  que corresponden a los procesos aleatorios (o al mismo proceso para distintas hipótesis). Las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son singulares entre sí (ortogonales) si existen tales conjuntos disjuntos  $G_i \in \mathfrak{F}[0, T]$  que  $\mu_1(G_2) = \mu_2(G_1) = 0$ . La medida  $\mu_2$  es absolutamente continua respecto de  $\mu_1$ , si  $\mu_2(C) = 0$  para todas las  $C \in \mathfrak{F}[0, T]$  para las cuales  $\mu_1(C) = 0$ . En este caso existe una función  $\mathfrak{F}[0, T]$ -medible  $\rho(x(\cdot))$  tal que para cada  $C \in \mathfrak{F}[0, T]$

$$\mu_2(C) = \int_C \rho(x) \mu_1(dx). \quad (1.1)$$

Esta función  $\rho(x(\cdot))$  se llama densidad de la medida  $\mu_2$  respecto de  $\mu_1$ . Si  $\mu_1$  es también absolutamente continua respecto de  $\mu_2$ , las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se llaman equivalentes, cuando y sólo cuando la función  $\rho(x(\cdot))$  de (1.1) sea positiva casi en todos los puntos de la medida  $\mu_1$ . En este caso

$$\mu_1(C) = \int_C \frac{1}{\rho(x)} \mu_2(dx). \quad (1.2)$$

Para cualesquiera dos medidas (finitas)  $\mu_1$  y  $\mu_2$  se pueden indicar tales conjuntos disjuntos dos a dos  $\Delta_1, \Delta_2$  y  $\Delta$  que  $\mu_1(\Delta_2) = \mu_2(\Delta_1) = 0$ , y que en  $\Delta$  estas medidas son equivalentes, es decir, existe tal función medible  $\rho(x(\cdot))$ , definida en  $\Delta$ , que para cada  $C$

$$\left. \begin{aligned} \mu_2(C \cap \Delta) &= \int_{C \cap \Delta} \rho(x) \mu_1(dx); \\ \mu_1(C \cap \Delta) &= \int_{C \cap \Delta} \rho^{-1}(x) \mu_2(dx). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

**24.1.3. El criterio de Neumann — Pearson** da la regla que distingue las hipótesis y según la cual para  $\alpha_{12} \leq \varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ )  $\alpha_{21}$  es la mínima. La regla mencionada es óptima en cierto sentido. Efectivamente, sea que existe una regla con probabilidades de errores  $\bar{\alpha}_{12}$  y  $\bar{\alpha}_{21}$ .

Con ayuda del criterio de Neumann—Pearson se puede construir una regla según la cual  $\alpha_{12} \leq \bar{\alpha}_{12}$  y  $\alpha_{21}$  es la mínima posible (es decir,  $\alpha_{21} \leq \bar{\alpha}_{21}$ ).

Describamos el criterio en función de las propiedades de continuidad absoluta mutua de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , correspondientes al proceso en observación según las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$ .

a. Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  ortogonales. Entonces se puede indicar tal conjunto  $G_1$  que  $\mu_1(G_1) = 1$ ,  $\mu_2(G_1) = 0$ . Si  $x(\cdot) \in G_1$ , aceptamos la hipótesis  $H_1$ ; si  $x(\cdot) \in G_2$  aceptamos la hipótesis  $H_2$ . Las probabilidades de errores son

$$\alpha_{12} = \mu_2(G_1) = 0,$$

$$\alpha_{21} = \mu_1(F_{[0, T]} - G_1) = 1 - \mu_1(G_1) = 0.$$

De este modo, en el caso considerado puede existir una regla infalible de distinción de las hipótesis, es decir, tal regla con la que  $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ .

b. Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  equivalentes y sea  $\rho(x(\cdot))$  la densidad de  $\mu_2$  respecto de  $\mu_1$ ,  $\rho(x(\cdot)) > 0$  para casi todas las  $x(\cdot)$  según la medida  $\mu_1$ . Indiquemos

$$R_\lambda = \{x(\cdot) : \rho(x(\cdot)) < \lambda\}; \quad \Gamma_\lambda = \{x(\cdot) : \rho(x(\cdot)) = \lambda\}.$$

Satisfaga  $\bar{\lambda}$  la relación

$$\mu_2(R_{\bar{\lambda}}) \leq \varepsilon, \quad \mu_2(R_{\bar{\lambda}} \cup \Gamma_{\bar{\lambda}}) \geq \varepsilon.$$

Para  $\varepsilon \in (0, 1)$  esta  $\bar{\lambda}$  existe, ya que para  $\lambda$  creciente desde 0 hasta  $\infty$ ,  $\mu_1(R_\lambda)$  crece de 0 hasta 1. Analicemos tres subcasos:

1)  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}}) = \varepsilon$ . Pongamos  $G_1 = R_{\bar{\lambda}}$ ,  $G_2 = F_{[0, T]} - G_1$ , en este caso  $\alpha_{12} = \mu_2(R_{\bar{\lambda}}) = \varepsilon$ ,

$$\alpha_{21} = \mu_1(F_{[0, T]} - G_1) = 1 - \mu_1(R_{\bar{\lambda}});$$

2)  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}}) < \varepsilon$ ,  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}} \cup \Gamma_{\bar{\lambda}}) = \varepsilon$ , en este caso  $G_1 = R_{\bar{\lambda}} \cup \Gamma_{\bar{\lambda}}$ ,  $G_2 = F_{[0, T]} - G_1$ ,  $\alpha_{12} = \varepsilon$ ,  $\alpha_{21} = 1 - \mu_1(R_{\bar{\lambda}}) - \mu_1(\Gamma_{\bar{\lambda}})$ ;

3)  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}}) < \varepsilon$ ,  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}} \cup \Gamma_{\bar{\lambda}}) > \varepsilon$ , entonces se puede construir el siguiente criterio randomizado, dado por la funcional de probabilidad  $p(x(\cdot))$ :  $p(x(\cdot)) = 1$ , si  $x(\cdot) \in R_{\bar{\lambda}}$ ;  $p(x(\cdot)) = 0$ , si  $x(\cdot) \in$

$\in F_{[0, T]} - R_{\bar{\lambda}} - \Gamma_{\bar{\lambda}}$ ,  $p(x(\cdot)) = \frac{\varepsilon - \mu_2(R_{\bar{\lambda}})}{\mu_2(\Gamma_{\bar{\lambda}})}$ , si  $x(\cdot) \in \Gamma_{\bar{\lambda}}$ . Cabe señalar

que cuando la medida  $\mu_2$  (y también  $\mu_1$ ) es continua, es decir, no existen trayectorias con probabilidad positiva, entonces en el caso 3) también se puede construir el criterio no randomizado: existe tal  $D \subset \Gamma_{\bar{\lambda}}$  que  $\mu_2(D) = \varepsilon - \mu_2(R_{\bar{\lambda}})$ . Poniendo  $G_1 = R_{\bar{\lambda}} \cup D$ ,  $G_2 = F_{[0, T]} - R_{\bar{\lambda}} - D$  obtenemos la regla con  $\alpha_{12} = \varepsilon$  y  $\alpha_{21}$  mínimo,

c. En el caso general se pueden indicar tales  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta$  que se verifiquen las igualdades (1.3) y  $\mu_2(\Delta_1) = \mu_1(\Delta_2) = 0$ . Sea

$$R_\lambda = \{x(\cdot) \in \Delta : \rho(x(\cdot)) < \lambda\} \cup \Delta_1; \Gamma_\lambda = \{x(\cdot) \in \Delta : \rho(x(\cdot)) = \lambda\}.$$

Si  $\varepsilon \geq 1 - \mu_2(\Delta_2)$ , entonces, eligiendo  $G_1 = \Delta_1 \cup \Delta$ ,  $G_2 = \Delta_2$ , tendremos

$$\begin{aligned} \alpha_{12} &= \mu_2(\Delta_1 \cup \Delta) = 1 - \mu_2(\Delta_2) \leq \varepsilon, \\ \alpha_{21} &= \mu_1(\Delta_2) = 0. \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon < 1 - \mu_2(\Delta_2)$ , elegimos  $\bar{\lambda}$  de tal modo que  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}}) \leq \varepsilon$ ,  $\mu_2(R_{\bar{\lambda}} \cup \Gamma_{\bar{\lambda}}) \geq \varepsilon$  y procedemos del mismo modo que en el caso b.

Así, pues, para construir el mejor criterio según Neumann-Pearson es necesario saber construir los conjuntos  $\Delta_1$  en los cuales están concentradas las medidas singulares entre sí y, en el caso de las medidas absolutamente continuas, la densidad de una medida respecto de la otra, así como hay que conocer la distribución de  $\rho(x(\cdot))$  para una u otra hipótesis.

## 24.2. Distinción de las hipótesis para los procesos con incrementos independientes

24.2.1. Designaciones principales. Sea  $x(t)$  la trayectoria que se observa del proceso y que está determinada en  $[0, T]$ ,  $x(t) \in R^1$ ,  $x(\cdot) \in D_{[0, T]}$  donde  $D_{[0, T]}$  es el espacio de las funciones sin discontinuidades de segunda especie. Según la hipótesis,  $H_k$  ( $k = 1, 2$ )  $x(t)$  es un proceso continuo estocástico con incrementos independientes cuya función característica se da por la fórmula

$$\begin{aligned} M \exp \{i z x(t)\} &= \exp \left\{ i z \gamma_k(t) - \frac{1}{2} b_k(t) z^2 + \right. \\ &\quad \left. + \int \left( e^{i z x} - 1 - \frac{i z x}{1 + x^2} \right) \Pi_k(t, dx) \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde las funciones  $\Pi_k(t, A)$  para todas las  $A$  borelianas que están a una distancia positiva del punto 0, son continuas y no decrecen,  $\gamma_k(t)$  son continuas,  $\gamma_k(0) = b_k(0) = \Pi_k(0, A) = 0$  (es decir, se supone que  $x(0) = 0$ ; si no es así, se puede considerar la función  $x(t) - x(0)$ ). Introduzcamos las medidas en los subconjuntos borelianos  $[0, T] \times R^1$ :

$$\pi_k(B) = \int_{(t, x) \in B} d_t \Pi_k(t, dx).$$

Luego, sean  $\Lambda_1, \Lambda_2$  y  $\Lambda$  tales conjuntos disjuntos en  $[0, T] \times R^1$  que  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda = [0, T] \times R^1$ ,  $\pi_1(\Lambda_2) = \pi_2(\Lambda_1) = 0$ , y en  $\Lambda$  las medidas  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son equivalentes: e iste tal función medible posi-

tiva  $f(t, x)$  que

$$\pi_2(\Lambda \cap B) = \int_{\Lambda \cap B} f(t, x) \pi_1(dt \times dx);$$

$$\pi_1(\Lambda \cap B) = \int_{\Lambda \cap B} f^{-1}(t, x) \pi_2(dt \times dx).$$

Determinemos la medida empírica de saltos:

$$v_{x(\cdot)}(B) = \sum_t \chi_B(t, x(t+0) - x(t-0)) \quad (2.2)$$

(ya que el proceso no tiene discontinuidades de segunda especie, esta magnitud es finita para todos los  $B$  para los cuales  $B \cap \{[0, T] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \neq \emptyset\}$ ). Designemos con  $\mu_h$  la medida correspondiente al proceso  $x(t)$  en  $D_{[0, T]}$  para la hipótesis  $H_h$ .

**24.2.2. Condiciones de ortogonalidad. Distinción infalible de las hipótesis.** Las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales si se cumple siquiera una de las condiciones:

- 1)  $\pi_1(\Lambda_1) + \pi_2(\Lambda_2) = +\infty$ ;
- 2) para cierto  $c \in (0, 1)$

$$\pi_2\{(s, x) : |1 - f(s-x)| > c\} = \infty;$$

- 3)  $\int \frac{(1-f(s, x))^2}{1+f^2(s, x)} \pi_1(ds \times dx) = +\infty$ ;

- 4)  $b_1(s) = b_2(t)$  (para cierto  $t \in [0, T]$ );

- 5) sean  $\int \frac{(1-f(s, x))^2}{1+f^2(s, x)} \pi_1(ds \times dx) < \infty$

y  $b_1(t) = b_2(t) = b(t)$  para todos los  $t \in [0, T]$ , entonces está definida la función

$$a_2(t) = \int \frac{y}{1+y^2} [II_1(t, dy) - II_2(t, dy)], \quad (2.3)$$

las medidas  $\mu_h$  serán ortogonales si la función  $\gamma(t) = \gamma_2(t) - \gamma_1(t) + a_2(t)$  no es absolutamente continua respecto de  $b(t)$ , o bien

$$\int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) = \infty. \quad (2.4)$$

Indiquemos las reglas infalibles de elección de la hipótesis en cada uno de estos casos.

1a) Sea  $\pi_1(\Lambda_1) = +\infty$ . Designemos con  $G_1$  el conjunto de  $x(\cdot) \in D_{[0, T]}$  para los cuales  $v_{x(\cdot)}(\Lambda_1) > 0$ . Si  $x(\cdot) \in G_1$  aceptamos la hipótesis  $H_1$ ; si  $x(\cdot) \notin G_1$  admitimos la hipótesis  $H_2$ .

1b) Sea  $\pi_2(\Lambda_2) = +\infty$ . Designemos con  $G_2$  el conjunto de  $x(\cdot) \in D_{[0, T]}$  para los cuales  $v_{x(\cdot)}(\Lambda) > 0$ . Si  $x(\cdot) \in G_2$  aceptamos la hipótesis  $H_2$ ; si  $x(\cdot) \notin G_2$  admitimos la hipótesis  $H_1$ .

2a) Sea  $\pi_1 \{(s, x) : f(s, x) > 1 + c\} = +\infty$ . Elegimos la sucesión creciente de los conjuntos medibles  $B_n$  de modo que  $\pi_1(B_n) > n$ ,  $f(s, x) > 1 + c$  para  $(s, x) \in B_n$ . Designemos con  $G_1$  el conjunto de tales  $x(\cdot)$  para los cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi_1(B_n)} v_{x(\cdot)}(B_n) = 1.$$

Si  $x(\cdot) \in G_1$  admitimos la hipótesis  $H_1$ ; si  $x(\cdot) \notin G_1$  aceptamos la hipótesis  $H_2$ .

2b) Sea  $\pi_1 \{(s, x) : f(s, x) < 1 - c\} = +\infty$ . Elegimos la sucesión creciente de conjuntos medibles  $B_n$  de modo que  $\pi_1(B_n) > n$ ,  $f(s, x) < 1 - c$  para  $(s, x) \in B_n$ . El conjunto  $G_1$  se construye igualmente que en 2a).

3) Elegimos tal sucesión de particiones  $\Lambda = \bigcup_{k=1}^{m_n} V_{nh}$  que para la magnitud

$$\theta_n = \sum_{h=1}^{m_n} \pi_1(V_{nh}) \frac{(\pi_2(V_{nh}) - \pi_1(V_{nh}))^2}{\pi_1^2(V_{nh}) + \pi_2^2(V_{nh})}$$

se cumpla la relación  $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{-1} < \infty$ . Entonces la hipótesis  $H_1$  se acepta si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_n} \sum_{h=1}^{m_n} [v_{x(\cdot)}(V_{nh}) - \pi_1(V_{nh})] \times \\ \times \frac{\pi_2(V_{nh}) - \pi_1(V_{nh})}{\sqrt{\pi_1^2(V_{nh}) + \pi_2^2(V_{nh})}} = 0,$$

si esta igualdad no se verifica, se acepta la hipótesis  $H_2$ .

4) Supongamos que

$$\int_{\Lambda} \frac{(1 - f(s, x))^2}{1 + f^2(s, x)} \pi_1(ds \times dx) < \infty,$$

$x^0(t)$  está determinado por la relación (2.3). Introduzcamos el proceso

$$x^0(t) = x(t) - \int \gamma \left[ v_{x(\cdot)}(ds \times dy) - \frac{1}{1 + \gamma^2} \pi_1(ds \times dy) \right]$$

(la integral se comprende como el límite de la integral en el dominio  $[0, T] \times \{y : |y| \geq \varepsilon\}$  para  $\varepsilon \downarrow 0$ ). Para cada hipótesis  $H_k$   $x^0(t)$  es un proceso continuo de incrementos independientes con media  $\gamma_1(t)$  para la hipótesis  $H_1$ ,  $\gamma_2(t) + a_2(t)$  para la hipótesis  $H_2$  y la varianza  $b_h(t)$  para la hipótesis  $H_k$ . Sea  $t_0$  tal que  $b_1(t_0) \neq b_2(t_0)$ . Consideraremos que las funciones  $b_h(t)$  crecen estrictamente. Analicemos dos casos.

4a) Sea con cierto  $\delta > 0$   $b_1(t_0) < (1-\delta)b_2(t_0)$ . Entonces, para cada  $n$  se puede elegir tales puntos  $t'_{n1} < t''_{n1} \leq t'_{n2} < t''_{n2} < \dots$ , que  $(1-\delta)[b_2(t''_{nh}) - b_2(t'_{nh})] \geq b_1(t''_{nh}) - b_1(t'_{nh}) > 0$ . Tomemos  $G_1$  igual al conjunto de  $x(\cdot)$  para las cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \frac{1}{b_1(t''_{nh}) - b_1(t'_{nh})} [x^0(t_{nh}) - x^0(t'_{nh}) - \gamma_1(t''_{nh}) + \gamma_1(t'_{nh})]^2 = 1.$$

4b) Sea con cierto  $\delta > 0$   $b_2(t_0) < (1-\delta)b_1(t_0)$ . Elegimos los puntos  $t'_{n1} < t''_{n1} \leq t'_{n2} < t''_{n2} \leq \dots$  de tal modo que  $(1-\delta) \times [b_1(t''_{nh}) - b_1(t'_{nh})] \geq b_2(t''_{nh}) - b_2(t'_{nh}) > 0$ . Designemos con  $G_2$  el conjunto de  $x(\cdot)$  para las cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{h=1}^n \frac{1}{b_2(t''_{nh}) - b_2(t'_{nh})} [x^0(t''_{nh}) - x^0(t'_{nh}) - \gamma_2(t''_{nh}) + \gamma_2(t'_{nh}) - a_2(t''_{nh}) + a_2(t'_{nh})]^2 = 1.$$

En cada uno de estos casos la hipótesis  $H_h$  se admite si  $x(\cdot) \in G_h$ ; si  $x(\cdot) \notin G_h$  se acepta otra hipótesis.

5) Si  $\gamma(t)$  no es absolutamente continua respecto de  $b(t)$ , entonces se puede elegir la sucesión de particiones del segmento  $[0, T] : 0 = t_{n0} < t_{n1} < \dots < t_{nm_n} = T$  de modo que las magnitudes

$$\theta_n = \sum_{h=1}^{m_n} \frac{(\gamma(t_{nh}) - \gamma(t_{nh-1}))^2}{b(t_{nh}) - b(t_{nh-1})}$$

para un  $\alpha > 0$  satisfagan la desigualdad  $\theta_n > n^\alpha$ . Designemos con  $G_1$  el conjunto de  $x(\cdot)$  para los cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_n} \sum_{h=1}^{m_n} \left[ \frac{x^0(t_{nh}) - x^0(t_{nh-1}) - \gamma_1(t_{nh}) + \gamma_1(t_{nh-1})}{b(t_{nh}) - b(t_{nh-1})} \right] \times \\ \times [b(t_{nh}) - b(t_{nh-1})] = 0.$$

Aceptemos la hipótesis  $H_1$  para  $x(\cdot) \in G_1$  y la hipótesis  $H_2$ , si  $x(\cdot) \notin G_1$ .

2A.2.3. Condiciones de equivalencia de las medidas. Sean cumplidas las condiciones

I.  $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \emptyset$ .

II.  $\int_{\Lambda} \frac{(1-f(s, x))^2}{1+f^2(s, x)} \pi_1(ds \times dx) < \infty$ .

III.  $b_1(t) = b_2(t) = b(t)$ .

IV. La función  $\gamma(t)$  es absolutamente continua respecto de  $b(t)$  y

$$\int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) < \infty.$$

Entonces las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son equivalentes y la densidad de  $\mu_2$  respecto de  $\mu_1$  se da por la fórmula

$$\begin{aligned} \rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \int_0^T \frac{d\gamma(t)}{db(t)} d[x^0(t) - \gamma_1(t)] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) + \right. \\ + \int_{|1-f(s,y)| \leq c} \ln f(s,y) [v_{x(\cdot)}(ds \times dy) - \pi_1(ds \times dy)] + \\ + \int_{|1-f(s,y)| > c} \ln f(s,y) v_{x(\cdot)}(ds \times dy) + \\ + \int_{|1-f(s,y)| \leq c} [\ln f(s,y) - f(s,y) + 1] \pi_1(ds \times dy) + \\ \left. + \int_{|1-f(s,y)| > c} (1-f(s,y)) \pi_1(ds \times dy) \right\} \quad (2.5) \end{aligned}$$

(las integrales en la fórmula (2.5) deben entenderse como estocásticas).

Demos la distribución  $\rho(x(\cdot))$  mediante la función característica de la magnitud  $\ln \rho(x(\cdot))$ . Para la hipótesis  $H_1$

$$\begin{aligned} M \exp \{ iz \ln \rho(x(\cdot)) \} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) + \right. \\ \left. + \int [e^{iz \ln f(s,y)} - 1 - iz(f(s,y) - 1)] \pi_1(ds \times dy) + iz\alpha_1 \right\}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1 = -\frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t)$ . Para la hipótesis  $H_2$ ,

$$\begin{aligned} M \exp \{ iz \ln \rho(x(\cdot)) \} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^2 \int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) + \right. \\ \left. + \int \left[ e^{iz \ln f(s,y)} - 1 - iz \frac{f(s,y) - 1}{2 - 2f(s,y) + f^2(s,y)} \right] \times \right. \\ \left. \times \pi_2(ds \times dy) + iz\alpha_2 \right\}, \end{aligned}$$



donde

$$\alpha_2 = + \frac{1}{2} \int_0^T \left( \frac{d\gamma(t)}{db(t)} \right)^2 db(t) + \int \left( \frac{(1-f(s,y))^2}{2-2f(s,y)+f^2(s,y)} \right) \pi_1(ds \times dy).$$

24.2.4. Caso general. Es evidente que si  $v_{x(\cdot)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) > 0$  se puede con certeza elegir  $H_i$  para tal  $i$  con el cual  $v_{x(\cdot)}(\Lambda_i) > 0$  ( $v_{x(\cdot)}(\Lambda_1)$  y  $v_{x(\cdot)}(\Lambda_2)$  no pueden ser positivos simultáneamente). Si  $v_{x(\cdot)}(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = 0$ , la distribución de  $x(\cdot)$  coincide con la distribución del proceso con incrementos independientes  $x^*(t)$  cuya función característica para la hipótesis  $H_i$  tiene el aspecto

$$\exp \left\{ i\gamma_h^*(t)z - \frac{1}{2} b_h(t)z^2 + \int_{\{s < t\} \cap \Lambda} \int \left( e^{izy} - 1 - \frac{izy}{1+y^2} \right) \pi_h(ds \times dy) \right\},$$

donde

$$\gamma_h^*(t) = \gamma_h(t) + \int_{\{s < t\} \cap \Lambda_h} \int \frac{y}{1+y^2} \pi_h(ds \times dy).$$

Las medidas  $\mu_k^*$  correspondientes al proceso  $x^*(\cdot)$  en  $D_{[0, T]}$  para la hipótesis  $H_k$  serán equivalentes, además la densidad  $\rho(x(\cdot))$  de la medida  $\mu_2^*$  respecto de  $\mu_1^*$  se determina por la fórmula (2.5) si en ella se sustituye  $\pi_1(B)$  por  $\pi_1^*(B) = \pi_1(B \cap \Lambda)$ . De este modo, si a base de la observación es imposible distinguir con certeza las hipótesis, entonces para construir la mejor regla se puede usar los resultados del punto anterior.

24.2.5. Definición del parámetro del proceso homogéneo de Poisson. Sea  $x(t)$  una función escalonada, todos los saltos de la cual son iguales a 1,  $x(0) = 0$ . La hipótesis  $H_k$  consiste en que  $x(t)$  es un proceso homogéneo de Poisson con parámetros  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ). De este modo, para la hipótesis  $H_k$

$$P(x(t) = n) = \frac{\lambda_k^n}{n!} e^{-\lambda_k}.$$

En este caso, la medida  $\pi_k(ds \times dx)$  tiene para  $B \in R^1$  por expresión

$$\pi_k(ds \times B) = \lambda_k ds \chi_B(1).$$

Entonces las medidas  $\mu_k$  son equivalentes y

$$\rho(x(\cdot)) = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{x(T)} e^{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Es evidente que el dominio  $\rho(x(\cdot)) < \lambda$  coincide con el dominio  $x(T) < \lambda_1 - \lambda_2 + \frac{\ln \lambda}{\ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$ . Por eso, la regla, para la cual  $\alpha_{12} = \pi$

y  $\alpha_{21}$  es mínima, se construye del modo siguiente. Designemos con  $n_e$  tal número que

$$\sum_{h < n_e} \frac{(T\lambda_2)^h}{h!} e^{-T\lambda_2} \leq \varepsilon \leq \sum_{h \leq n_e} \frac{(T\lambda_2)^h}{h!} e^{-T\lambda_2}$$

( $\sum_{h < 0} = 0$ ). Entonces, para  $x(T) < n_e$  se acepta la hipótesis  $H_1$ , para  $x(T) > n_e$  se admite la hipótesis  $H_2$ . Si  $x(T) = n_e$ , con la probabilidad

$$\left[ \varepsilon - \sum_{h < n_e} \frac{(T\lambda_2)^h}{h!} e^{-T\lambda_2} \right] \left( \frac{(T\lambda_2)^{n_e}}{n_e!} e^{-T\lambda_2} \right)^{-1}$$

se acepta la hipótesis  $H_2$ , y con la probabilidad

$$\left[ \sum_{h \leq n_e} \frac{(T\lambda_2)^h}{h!} e^{-T\lambda_2} - \varepsilon \right] \left( \frac{(T\lambda_2)^{n_e}}{n_e!} e^{-T\lambda_2} \right)^{-1}$$

se admite la hipótesis  $H_1$ .

#### 24.2.6. Determinación del proceso homogéneo medio de Wiener.

Sea  $x(t)$  un proceso continuo; para la hipótesis  $H_1$  éste es el proceso de Wiener con media 0 y varianza  $t$ ; para la hipótesis  $H_2$ , con media  $\gamma t$  y varianza  $t$ . Las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son equivalentes y

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \gamma x(T) - \frac{\gamma^2}{2} T \right\}.$$

Es evidente que el dominio  $\{\rho(x(\cdot)) < \lambda\}$  tiene el aspecto

$$x(T) < \frac{\ln \lambda + \frac{\gamma^2}{2} T}{\gamma}$$

(consideramos  $\gamma > 0$ ). Para la hipótesis  $H_1$   $x(T)$  tiene distribución normal con medio 0 y varianza  $T$ ; para la hipótesis  $H_2$ , distribución normal con media  $\gamma T$  y varianza  $T$ . Satisfaga  $c(\varepsilon)$  la relación

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c(\varepsilon)} e^{-u^2/2} du$$

y sea  $\lambda = c(\varepsilon) \sqrt{T} + \gamma T$ . Aceptemos la hipótesis  $H_1$  si  $x(T) < \lambda$  y la hipótesis  $H_2$  si  $x(T) \geq \lambda$ . Además,  $\alpha_{12} = \varepsilon$ ,

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c(\varepsilon) + \gamma \sqrt{T}}^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

### 24.3. Distinción de las hipótesis para los procesos difusivos

24.3.1. Definición de operador de difusión. Sea  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$  la trayectoria de un proceso difusivo en  $R^m$ ; para la hipótesis  $H_h$  el vector de traslación del proceso difusivo será  $a_h(t, x)$  y el operador de difusión,  $B_h(t, x)$ . Supongamos que las funciones  $a_h(t, x)$ ,  $B_h(t, x)$  están determinadas y son continuas para  $t \in [0, T]$ ,  $x \in R^m$ . Entonces, conociendo la trayectoria del proceso  $x(t)$  se puede determinar  $B_h \times \times(t, x(t))$ ,  $t \in [0, T]$  si es cierta la hipótesis  $H_h$ . Esto se puede hacer del modo siguiente. Para  $z \in R^m$  ponemos

$$\lambda(t, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n - 1} \left( x \left( \frac{k+1}{2^n} t \right) - x \left( \frac{k}{2^n} t \right), z \right)^2 \quad (3.1)$$

( $(\cdot, \cdot)$  es un producto escalar en  $R^m$ ), el límite de (3.1) existe con la probabilidad 1, cualquiera que sea la hipótesis válida. Entonces

$$\lambda(t, z) = \int_0^t (B_h(s, x(s)) z, z) ds, \quad (3.2)$$

si es cierta la hipótesis  $H_h$ .

Si en la trayectoria en observación, para algunas  $t \in [0, T]$  y  $z \in R^m$

$$\int_0^t (B_1(s, x(s)) z, z) ds \neq \int_0^t (B_2(s, x(s)) z, z) ds$$

(en virtud de la continuidad de las funciones subintegrales esto se realiza cuando para ciertas  $t \in [0, T]$  y  $z \in R^m$   $(B_1(t, x(t)) z, z) \neq (B_2(t, x(t)) z, z)$ ), entonces la igualdad (3.2) puede cumplirse sólo para un  $k$ . En este caso eligiendo la hipótesis  $H_k$ , si (3.2) se verifica para el  $k$  dado, obtendremos la regla infalible de distinción de las hipótesis.

Ahora, sea a lo largo de la trayectoria en observación

$$(B_1(t, x(t)) z, z) = (B_2(t, x(t)) z, z)$$

para todas las  $z \in R^m$ . Entonces  $B_1(t, x(t)) = B_2(t, x(t))$ . Por eso podemos considerar que  $B_1(t, x) = B_2(t, x)$  para todas las  $t \in [0, T]$  y  $x \in R^m$ .

24.3.2. Condición de equivalencia de las medidas. Sea  $\mu_h$  una medida correspondiente al proceso en observación para la hipótesis  $H_h$  (la distribución  $x(0)$  se considera dada o independiente de la elección de la hipótesis). Designemos  $B(t, x) = B_1(t, x) = B_2(t, x)$ ,  $a(t, x) = a_2(t, x) = a_1(t, x)$ . Para que las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  sean equivalentes es suficiente que para todo  $t$ ,  $x$  exista el vector  $b(t, x) \in R^m$  tal que

$$a(t, x) = B(t, x) b(t, x)$$

y, con la probabilidad 1,

$$\int_0^T (a(t, x(t)), b(t, x(t))) dt < \infty.$$

Cumpléndose estas condiciones la densidad de la medida  $\mu_x$  respecto de  $\mu_t$  tiene el aspecto

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left[ \int_0^T (b(t, x(t)), dx(t)) - \frac{1}{2} \int_0^T (b(t, x(t)), a_1(t, x(t)) + a_2(t, x(t))) dt \right]. \quad (3.3)$$

Sea  $c(t, x) = (b(t, x), a_1(t, x) + a_2(t, x))$ . Si queremos encontrar la distribución  $\rho(x(\cdot))$  para la hipótesis  $H_h$  introduzcamos la magnitud

$$\xi_t = \int_t^T (b(s, x(s)), dx(s)) - \frac{1}{2} \int_t^T c(s, x(s)) ds.$$

Designemos con  $M_t^x$  esperanza matemática condicional a condición de que  $x(t) = x$ . Hagamos

$$u_\lambda(t, x) = M_t^x e^{i\lambda \xi_t},$$

entonces, la función  $u_\lambda(t, x)$  satisfaco la siguiente ecuación para  $t \in [0, T]$ :

$$\frac{\partial u_\lambda(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} [(B(t, x) \nabla, \nabla) + (a_1(t, x) + i\lambda b(t, x) \nabla)] u_\lambda - \left[ i\lambda c(t, x) + \frac{\lambda^2}{2} (a(t, x), b(t, x)) \right] u_\lambda = 0 \quad (3.4)$$

(aquí  $\nabla$  es un vector con las componentes  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}$ , donde  $x^1, \dots, x^m$  son las coordenadas del punto  $x$ ). Para  $t = T$  la función  $u_\lambda(t, x)$  satisfaco la condición de frontera  $u_\lambda(T, x) = 1$ .

24.3.3. Procesos homogéneos según el espacio. Sea  $a_h(t, x) = a_h(t)$ ,  $B_h(t, x) = B_h(t)$ , es decir, los coeficientes del proceso difusivo no dependen de la coordenada espacial. En este caso, el proceso  $x(t)$  será un proceso con incrementos independientes. De (3.2) se deduce que

$$\lambda(t, z) = \int_0^t (B_h(s) z, z) ds$$

si es cierta la hipótesis  $H_h$ . Por eso, las hipótesis se distinguen con certeza si para cierto  $t B_1(t) \neq B_2(t)$ .

Sea  $B_1(t) = B_2(t) = B(t)$ ,  $a_2(t) - a_1(t) = a(t)$ . Designemos con  $E$  el conjunto de tales  $t \in [0, T]$  para las cuales  $a(t)$  no pertenece al dominio de los valores del operador  $B(t)$ . Sea  $P(t)$  el operador de proyección sobre el dominio de los valores del operador  $B(t)$ . Si la medida de Lebesgue del conjunto  $E$  es positiva las hipótesis se distinguen infaliblemente:

si es cierta la hipótesis  $H_1$ , entonces

$$\int_0^T |P(t)(x(t) - a_1(t))|^2 dt = 0,$$

si es cierta la hipótesis  $H_2$ , entonces

$$\int_0^T |P(t)(x(t) - a_1(t))|^2 dt > 0.$$

Supongamos que casi para todas las  $t$  el vector  $a(t)$  pertenece al dominio de los valores del operador  $B(t)$ , es decir, que existe tal vector  $b(t)$  que

$$a(t) = B(t)b(t)$$

(para que el vector  $b(t)$  se determine unívocamente lo elegimos en el dominio de los valores de  $B(t)$ ; esto es posible ya que  $B(t)$  es simétrico). Cabe señalar que  $(a(t), b(t)) > 0$ . La condición

$$\int_0^T (a(t), b(t)) dt < \infty \quad (3.5)$$

es suficiente y necesaria para la continuidad absoluta de las medidas. Si (3.5) se cumple, las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son equivalentes y la densidad de la medida  $\mu_2$  respecto de  $\mu_1$  tiene la forma

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \int_0^T (b(t), dx(t)) - \frac{1}{2} \int_0^T (b(t), a_1(t) + a_2(t)) dt \right\}.$$

Para cualquiera de las hipótesis la  $\rho(x(\cdot))$  tiene distribución normal con la varianza

$$\int_0^T (a(t), b(t)) dt$$

y la media

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \int_0^T (a(t), b(t)) dt \text{ para la hipótesis } H_1; \\ \frac{1}{2} \int_0^T (a(t), b(t)) dt \text{ para la hipótesis } H_2. \end{array} \right.$$

Señalemos, además, la regla de distinción infalible de las hipótesis a condición de que

$$\int_0^T (a(t), b(t)) dt = +\infty. \quad (3.6)$$

Elegimos la sucesión de las funciones  $b_n(t)$  tal que

$$\int_0^T (B(t) b_n(t), b_n(t)) dt = \int_0^T (a(t), b_n(t)) dt \geq n$$

(esto es posible en virtud de (3.6)). Entonces elegimos la hipótesis  $H_1$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^T (B(t) b_n(t), b_n(t)) dt \right)^{-1} \int_0^T b_n(t) d[x(t) - a_1(t)] = 0$$

y la hipótesis  $H_2$  si esta condición no se cumple.

#### 24.4. Distinción de las hipótesis del valor medio del proceso gaussiano

Sea  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , la trayectoria de un proceso unidimensional gaussiano con la función de correlación, continua prefijada  $R(t, s)$ . El valor medio del proceso para la hipótesis  $H_1$  es igual a 0, y para la hipótesis  $H_2$ , a la función continua dada  $a(t)$  (si el valor medio para la hipótesis  $H_1$  fuese  $a_1(t)$ , se podría considerar  $x(t) - a_1(t)$  en vez de  $x(t)$ ).

**24.4.1. Condiciones de ortogonalidad. Distinción infalible de las hipótesis.** Designemos con  $L_2[0, T]$  el espacio de las funciones  $g(t)$  en  $[0, T]$  de cuadrado integrable, éste es un espacio de Hilbert con

producto escalar  $(g_1, g_2) = \int_0^T g_1(t) g_2(t) dt$ .

Sea  $Rg(t) = \int_0^T R(t, s) g(s) ds$  un operador lineal en  $L_2[0, T]$ .

Este operador lineal es totalmente continuo y tiene una sucesión de valores propios y de funciones propias  $\{\lambda_k, \varphi_k\}$ :

$$\int_0^T R(t, s) \varphi_k(s) ds = \lambda_k \varphi_k(t),$$

las funciones  $\varphi_k$  son ortogonales dos a dos y completas en el dominio de los valores del operador  $R$ ,  $\lambda_k > 0$  y  $\sum \lambda_k < \infty$ .

1) Si  $a(t)$  no se desarrolla en una serie según las funciones  $\varphi_k(t)$ , entonces las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , correspondientes al proceso para las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$ , son ortogonales. La regla que distingue las hipó-

tesis consiste en lo siguiente: sea

$$\hat{a}(t) = a(t) - \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h(t) \int_0^T \varphi_h(s) a(s) ds \quad (\langle \varphi_h, \varphi_h \rangle = 1).$$

Si  $\int_0^T x(t) \hat{a}(t) dt = 0$ , aceptamos la hipótesis  $H_1$ ; si  $\int_0^T x(t) \hat{a}(t) dt \neq 0$ , admitimos la hipótesis  $H_2$ .

2) Supongamos que  $a(t)$  se desarrolla según las funciones propias  $\varphi_h$ :

$$a(t) = \sum_{h=1}^{\infty} \alpha_h \varphi_h(t), \quad \alpha_h = \int_0^T a(t) \varphi_h(t) dt.$$

Si

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h} = \infty \quad (4.1)$$

las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales. La regla de distinción se construye del modo siguiente: elegimos la subsucesión  $m_n$  de modo que

$$\sum_{h=1}^{m_n} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h} \geq n.$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{h=1}^{m_n} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h} \right)^{-1} \sum_{h=1}^{m_n} \frac{\alpha_h}{\lambda_h} \int_0^T x(t) \varphi_h(t) dt = 0,$$

entonces se acepta la hipótesis  $H_1$ , si esta condición no se cumple se admite la hipótesis  $H_2$ .

La regla arriba citada de distinción de las hipótesis usa los valores propios y las funciones propias del operador integral  $R$ . Se puede proponer otras reglas que no utilizan estos datos.

Sea  $\{\psi_k(t), k = 1, 2, \dots\}$  un sistema de funciones ortonormalizado aleatorio en  $L_2[0, T]$ . Designemos

$$x_k = \int_0^T x(t) \psi_k(t) dt;$$

$$a_k = \int_0^T a(t) \psi_k(t) dt;$$

$$r_{jh} = M \int_0^T x(t) \psi_h(t) dt \int_0^T x(t) \psi_j(t) dt$$

(la esperanza matemática se toma para la hipótesis  $H_1$ ). Sea  $b_h^{(n)}$  la solución de un sistema de ecuaciones lineales

$$a_h = \sum_{j=1}^n r_{jk} b_j^{(n)}.$$

Si se cumple (4.1), entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n a_h b_h^{(n)} = +\infty.$$

Elijamos  $m_n$  de modo que

$$\sum_{h=1}^{m_n} a_h b_h^{(m_n)} \geq n.$$

Entonces, la regla de elección de la hipótesis consiste en lo siguiente: si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{h=1}^{m_n} a_h b_h^{(m_n)} \right)^{-1} \sum_{h=1}^{m_n} x_h b_h^{(m_n)} = 0$$

elegimos la hipótesis  $H_1$ ; si la última relación no se cumple, elegimos la hipótesis  $H_2$ .

**24.4.2. Condiciones de equivalencia de las medidas.** En las designaciones del punto anterior

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h} < \infty \quad (4.2)$$

es la condición suficiente y necesaria de equivalencia de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Si (4.2) se cumple la densidad de la medida  $\mu_2$  respecto de la medida  $\mu_1$  tiene la forma

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x_h \alpha_h}{\lambda_h} - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h} \right\}. \quad (4.3)$$

Si existe la solución  $b(t)$  de la ecuación de Fredholm de primer género

$$a(t) = \int_0^T R(T(t, s) b(s)) ds \quad (4.4)$$

la densidad  $\rho(x(\cdot))$  puede ser escrita de una manera más evidente

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \int_0^T x(s) b(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^T a(s) b(s) ds \right\} \quad (4.5)$$

(cabe señalar que en muchos casos la solución de la ecuación (4.4) existe como una función generalizada y las integrales de (4.5) se pueden transformar en ordinarias integrando por partes). En  $\rho(x(\cdot))$  tiene



distribución normal con la varianza

$$d = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h}$$

para ambas hipótesis; el valor medio es igual a  $-\frac{d}{2}$  para la hipótesis  $H_1$  y a  $\frac{d}{2}$  para la hipótesis  $H_2$ . Si es difícil resolver la ecuación (4.4) se puede usar el siguiente criterio aproximado de distinción de las hipótesis.

Sean  $a_h^{(n)}$  los mismos que en el punto anterior. Aceptemos la hipótesis  $H_1$  si  $\sum_{h=1}^n b_h^{(n)} x_h < \lambda$  y la hipótesis  $H_2$  si  $\sum_{h=1}^n b_h^{(n)} x_h \geq \lambda$ . Además,

$$\lambda = c(\varepsilon) \sqrt{d_n} \cdot \frac{1}{2} d_n,$$

donde

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{c(\varepsilon)} e^{-u^2/2} du = \varepsilon; \quad d_n = \sum_{h=1}^n a_h b_h^{(n)}$$

En este caso  $\alpha_{12} \rightarrow \varepsilon$  y

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c(\varepsilon) + \sqrt{d_n}}^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Ya que  $d_n \rightarrow d = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\alpha_h^2}{\lambda_h}$  y para la regla óptima de distinción con  $\alpha_{12} = \varepsilon$

$$\alpha_{21} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c(\varepsilon) + \sqrt{d}}^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

entonces  $\alpha_{21}^{opt} \rightarrow \alpha_{21}$ .

**24.4.3. Caso de procesos estacionarios.** Sea  $R(t, s) = r(t - s)$ , es decir,  $x(t)$  es un proceso estacionario para la hipótesis  $H_1$ . Designemos con  $P(\lambda)$  la función espectral del proceso. Sea  $W_T$  el espacio de las funciones  $g(\lambda)$  que pueden ser representadas en la forma

$$g(\lambda) = \int_{-T}^T e^{i\lambda t} q(t) dt.$$

donde  $\varphi$  son funciones de valor complejo en  $[-T, T]$  para las cuales  $\int_{-T}^T |\varphi(t)|^2 dt < \infty$ . Designemos, luego, con  $W_T(F)$  la clausura  $W_T$  en la métrica determinada por la ecuación

$$\|g\|_F^2 = \int |g(\lambda)|^2 dF(\lambda).$$

Para la equivalencia de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  es necesario y suficiente que la función  $a(t)$  para  $t \in [-T, T]$  tenga la representación

$$a(t) = \int e^{-i\lambda t} b(\lambda) dF(\lambda),$$

donde  $b(\lambda) \in W_T(F)$ . Si esta condición está cumplida, la densidad  $\rho(x(\cdot))$  tiene el aspecto

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \int b(\lambda) dy(\lambda) - \frac{1}{2} \int |b(\lambda)|^2 dF(\lambda) \right\} \quad (4.6)$$

donde  $y(\lambda)$  es la medida espectral del proceso  $x(t)$ :

$$x(t) = \int e^{i\lambda t} dy(\lambda).$$

Señalemos que la integral estocástica en (4.6) puede ser calculada como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \varphi_n(t) x(t) dt,$$

donde  $\varphi_n$  es tal sucesión de funciones que  $\|b - b_n\|_F \rightarrow 0$ , si sólo

$$b_n(\lambda) = \int_{-T}^T e^{i\lambda t} \varphi_n(t) dt.$$

## 24.5. Distinción de las hipótesis sobre la función de correlación del proceso gaussiano

Se observa la trayectoria del proceso unidimensional gaussiano  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , cuyo valor medio es 0; respecto de la función de correlación hay dos hipótesis: según la hipótesis  $H_1$  la trayectoria es igual a  $R_1(t, s)$  y según la hipótesis  $H_2$ , a  $R_2(t, s)$ ; se supone que  $R_k(t, s)$  son funciones continuas.

**24.5.1. Condiciones de ortogonalidad.** Como antes designemos con  $\mu_k$  la medida correspondiente al proceso para la hipótesis  $H_k$ ,  $k = 1, 2$ . Siempre se puede considerar que estas medidas están concentradas en el espacio  $L_2[0, T]$ .

1) Si existe tal sucesión de funciones  $g_n(t) \in L_2[0, T]$  que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^T R_2(t, s) g_n(t) g(s) dt ds \times \\ \times \left( \int_0^T \int_0^T R_1(t, s) g_n(t) g_n(s) dt ds \right)^{-1} = +\infty, \quad (5.1)$$

las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales. Obtendremos la regla infalible de distinción de la hipótesis eligiendo tal sucesión de las funciones  $\psi_n(t)$  que

$$\int_0^T \int_0^T R_1(t, s) \psi_n(t) \psi_n(s) dt ds = 1; \\ \int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_n(t) \psi_n(s) dt ds \geq n$$

Aceptamos la hipótesis  $H_1$  si

$$\left( \int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_n(t) \psi_n(s) dt ds \right)^{-1/2} \int_0^T x(t) \psi_n(t) dt \rightarrow 0,$$

y la hipótesis  $H_2$  si esta condición no se cumple. De modo análogo se construye la regla de elección si la relación (5.1) se cumple permutand los índices 1 y 2.

2) Supongamos que existe tal  $\delta > 0$  que

$$\delta \int_0^T \int_0^T R_1(t, s) g(t) g(s) dt ds \leq \\ \leq \int_0^T \int_0^T R_2(t, s) g(t) g(s) dt ds \leq \frac{1}{\delta} \int_0^T \int_0^T R_1(t, s) g(t) g(s) dt ds.$$

Construyamos cierta sucesión de tales funciones  $\psi_k(t)$  que

$$\int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_k(t) \psi_l(s) dt ds = 0 \quad \text{para } k \neq l.$$

Si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_k(t) \psi_k(s) dt ds \times \right. \\ \left. \times \left( \int_0^T \int_0^T R_1(t, s) \psi_k(t) \psi_k(s) dt ds \right)^{-1} - 1 \right]^2 = +\infty, \quad (5.2)$$

entonces las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales. Sean

$$\int_0^T \int_0^T R_1(t, s) \psi_h(t) \psi_h(s) dt ds = 1;$$

$$\int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_h(t) \psi_h(s) dt ds = 1 + \delta_h.$$

Obtendremos la regla infalible de distinción de las hipótesis eligiendo  $m_n$  de tal modo que

$$\sum_{h=1}^{m_n} \delta_h^2 > n$$

y aceptando la hipótesis  $H_1$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{h=1}^{m_n} \delta_h^2 \right)^{-1} \sum_{h=1}^{m_n} \left[ \left( \int_0^T \psi_h(t) x(t) dt \right)^2 - 1 \right] \delta_h = 0$$

y la hipótesis  $H_2$ , si esta condición no se cumple.

**24.5.2. Condiciones de equivalencia.** Introduzcamos junto con la función  $R_h(t, s)$  la función  $R_h^{1/2}(t, s)$  que es una función simétrica de cuadrado integrable en  $[0, T] \times [0, T]$  la cual satisface la relación

$$R_h(t, s) = \int_0^T R_h^{1/2}(t, u) R_h^{1/2}(u, s) du.$$

Si  $\varphi_n^{(k)}(t)$  y  $\lambda_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, n = 1, 2, \dots$ , son, respectivamente, funciones propias y valores propios del operador integral

$$R_h \varphi(t) = \int_0^T R_h(t, s) \varphi(s) ds.$$

entonces la función  $R_h^{1/2}(t, s)$  puede ser construida del modo siguiente:

$$R_h^{1/2}(t, s) = \sum_{h=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n^{(h)}} \varphi_n^{(h)}(t) \varphi_n^{(h)}(s) \quad (5.3)$$

(la serie a la derecha converge a la media cuadrática en  $[0, T] \times [0, T]$ ). Para la equivalencia de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  es necesario y suficiente que exista tal función de cuadrado integrable  $D(t, s)$  que

$$R_1(t, s) - R_2(t, s) = \int_0^T \int_0^T R_1^{1/2}(t, u) D(u, v) R_2^{1/2}(v, s) du dv. \quad (5.4)$$

Sea  $D(t, s)$  esta función. Designemos con  $\theta_h(t)$  las funciones propias y con  $\delta_h$  los valores propios de la integral simétrica con núcleo  $D(t, s)$ :

$$\delta_h \theta_h(t) = \int_0^T D(t, s) \theta_h(s) ds.$$

(De la relación (5.4) se deduce que  $\delta_h > -1$ ). Entonces, la densidad de la medida  $\mu_2$  respecto de  $\mu_1$  tiene la forma

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \left[ \xi_h^2 \frac{\delta_h}{1+\delta_h} - \ln(1+\delta_h) \right] \right\}, \quad (5.5)$$

donde  $\xi_h$  se determina de la función  $x(t)$  mediante la relación

$$\xi_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V \lambda_n^{2n}} \int_0^T \varphi_n^{(2n)}(s) x(s) ds \int_0^T \theta_h(t) \varphi_n^{(2n)}(t) dt. \quad (5.6)$$

Para encontrar la distribución de la magnitud  $\rho(x(\cdot))$  se debe tener en cuenta que las magnitudes  $\xi_h$ , para cada una de las hipótesis, son una sucesión de magnitudes independientes gaussianas con media 0 y varianza 1 para la hipótesis  $H_2$  y varianza  $1 + \delta_h$  para la hipótesis  $H_1$ . Por eso

$$M e^{i s \ln \rho(x(\cdot))} = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{(1+\delta_h)^{s^2/2}}{(1+is\delta_h)^{1/2}}$$

para la hipótesis  $H_1$  y

$$M e^{i s \ln \rho(x(\cdot))} = \prod_{h=1}^{\infty} \frac{(1+\delta_h)^{s^2/2}}{\left(1 + \frac{is\delta_h}{1+\delta_h}\right)^{1/2}}$$

para la hipótesis  $H_2$ .

Como vemos la determinación de la densidad de una medida respecto de otra y de la distribución de esta densidad en el caso de distintas varianzas lleva a la necesidad de definir las funciones propias y los valores propios de los operadores integrales. A veces, al calcular la densidad y su distribución, se puede no recurrir al cálculo del operador  $D$  y la magnitud  $\xi_h$ . Analicemos la ecuación

$$\lambda \int_0^T R_2(t, s) \psi(s) ds = \int_0^T R_1(t, s) \psi(s) ds. \quad (5.7)$$

Esta ecuación, en el caso de la equivalencia de las medidas, tiene soluciones (posiblemente, generalizadas) para el conjunto numerable  $\lambda$  y no más. Designemos estos valores de  $\lambda$  con  $\lambda_h$  y las soluciones correspondientes con  $\psi_h$ . Entonces  $\lambda_h = 1 + \delta_h$  y la densidad  $\rho(x(\cdot))$

tiene el aspecto

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \sum_{h=1}^{\infty} \int_0^T \left( x(t) \psi_h(t) dt \frac{\lambda_h - 1}{\lambda_h} - \ln \lambda_h \right) \right] \right\} \quad (5.8)$$

(se supone que  $\psi_h$  están normalizadas de modo que

$$\int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_h(t) \psi_h(s) dt ds = 1). \text{ La solución}$$

generalizada de la ecuación

$$\lambda_h \int_0^T R_2(t, s) \psi_h(s) ds = \int_0^T R_1(t, s) \psi_h(s) ds,$$

se determina por la sucesión de las funciones  $\psi_h^{(n)}(t)$  para las cuales

$$\int_0^T \int_0^T R_2(t, s) \psi_h^{(n)}(t) \psi_h^{(n)}(s) dt ds = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int_0^T \left( \lambda_h \int_0^T R_2(t, s) \psi_h^{(n)}(s) ds - \int_0^T R_1(t, s) \psi_h^{(n)}(s) ds \right)^2 dt \right] = 0.$$

### 24.5.3. Distinción de las hipótesis para los procesos estacionarios.

Sea  $x(t)$  un proceso estacionario con la media 0 y la función de correlación  $R_h(t)$  para la hipótesis  $H_h$ ,  $k = 1, 2$ . Sea  $F_h(\lambda)$  la función espectral del proceso para la hipótesis  $H_h$ :

$$R_h(t) = \int e^{i\lambda t} dF_h(\lambda).$$

Designemos con  $W_T^2$  el conjunto de funciones del aspecto

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_{-T}^T \int_{-T}^T e^{i\alpha s + i\beta t} g(s, t) ds dt,$$

donde  $g(s, t)$  es acotada y medible en  $[-T, T] \times [-T, T]$ . Luego, sea  $W_T^2(F_1)$  la clausura  $W_T^2$  en la norma

$$\|\psi\|_{F_1} = \int \int |\psi(\alpha, \beta)|^2 dF_1(\alpha) dF_1(\beta).$$

Para la equivalencia de las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  es necesario y suficiente que exista tal función  $b(\alpha, \beta)$  de  $W_T^2(F_1)$  que sea válida la igualdad

$$R_2(t-s) - R_1(t-s) = \int \int e^{-i\alpha t + i\beta s} b(\alpha, \beta) dF_1(\alpha) dF_2(\beta),$$

en este caso la densidad tiene por expresión

$$\rho(x(\cdot)) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \int \Phi(\alpha, \beta) dy(\alpha) \overline{dy(\beta)} + c \right\}, \quad (5.9)$$

donde  $y(\alpha)$  es la medida espectral correspondiente al proceso  $x(t)$ :

$$x(t) = \int e^{i\lambda t} dy(\lambda),$$

la función  $\Phi(\alpha, \beta)$  está ligada con  $b(\alpha, \beta)$  por la correlación  $b(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta) + \int \Phi(\alpha, \gamma) \overline{b(\gamma, \beta)} dF_1(\gamma)$  y la integral estocástica múltiple en (5.9) se determina como la integral según la medida  $\nu$  en  $(-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$  para la cual

$$\begin{aligned} \nu(\{\alpha, \beta\} \times \{\gamma, \delta\}) &= \\ &= [y(\delta) - y(\gamma)] \times [y(\beta) - y(\alpha)] - F_1(\{\alpha, \beta\} \cap \{\gamma, \delta\}) \\ &\left( F_1(\Delta) = \int_{\Delta} dF_1(\lambda) \right). \end{aligned}$$

La constante  $c$  en la fórmula (5.9) se determina de la igualdad

$$c = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\infty} \ln(1 + \lambda_h),$$

donde  $\lambda_h$  son los valores propios del operador

$$V_{\mathcal{L}}(\beta) = \int b(\alpha, \beta) g(\alpha) dF_1(\alpha)$$

en  $W_T(F_1)$ . Señalemos también que la integral en (5.9) se puede escribir en la forma

$$\sum_{h,j} c_{kj} \left[ \int g_h(\alpha) dy(\alpha) \overline{\int f_j(\beta) dy(\beta)} - \int g_h(\alpha) \overline{f_j(\alpha)} dF_1(\alpha) \right],$$

si

$$b(\alpha, \beta) = \sum_{k,j} c_{kj} g_k(\alpha) \overline{f_j(\beta)}.$$

**24.5.4. Distinción de las hipótesis sobre la densidad espectral.** Supongamos que las funciones espectrales  $F_h(\lambda)$  tienen densidades espectrales  $f_k(\lambda)$ . Citemos algunas condiciones suficientes de la continuidad absoluta y de la ortogonalidad de las medidas en términos de las densidades espectrales.

1. Supongamos que están cumplidas las condiciones:

1) para ciertos  $c_1$  y  $c_2$

$$c_1 | \varphi_0(\lambda) |^2 \leq f_1(\lambda) \leq c_2 | \varphi_0(\lambda) |^2.$$

donde  $\varphi_0(\lambda)$  para cierto  $s > 0$  tiene el aspecto

$$\varphi_0(\lambda) = \int_{-s}^s e^{i\lambda t} g(t) dt \quad (5.10)$$

con una función de cuadrado integrable  $g(t)$ ;

$$2) \int \left| \frac{f_2(\lambda) - f_1(\lambda)}{f_1(\lambda)} \right|^2 d\lambda < \infty.$$

Entonces, cualquiera que sea  $T > 0$ , las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  correspondientes a  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , para las hipótesis  $H_1$  y  $H_2$  serán equivalentes.

II. Supongamos que para  $|\lambda|$  bastante grandes y ciertos  $c_1$  y  $c_2$  positivos se cumple la relación

$$c_1 \ll |\lambda|^\alpha f_1(\lambda) \leq c_2,$$

donde  $\alpha > 1$ . Si

$$\int \frac{|f_2(\lambda) - f_1(\lambda)|^2}{1 + \lambda^{2\alpha}} d\lambda < \infty,$$

entonces las medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , correspondientes a  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$  para las hipótesis  $H_1$ ,  $H_2$ , son equivalentes para todos los  $T > 0$ .

III. Exista la función analítica entera  $\varphi_0(\lambda)$  de tipo exponencial no superior a  $s < T$  para la cual con  $0 < c_1 < c_2$  está cumplida la desigualdad

$$c_1 \ll |\varphi_0(\lambda)|^2 f_1(\lambda) \leq c_2.$$

Entonces, si

$$\int \int \frac{\sin^2(T-s)(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \frac{f_2(\alpha) - f_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} \frac{f_2(\beta) - f_1(\beta)}{f_1(\beta)} d\alpha d\beta = +\infty \quad (5.11)$$

as medidas  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales.

IV. Si  $f_1(\lambda)$  y  $f_2(\lambda)$  son densidades racionales (fraccionales), la condición necesaria y suficiente de equivalencia es la condición

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} = 1.$$

Si  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)} \neq 1$  la regla, que distingue infaliblemente las hipótesis, consiste en lo siguiente. Sea  $m$  tal que existe un límite finito, distinto de cero,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2m} [f_1(\lambda) + f_2(\lambda)] = a.$$

Entonces existen también los límites

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2m} f_1(\lambda) = a_1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{2m} f_2(\lambda) = a_2, \quad (5.12)$$

con la particularidad de que  $a_1 + a_2 = a \neq 0$ ,  $a_1 \neq a_2$ . De (5.12) se deduce la existencia de la  $m - 1$ -ésima derivada de la trayectoria en observación  $\bar{x}(t) = x^{(m-1)}(t)$ . Con la probabilidad 1 existe el lí-



mite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n} \left[ \bar{x} \left( \frac{k}{2^n} T \right) - \bar{x} \left( \frac{k-1}{2^n} T \right) \right]^2 = a_1, \quad (5.13)$$

si es cierta la hipótesis  $H_1$ . Calculando el primer miembro de (5.13) y comparándolo con los valores  $a_1$  se puede elegir infaliblemente la hipótesis verdadera.

## 24.6. Estimaciones de los parámetros de las distribuciones para procesos aleatorios

**24.6.1. Planteamiento del problema.** Supongamos que acerca de la trayectoria del proceso en observación  $x(t)$ ,  $t \in [0, T]$  se conoce que es la trayectoria de un proceso al cual corresponde la medida  $\mu_\theta$  en el espacio de la función  $F_{[0, T]}$ . El parámetro  $\theta$ , que debe estimarse durante la observación, varía en cierto conjunto paramétrico  $\Theta$ . La particularidad de los problemas de la estadística de los procesos aleatorios consiste en que este parámetro, como regla, varía en un espacio de dimensión infinita (por ejemplo, el papel de parámetro puede jugarlo un valor medio desconocido que en principio puede ser cualquier función de  $F_{[0, T]}$ ). Supongamos que existe la medida  $\nu$  en  $F_{[0, T]}$  respecto de la cual todas las medidas  $\mu_\theta$  son absolutamente continuas y

$$\frac{d\mu_\theta}{d\nu}(x) = \rho(\theta, x). \quad (6.1)$$

En este caso la familia de medidas  $\{\mu_\theta, \theta \in \Theta\}$  se llama regular. Se supone que  $\Theta$  es una variedad lineal,  $\rho(\theta, x)$  es una función suficientemente regular. Entonces, la estimación del parámetro se puede determinar, por ejemplo, mediante el método de verosimilitud máxima. Señalamos que para los procesos con incrementos independientes, los procesos difusivos, así como los gaussianos las condiciones de regularidad y el aspecto de la densidad se pueden deducir de los resultados de los pp. 24.2—24.5.

Es más interesante (y más específico, precisamente, para la estadística de los procesos aleatorios) el caso de la familia singular dos a dos de medidas  $\{\mu_\theta, \theta \in \Theta\}$ . Entonces, si  $\theta_1 \neq \theta_2$  las medidas  $\mu_{\theta_1}$  y  $\mu_{\theta_2}$  son ortogonales. Por eso, es natural esperar que el parámetro  $\theta$  se puede determinar infaliblemente de una sola observación. Como estimación del parámetro  $\theta$  se entenderá la función  $\hat{\theta}(x)$  definida en  $F_{[0, T]}$  con valores en  $\Theta$ . Sea  $\Theta$  un espacio métrico separable completo (o un conjunto boreliano en el espacio de este tipo). Con respecto a  $\hat{\theta}(x)$  se supondrá que es medible respecto de las  $\sigma$ -álgebras  $\tilde{\mathfrak{F}}_{[0, T]}$  generadas en  $F_{[0, T]}$  por los conjuntos cilíndricos y  $\mathfrak{B}$  son las  $\sigma$ -álgebras de los conjuntos borelianos en  $\Theta$ , es decir, que la preimagen de todo conjunto boreliano en  $\Theta$  es medible en  $F_{[0, T]}$ . La estimación del parámetro  $\theta$  se llama conciliable si

$$\mu_\theta \{x : \hat{\theta}(x) = \theta\} = 1, \quad \forall \theta \in \Theta. \quad (6.2)$$

Si es posible determinar infaliblemente el parámetro esto significa que existe la estimación conciliable del parámetro  $\theta$ . Los ejemplos muestran que existen tales familias ortogonales dos a dos para las cuales no hay estimación conciliable. Por eso son de interés el problema referente a la existencia de estimaciones conciliables, así como los métodos de su construcción en caso de su existencia. Más abajo se dan algunos métodos de construcción de las estimaciones conciliables.

**24.8.2. Métodos de proyección.** Supongamos que las medidas  $\mu_\theta$  son tales que existen el valor medio del proceso  $a_\theta(t)$  y la función de correlación  $R_\theta(t, s)$ . Luego, existan dos variedades lineales  $L_1$  y  $L_2$  en  $F_{[0, T]}$  con intersección nula tales que  $a_\theta(\cdot) \in L_1$  para todos los  $\theta$ , y si  $\theta$  es el valor real del parámetro,  $x(t) - a_\theta(t)$ , con la probabilidad 1, pertenece a  $L_2$ . Lo último significa que si  $\varphi_k(\theta, t)$  son las funciones propias del operador integral con núcleo  $R_\theta(t, s)$  y  $\lambda_k(\theta)$  son los valores propios correspondientes, es decir,

$$\lambda_k(\theta) \varphi_k(\theta, t) = \int_0^T R_\theta(t, s) \varphi_k(\theta, s) ds.$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_0^T (x(s) - a_\theta(s)) \varphi_k(\theta, s) ds \right] \varphi_k(\theta, t) \in L_2.$$

Después, sea  $a_\theta(\cdot)$  la aplicación biunívoca  $\Theta$  en  $L_1$ . Designemos  $L = L_1 + L_2$  y con  $P$  el operador de «proyección» de  $L$  sobre  $L_1$ ; si  $z(t) = y_1(t) + y_2(t)$ , donde  $y_i(t) \in L_i$  (esta representación es única para todos los  $z(t) \in L$ ),  $Pz(t) = y_1(t)$ . Entonces para nuestras suposiciones

$$\mu_\theta(\{z(\cdot) : Pz(t) = a_\theta(t)\}) = 1.$$

Conociendo  $a_\theta(t)$  y, en virtud de que la aplicación  $a_\theta(t)$  es biunívoca, podemos determinar según  $a_\theta(t)$  el parámetro  $\theta$ . De este modo, usando el método de proyección, el problema principal consiste en construir el operador de proyección  $P$ .

**EJEMPLO.** La familia de medidas  $\mu_\theta$  es familia de medidas gaussianas con valor medio

$$a_\theta(t) = \int_0^T B(t, s) \theta(s) ds, \quad (6.3)$$

$\theta(s) \in L_2[0, T]$ ,  $\int_0^T \int_0^T B^2(t, s) dt ds < \infty$ , el operador de correlación

$R_\theta(t, s) = R(t, t)$  no depende de  $\theta$ .

Sean  $\varphi_k(t)$  y  $\lambda_k$  las funciones propias y los valores del operador integral con núcleo  $R(t, s)$ , respectivamente. Designemos con  $R^{1/2}$  la variedad lineal de funciones  $z(t)$  de  $L_2[0, T]$  de tipo  $z(t) =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t)$ , donde  $\sum \alpha_k^2 < \infty$  y con  $B$ , la variedad lineal de las

funciones que pueden ser representadas en forma del segundo miembro de (6.3)

Supongamos que  $B \cap R^{1/2} = (0)$ , lo que significa que para todos los  $\theta(s)$ , para los cuales  $\int_0^T \theta^2(s) ds > 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \left( \int_0^T \int_0^T B(t, s) \theta(s) ds \varphi_k(t) dt \right)^2 = +\infty.$$

Introduzcamos en  $B + R^{1/2}$  el producto escalar: si

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t) + \int_0^T B(t, s) \theta(s) ds,$$

entonces

$$(y(t), y(t))_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \int_0^T \theta^2(s) ds.$$

Supongamos que  $B(t, s)$  es una función simétrica y  $\{\varphi_k(t), \mu_k\}$  es una sucesión de funciones propias y de valores propios, correspondiente al operador integral con núcleo  $B(t, s)$ . Sea

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sqrt{\lambda_k} \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu_k \psi_k(t), \quad (6.4)$$

donde  $\sum \alpha_k^2 + \sum \beta_k^2 < \infty$ . Mostremos cómo se puede construir el operador  $P$  que pone la expresión

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \mu_k \psi_k(t)$$

en correspondencia con la función  $y(t)$  del tipo (6.4).

Designemos con  $\beta_k^{(n)}$  tales números que la expresión

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left\{ \int_0^T \left[ y(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \mu_m \psi_m(t) \right] \varphi_k(t) dt \right\}^2$$

tome el valor mínimo para  $\gamma_k = \beta_k^{(n)}$ . Entonces  $\beta_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k^{(n)}$  y

$$P y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_k^{(n)} \psi_k(t).$$

De este modo

$$a_{\theta}(t) = P x(t),$$

donde  $x(t)$  es la trayectoria observada.

24.6.3. Método de minimización de la funcional cuadrática. Sea la familia  $\{\mu_\theta, \theta \in \Theta\}$  la misma que el punto anterior. Señalemos que en el ejemplo considerado en él la estimación de la media se construía minimizando cierta sucesión de funcionales cuadráticas. En el caso general se puede analizar alguna sucesión de funcionales cuadráticas

$$K_n(x(\cdot)) = \int_0^T \int_0^T K_n(t, s) x(t) x(s) dt ds$$

y buscar la estimación de la media de  $a_\theta(t)$  en forma del límite de la sucesión de las funciones  $a_0^{(n)}(t)$  que dan el mínimo a la expresión

$$\int_0^T \int_0^T K_n(t, s) [x(t) - z(t)] [x(s) - z(s)] dt ds$$

para  $z(\cdot)$  que varía en el conjunto  $M$  de las medias probables  $\{a_\theta(\cdot), \theta \in \Theta\}$ . Para que esta estimación sea conciliable (en particular, para que exista el límite  $a_0^{(n)}(t)$ ) es suficiente que se cumplan las condiciones siguientes:

1) para  $\theta_1 \neq \theta_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \int_0^T K_n(t, s) [a_{\theta_1}(t) - a_{\theta_2}(t)] [a_{\theta_1}(s) - a_{\theta_2}(s)] dt ds = +\infty,$$

2) existe tal métrica  $\rho$  en  $\Theta$  que si  $\xi(t) = x(t) - a_\theta(t)$  ( $\theta$  es el valor real del parámetro), entonces, con la probabilidad 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_0^T K_n(t, s) \xi(t) [a_{\theta_1}(s) - a_0(s)] dt ds}{\int_0^T \int_0^T K_n(t, s) [a_{\theta_1}(t) - a_0(t)] [a_{\theta_1}(s) - a_0(s)] dt ds} = 0$$

uniformemente según tales  $\theta_1$  para los cuales  $\rho(\theta, \theta_1) \geq \varepsilon$ , cualquiera que sea  $\varepsilon > 0$ . Si se cumplen estas condiciones y  $\theta_n$  se determina valiéndose de la igualdad  $a_0^{(n)}(t) = a_{\theta_n}(t)$ , entonces  $\theta_n$  converge en probabilidad (en la métrica  $\rho$ ) hacia 0.

24.6.4. Método de verosimilitud máxima. Consideremos dos variantes de este método.

A. Exista, para cualesquiera  $t_1, \dots, t_n$  de  $[0, T]$ , la densidad conjunta siempre positiva de magnitudes  $x(t_1), \dots, x(t_n)$

$$p_\theta(t_1, \dots, t_n, x_1, \dots, x_n)$$

si  $\theta$  es el valor real del parámetro. Eligiendo un valor  $\theta_0 \in \Theta$  introduzcamos las funciones

$$f_n(\theta, x(\cdot)) = \frac{p_\theta(t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}, x(t_1^{(n)}), \dots, x(t_n^{(n)}))}{p_{\theta_0}(t_1^{(n)}, \dots, t_n^{(n)}, x(t_1^{(n)}), \dots, x(t_n^{(n)}))} \quad (6.5)$$

$\hat{\theta}_n$  es una funcional de la trayectoria en observación) donde

$$t) = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = T \quad \text{y} \quad \max_h (t_h^{(n)} - t_{h-1}^{(n)}) \rightarrow 0$$

para  $n \rightarrow \infty$ . Si el proceso  $x(t)$  es estocásticamente continuo cualquiera que sea el valor real del parámetro, entonces, si  $\theta_0$  es el valor real del parámetro,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\theta, x(\cdot)) = 0$ , con probabilidad 1, para todos los  $\theta \neq \theta_0$  y para  $\theta = \theta_0$  este límite es igual a 1.

Sea  $\hat{\theta}_n$  un valor para el cual  $f_n(\theta, x(\cdot))$  alcanza el máximo (se supone que  $f_n(\theta, x(\cdot))$  es continua según  $\theta$  y el mismo  $\theta$  varía en un compacto). Es natural elegir a título de la estimación la magnitud  $\hat{\theta}_n$ . Hay que analizar la conciliabilidad de esta estimación en cada caso concreto.

B. Supongamos que  $x(t) \in L_2[0, T]$ . Elegimos un sistema ortonormalizado de funciones en  $L_2[0, T]$   $\{\varphi_k(t), k = 1, 2, \dots\}$  y hagamos

$$x_k = \int_0^T \varphi_k(t) x(t) dt.$$

Sea  $p_0^{(n)}(y_1, \dots, y_n)$  la densidad conjunta de las magnitudes  $x_1, \dots, x_n$ ; si  $\theta$  es el valor real del parámetro

$$f_n(\theta, x(\cdot)) = \frac{p_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}{p_{\theta_0}^{(n)}(x_1, \dots, x_n)}. \quad (6.6)$$

La estimación  $\hat{\theta}_n$  se determina como el punto donde la última función alcanza el máximo.

**24.6.5. Método de Bayes.** Estén cumplidas las condiciones del punto anterior. Designemos con  $f_n(\theta, x(\cdot))$  la función determinada por la igualdad (6.5) o (6.6). Supongamos que  $\Theta$  es un conjunto abierto convexo en el espacio normalizado lineal, demos en  $\Theta$  tal medida boreliana  $\nu$  que la medida de cualquier conjunto abierto sea positiva. En calidad de la estimación de Bayes del parámetro  $\theta$  se toma la sucesión de estimaciones

$$\hat{\theta}_n = \frac{\int \theta f_n(\theta, x(\cdot)) \nu(d\theta)}{\int f_n(\theta, x(\cdot)) \nu(d\theta)}.$$

Hay que investigar la conciliabilidad de esta estimación en cada caso concreto.

## ESTADÍSTICA DE LOS PROCESOS ALEATORIOS ESTACIONARIOS EN AMPLIO SENTIDO

### 25.1. Propiedades de las estimaciones estadísticas para las características de procesos estacionarios

**25.1.1. Problemas de la estadística de procesos estacionarios.** Supongamos que se observa un proceso aleatorio  $\{\xi(t), t \in T\}$  y los razonamientos apriorísticos o el test estadístico realizado de antemano permiten considerar que el proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  tiene el aspecto de:

- 1)  $\xi_0(t) = \xi_0(t), t \in T$ , o bien
- 2)  $\xi_0(t) = m + \xi_0(t), t \in T$ , o bien

$$3) \xi(t) = \sum_{h=1}^r \theta_h a_h(t) + \xi_0(t), \text{ donde en cada caso } \xi_0(t) \text{ es un}$$

proceso aleatorio estacionario en amplio sentido con esperanza matemática nula.

Sea  $x(t), t \in T_0$ , la trayectoria del proceso  $\xi(t)$  observada durante el tiempo  $T_0$ , donde  $T_0$  puede ser un intervalo en el eje de tiempo  $T_0 = [a, b]$  en el caso del tiempo continuo o una sucesión de momentos de observación:  $T_0 = \{t_k, k = \overline{1, n}\}$ .

En el caso 1) se requiere estimar a base de la observación  $x(t), t \in T_0$ , la función espectral o la densidad espectral del proceso  $\xi(t)$ . En el caso 2) la función espectral del proceso  $\xi_0(t)$  se supone conocida y hay que estimar a base de las observaciones  $x(t), t \in T_0$ , la media desconocida  $m$ . En el caso 3) la función espectral del proceso  $\xi_0(t)$  también se supone conocida y hay que estimar a base de las observaciones  $x(t), t \in T_0$ , los parámetros desconocidos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$  de la

regresión  $A(t) = \sum_{h=1}^r \theta_h a_h(t)$ , donde las funciones  $a_h(t), k = \overline{1, r}$ , se suponen conocidas.

Estos son los problemas fundamentales de la estadística de procesos estacionarios. Pueden existir variantes, por ejemplo, la estimación previa de la función espectral para la estimación posterior de la media o los parámetros de la regresión.

**25.1.2. Propiedades de las estimaciones.** Sea  $\hat{\mu}$  una estadística destinada a resolver uno de los problemas mencionados, la cual representa una funcional de la trayectoria en observación  $x(t), t \in T_0$ :  $\hat{\mu} = g(x(t), t \in T_0)$ .

En el conjunto de estadísticas  $\hat{\mu}$  es natural elegir las que tienen «buenas» propiedades. Las propiedades más deseables de las estadísticas son las siguientes.

1. Linealidad (la funcional  $g(\cdot)$  debe ser lineal).
2. Carácter insesgado. Si  $h$  es la característica a estimar del proceso

$\{\xi(t), t \in T\}$  y  $\mu$ , la estadística destinada a estimar  $h$ , se exige que  $M\hat{\mu} = h$ .

3. Conciliabilidad. La estadística  $\hat{\mu}$  debe converger, en probabilidad, a  $h$  cuando aumenta el intervalo de observación.

4. Eficiencia. La estadística  $\hat{\mu}$  debe tener la varianza mínima entre las estadísticas de la clase dada.

A veces hay que limitarse a exigencias más débiles que las exigencias de carácter insesgado y eficiencia.

2'. Carácter insesgado asintótico.  $M\hat{\mu} \rightarrow h$  cuando el intervalo de observación crece ilimitadamente.

4'. Eficiencia asintótica. La estadística  $\hat{\mu}$  debe tener la varianza asintóticamente mínima entre las estadísticas de la clase dada cuando el intervalo de observación crece ilimitadamente.

Para verificar la conciliabilidad de la estimación es suficiente cerciorarse de que su varianza tiende a cero.

## 25.2. Estimaciones de la media desconocida

25.2.1. Media de tiempo (estimación media aritmética). Sea  $x(t)$ ,  $t \in T_0$ , la trayectoria del proceso  $\xi(t) = m + \xi_0(t)$ ,  $t \in T_0$  donde  $\xi_0(t)$  es un proceso estacionario en amplio sentido con media nula y función covariacional  $B(t)$ . Se supone que el tiempo  $t$  es continuo y  $T_0 = [a, b]$ .

Entre las estimaciones insesgadas lineales del proceso estacionario medio la forma más simple la tiene la estadística  $\bar{m}$ , que se llama media de tiempo o estimación media aritmética:

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(t) dt, \quad (2.1)$$

Si el proceso estacionario en observación es ergódico la estimación media aritmética  $\bar{m}$  es conciliable. La estimación de la media  $m$  según el método de los cuadrados mínimos es la estimación media aritmética  $\bar{m}$ .

Determinemos la clase  $M_g$  de estimaciones insesgadas lineales de la media desconocida

$$M_g = \left\{ \hat{\mu} : \hat{\mu} = \int_a^b g(t) x(t) dt \right\},$$

donde las funciones  $g(t)$  pertenecen a la clase de tales funciones equicontinuas y uniformemente limitadas en  $[a, b]$  que  $\int_a^b g(t) dt = 1$ , y  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , es la trayectoria del proceso  $\{\xi(t), t \in T\}$  que tiene densidad espectral continua en cero.

**Teorema 1.** La estimación media aritmética  $\bar{m}$  tiene varianza asintóticamente mínima en la clase  $M_g$ .

Do este modo, entre las estimaciones  $\hat{\mu} \in M_g$  para  $b - a \rightarrow \infty$  no existen estimaciones más eficientes que la estimación media aritmética.

Se puede obtener una clase de estimaciones insesgadas lineales considerablemente más amplia que  $M_{\mathcal{K}}$  investigando las estimaciones "en suspensión" del tipo

$$\hat{\mu} = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} x(t_k), \quad a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b, \quad (2.2)$$

donde  $\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} = 1$  para cualquier  $n \geq 1$ .

Sea  $M_{\hat{\mu}}$  la clausura de la clase de estimaciones del tipo (2.2) en media cuadrática.

**Teorema 2.** En  $M_{\hat{\mu}}$  existe, salvo la equivalencia, la única estimación  $\hat{m}$  de la media desconocida que tiene varianza mínima, con la particularidad de que

$$M\hat{m}x(t) \equiv C, \quad t \in [a, b], \quad (2.3)$$

donde  $C = \inf_{\hat{\mu} \in M_{\hat{\mu}}} D\hat{\mu}$  es la varianza de la estimación  $\hat{m}$ .

**25.2.2. Cálculo de las estimaciones de la media a base del pronóstico.** Uno de los métodos de construcción de las estimaciones eficientes de la media para los procesos estacionarios ergódicos se basa en el análisis del pronóstico construido a partir de las observaciones  $x(t)$ ,  $t \in T_0 = [a, b]$ .

Sea  $\hat{x}(t)$  para  $t \in [a, b]$  el mejor pronóstico insesgado lineal de las estimaciones  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , es decir,  $M\hat{x}(t) = m$ ,  $M|\hat{x}(t) - \xi(t)|^2 = \min$  para todos los  $t \in [a, b]$ .

Introduzcamos la estadística  $\hat{\mu}_A$  determinada como media del tiempo, construida mediante el pronóstico  $\hat{x}(t)$ : para  $[a, b] \subset [-A, A]$

$$\hat{\mu}_A = \frac{1}{2A} \left[ \int_{-A}^a \hat{x}(t) dt + \int_a^b x(t) dt + \int_b^A \hat{x}(t) dt \right]. \quad (2.4)$$

Para la estimación insesgada lineal  $\hat{m}$  con varianza mínima se verifica el

**Teorema 3.**

$$\hat{m} = \lim_{A \rightarrow \infty} \hat{\mu}_A.$$

Si el proceso  $\xi_0(t)$  es tal que  $\int_{-\infty}^{\infty} B(t) dt < \infty$ , entonces el resultado del teorema 3 puede ser escrito de una manera más cómoda para el cálculo.

Sea  $\hat{x}_0(t)$  el mejor pronóstico lineal de los valores  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , hecho en supuesto de que  $m = 0$  (si  $t \in [a, b]$ ,  $\hat{x}_0(t) = x(t)$ ).

**Teorema 4.** Si  $\int_{-\infty}^{\infty} B(t) dt < \infty$  existe una constante  $d$  tal que

$$\hat{m} = d \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_0(t) dt$$



y  $d$  se determina del único modo de la condición del carácter insesgado:  
 $M\hat{m} = m$ .

**EJEMPLO 1.** Sea igual a  $B(t) = e^{-\alpha|t|}$  la función covariacional del proceso  $\xi(t) = m + \hat{\xi}_0(t)$  y  $m$  desconocida.

Se observa la trayectoria  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . Suponiendo que  $m = 0$  encontramos el mejor pronóstico lineal

$$\begin{cases} \hat{x}_0(b+\tau) = e^{-\alpha\tau} x(b), & \tau > 0; \\ \hat{x}_0(t) = x(t), & t \in [a, b]; \\ \hat{x}_0(a-\tau) = e^{-\alpha\tau} x(a), & \tau > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Por consiguiente, } \hat{m} &= d \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_0(t) dt = d \left[ \int_{-\infty}^a \hat{x}_0(t) dt + \int_a^b x(t) dt + \right. \\ &\left. + \int_b^{\infty} \hat{x}_0(t) dt \right] = d \left[ \frac{x(a)}{\alpha} + \int_a^b x(t) dt + \frac{x(b)}{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

La condición del carácter insesgado da

$$\begin{aligned} m = M\hat{m} &= dM \left[ \frac{x(a)}{\alpha} + \int_a^b x(t) dt + \frac{x(b)}{\alpha} \right] = \\ &= d \left[ \frac{m}{\alpha} + m(b-a) + \frac{m}{\alpha} \right], \end{aligned}$$

de donde

$$d = \frac{\alpha}{2 + \alpha(b-a)}.$$

De este modo

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \frac{x(a) + \int_a^b x(t) dt + x(b)}{2 + \alpha(b-a)}, \\ D\hat{m} &= \frac{2}{2 + \alpha(b-a)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Para comparar: la varianza de la estimación media aritmética  $\bar{m}$

$$D\bar{m} = \frac{2[e^{-\alpha(b-a)} - 1 + \alpha(b-a)]}{\alpha^2(b-a)^2}, \quad (2.6)$$

además,  $D\bar{m} > D\hat{m}$ ,  $\frac{D\hat{m}}{D\bar{m}} \rightarrow 1$ ,  $b-a \rightarrow \infty$ .

**25.2.3. Ecuaciones del tipo de Wiener-Hopf.** En una serie de casos se puede obtener la fórmula explícita para la estimación lineal

insesgada  $\hat{m}$  de la media desconocida  $m$ , partiendo de la representación formal

$$\hat{m} = \int_a^b x(t) dG(t). \quad (2.7)$$

La función  $G(t)$  debe satisfacer la condición sobre el carácter insesgado de  $\int_a^b dG(t) = 1$  y es la solución de la ecuación integral de tipo de Wiener-Hopf

$$\int_a^b B(t-s) dG(s) = C, \quad t \in [a, b] \quad (2.8)$$

que se obtiene de (2.3) para las estimaciones de este tipo.

Para los procesos de densidad espectral racional fraccional, la ecuación (2.8) siempre tiene una solución que contiene combinaciones lineales de funciones delta de Dirac y sus derivadas. Tal solución puede ser hallada explícitamente (véase el p. 25.3.3).

**EJEMPLO 2.** En el caso de un proceso estacionario de Márkov, la ecuación

$$\int_a^b e^{-\alpha(t-s)} dG(s) = C, \quad t \in [a, b],$$

tiene la solución

$$G(t) = \frac{C}{2} [u(t-a) - \alpha t + u(b-t)],$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

La estimación  $\hat{m} = \int_a^b x(t) dG(t)$  coincide de modo natural con la mencionada en el ejemplo 1.

**EJEMPLO 3.** Tenga el proceso  $\xi_q(t)$  densidad espectral racional fraccional del tipo

$$f(\lambda) = \frac{1}{|Q(i\lambda)|^2},$$

donde  $Q(z) = \sum_{h=0}^q q_h z^h$ ,  $q_h$  son números reales (proceso de autorregresión de orden  $q$ ).

En este caso la solución de la ecuación (2.8) tiene el aspecto

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{Cq_0}{2\pi} \{q_0 + q_1 [\delta(b-t) + \delta(t-a)] + q_2 [\delta'(b-t) - \delta'(t-a)] + \dots + q_n [\delta^{(n-1)}(b-t) + (-1)^{n-1} \delta^{(n-1)}(t-a)]\},$$

donde  $\delta(t)$  es la función delta de Dirac,  $\delta^{(k)}(t)$  es su  $k$ -ésima derivada. Por consiguiente

$$\hat{m} = \frac{Cq_0}{2\pi} \left\{ q_0 \int_a^b x(t) dt + q_1 [x(b) + x(a)] + \right. \\ \left. + q_2 [x'(b) - x'(a)] + \dots + q_n [x^{(n-1)}(b) + (-1)^{n-1} x^{(n-1)}(a)], \right.$$

donde

$$C = D\hat{m} = \frac{2\pi}{q_0 [2q_1 + q_0(b-a)]}.$$

**25.2.4. Método de Yaglom.** Tenga el proceso  $\xi_a(t)$  densidad espectral racional fraccional

$$f(\lambda) = \left| \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} \right|^2,$$

donde  $P(z)$  es un polinomio de grado  $p$ ,  $Q(z)$ , un polinomio de grado  $q$ ,

$p < q$  y sea  $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\zeta(\lambda)$  la representación espectral de la trayectoria  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ . El método de Yaglom consiste en representar la mejor estimación insesgada lineal  $\hat{m}$  en la forma

$$\hat{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(a, b)}(\lambda) d\zeta(\lambda) \quad (2.9)$$

y señalar las condiciones que determinan unívocamente la característica espectral  $\varphi_{(a, b)}(\lambda)$  de la estimación  $\hat{m}$  y que permiten calcularla de manera eficiente.

**Teorema de Yaglom.** Para los procesos con densidades espectrales racionales fraccionales la característica espectral  $\varphi_{(a, b)}(\lambda)$  en (2.9) se determina unívocamente por las condiciones:

a)  $\varphi_{(a, b)}(\lambda)$  es una función completa tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{(a, b)}(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty;$$

b)  $\varphi_{(a, b)}(\lambda)$  puede ser representada en la forma

$$\varphi_{(a, b)}(\lambda) = e^{i\lambda a} \frac{w_a(\lambda) \overline{Q(i\lambda)}}{\lambda |P(i\lambda)|^2} + e^{i\lambda b} \frac{w_b(\lambda) Q(i\lambda)}{\lambda |P(i\lambda)|^2}, \quad (2.10)$$

donde  $\varphi_a(\lambda) = \frac{w_a(\lambda) \overline{Q(i\lambda)}}{\lambda |P(i\lambda)|^2}$  es una función analítica en el semiplano superior,  $w_a(0) \neq 0$ ;  $\varphi_b(\lambda) = \frac{w_b(\lambda) Q(i\lambda)}{\lambda |P(i\lambda)|^2}$  es una función analítica en el semiplano inferior,  $w_b(0) = 0$ ;

c)  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi_{(a, b)}(\lambda) = 1$  (condición del carácter insesgado).

Las funciones  $w_a(\lambda)$  y  $w_b(\lambda)$ , en virtud de la segunda parte de la condición a), pueden ser sólo polinomios de grado no superior a  $p$ . Para la variancia de la estimación  $\hat{m}$ , el método de Yaglom da la fórmula

$$D\hat{m} = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{(a, b)}(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda = 2\pi \left| \frac{w_a(0)}{q_0} \right|^2 = 2\pi \left| \frac{w_b(0)}{q_0} \right|^2. \quad (2.11)$$

EjemPlo 4. Tenga el proceso  $\xi_0(t)$  la densidad espectral  $f(\lambda) = B \frac{\lambda^2 + \alpha^2}{\lambda^4 + \alpha^4}$  (modelo mixto de autorregresión y sumación móvil).

A partir de la observación  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , hay que dar la mejor estimación insesgada de la media  $m$  del proceso  $\xi(t) = m + \xi_0(t)$ .

En este caso la condición b) del teorema de Yaglom da

$$\varphi_{a, b}(\lambda) = e^{i\lambda a} \frac{w_a(\lambda) [\lambda^2 + i\sqrt{2}\alpha\lambda - \alpha^2]}{a\lambda(\lambda^2 + \alpha^2)} + e^{i\lambda b} \frac{w_b(\lambda) [\lambda^2 - i\sqrt{2}\alpha\lambda - \alpha^2]}{\lambda(\lambda^2 + \alpha^2)}, \quad (2.12)$$

donde  $w_a(\lambda)$  y  $w_b(\lambda)$  son algunos polinomios de orden no superior a 1, cuyos coeficientes deben ser elegidos de tal modo que satisfagan las condiciones a), b) y c).

El segundo miembro de (2.12) es más cómodo representarlo en la forma

$$\varphi_{a, b}(\lambda) = e^{i\lambda a} \left[ c_a^0 + \frac{c_a^1}{\lambda} + \frac{c_a^2}{\lambda - i\alpha} + \frac{c_a^3}{\lambda + i\alpha} \right] + e^{i\lambda b} \left[ c_b^0 + \frac{c_b^1}{\lambda} + \frac{c_b^2}{\lambda - i\alpha} + \frac{c_b^3}{\lambda + i\alpha} \right], \quad (2.13)$$

donde los coeficientes  $c_a^k$ ,  $c_b^k$ ,  $k=0, 3$  deben ser determinados.

De la condición a) se deduce que

$$\left. \begin{aligned} c_a^1 + c_b^1 &= 0; \\ e^{-a\alpha} c_a^2 + e^{-b\alpha} c_b^2 &= 0; \\ e^{a\alpha} c_a^3 + e^{b\alpha} c_b^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

La condición del carácter insesgado c) da:

$$c_a^0 + c_b^0 + i(ac_a^1 + bc_b^1) + i \frac{c_a^2 + c_b^2}{\alpha} - i \frac{c_a^3 + c_b^3}{\alpha} = 1. \quad (2.15)$$

De la condición b) se deduce que el coeficiente de  $e^{i\alpha\lambda}$  en el segundo miembro de (2.13) se anula para  $\lambda = \frac{\pm 1 - i}{\sqrt{2}} \alpha$  y el coeficiente de  $e^{i\beta\lambda}$  se anula para  $\lambda = \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}} \alpha$ , lo que da las cuatro ecuaciones para definir  $c_a^k, c_b^k, k=0,3$ , las cuales faltan en (2.14) y (2.15). La resolución de las ecuaciones correspondientes nos ofrece

$$\hat{m} = d \left\{ \left( \sqrt{2} \operatorname{sh} \frac{\alpha T_0}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha T_0}{2} \right) [x(a) + x(b)] + \right. \\ \left. + \alpha \left( \operatorname{sh} \frac{\alpha T_0}{2} + \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha T_0}{2} \right) \int_a^b x(t) dt - \right. \\ \left. - \sqrt{2} \alpha \int_a^b \operatorname{ch} \left( \frac{a+b}{2} - t \right) x(t) dt \right\},$$

donde  $T_0 = b - a$ ,

$$d = \left[ (2 + \sqrt{2} \alpha T_0) \operatorname{ch} \frac{\alpha T_0}{2} + \alpha T_0 \operatorname{sh} \frac{\alpha T_0}{2} \right]^{-1}, \\ D\hat{m} = \frac{2\pi B \left( \operatorname{sh} \frac{\alpha T_0}{2} + \sqrt{2} \operatorname{ch} \frac{\alpha T_0}{2} \right)}{\alpha (2 + \sqrt{2} \alpha T_0) \operatorname{ch} \frac{\alpha T_0}{2} + \alpha^2 T_0 \operatorname{sh} \frac{\alpha T_0}{2}}.$$

### 25.3. Estimaciones de los parámetros de la regresión

25.3.1. Estimaciones de los parámetros de la regresión mediante el método de los cuadrados mínimos. Supongamos que se observa el proceso del aspecto

$$\xi(t) = \sum_{h=1}^r \theta_h a_h(t) + \xi_0(t), \quad (3.1)$$

donde  $\xi_0(t)$  es un proceso estacionario con media nula,  $a_h(t), k = \overline{1, r}$ , son funciones no aleatorias conocidas que se suponen ser linealmente independientes,  $\theta_h, k = \overline{1, r}$ , son parámetros desconocidos. El problema referente a la definición de las estimaciones de los parámetros  $\theta_h$  de la realización  $x(t), t \in [a, b]$ , del proceso  $\xi(t)$  se llama problema de la estimación de los parámetros de la regresión

$$A(t, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = \sum_{h=1}^r \theta_h a_h(t).$$

En las aplicaciones radiotécnicas de los procesos estacionarios  $A(t) = A(t, \theta_1, \dots, \theta_r)$  se llama señal (útil),  $\xi_0(t)$  ruido estacionario

rio. En las aplicaciones económicas, biológicas, sociológicas  $A(t)$  se llama *trend* (tendencia).

El aspecto más simple lo tienen las estimaciones insesgadas lineales de los parámetros de la regresión, calculadas por el método de los cuadrados mínimos, es decir, las estimaciones  $\tilde{\theta}_k$  que minimizan la funcional cuadrática:

$$\int_a^b \left| x(t) - \sum_{h=1}^r \theta_h a_h(t) \right|^2 dt.$$

Si  $a_k(t) \in L_2[a, b]$ ,  $k = \overline{1, r}$ , entonces

$$\tilde{\theta}_k = \sum_{j=1}^r c_{kj}^{-1} \int_a^b \overline{a_j(t)} x(t) dt, \quad (3.2)$$

donde  $c_{kj}^{-1}$  es el  $(k, j)$ -ésimo elemento de la matriz inversa a la matriz

$$c_{kj} = \int_a^b \overline{a_k(t)} a_j(t) dt.$$

Señalemos que cuando se calculan los parámetros de la regresión por el método de los cuadrados mínimos no se supone el conocimiento de las propiedades de correlación y espectrales del proceso  $\xi(t)$ .

Si suponemos que la función espectral  $F_0(\lambda)$  del proceso  $\xi_0(t)$  es absolutamente continua y la densidad espectral  $f_0(\lambda)$  es acotada y casi siempre positiva, podemos afirmar mucho más:

**Teorema 1.** *Para que las estimaciones  $\tilde{\theta}_k$  de los parámetros  $\theta_k$  por el método de los cuadrados mínimos sean conciliables, es necesario y suficiente que para todos los  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$  la función  $a(t) = \sum_{k=1}^r \rho_k a_k(t)$  satisfaga la condición*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|^2 dt = \infty.$$

Suponiendo que el proceso  $\xi_0(t)$  tiene densidad espectral racional fraccional y las funciones básicas  $a_k(t)$  tienen el aspecto

$$a_k(t) = e^{i\omega_k t} t^{m_k}, \quad (3.3)$$

donde  $m_k$  son números enteros no negativos,  $\omega_k$ , números reales (en este caso  $A(t)$  se llama *regresión trigonométrica polinomial*), las estimaciones  $\tilde{\theta}_k$  de los parámetros  $\theta_k$  de la regresión son asintóticamente eficientes en el siguiente sentido.

Sean  $G(a, b)$  una matriz covariacional de las mejores estimaciones insesgadas lineales de los parámetros de la regresión (su aspecto explícito se da en el punto siguiente),  $\tilde{G}(a, b)$ , una matriz covariacional

de las estimaciones  $\tilde{\theta}_h$  de parámetros  $\theta_h$ , determinados por el método de los cuadrados mínimos. Entonces  $\tilde{G}(a, b) \geq G(a, b)$  (es decir,  $\tilde{G}(a, b) - G(a, b)$  es una matriz no negativamente determinada y existe una función no decreciente y no negativa  $g(t)$  tal que

$$\lim_{b-a \rightarrow \infty} g(b-a) \tilde{G}(a, b) = \lim_{b-a \rightarrow \infty} g(b-a) G(a, b) \neq 0.$$

**25.3.2. Mejores estimaciones insesgadas lineales de los parámetros de la regresión.** Si se conocen la función espectral  $F(\lambda)$  y, por consiguiente, la función de correlación  $B(t)$  del proceso  $\xi_0(t)$ , entonces se supone corrientemente que las funciones  $\alpha_h(t)$ , que forman la base de la regresión  $A(t)$ , son tales que el proceso  $\xi(t)$  permite la representación

espectral  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\zeta(\lambda)$ , donde  $d\zeta(\lambda) = \sum_{h=1}^r \theta_h \overline{\alpha_h(\lambda)} dF(\lambda) + d\zeta_0(\lambda)$ ,  $\zeta_0(\lambda)$  es un proceso espectral que corresponde al proceso  $\xi_0(t)$ :  $\xi_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} d\zeta_0(\lambda)$ , y  $\alpha_h(\lambda)$  son funciones de cuadrado integrable según la medida espectral  $F(\cdot)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_h(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty$$

(o, abreviadamente,  $\alpha_h(\lambda) \in L_2(F)$ ) las cuales son soluciones de la ecuación integral del tipo de Wiener-Hopf:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \alpha_h(\lambda) dF(\lambda) = a_h(t). \quad (3.4)$$

**EJEMPLO 1.** Sea  $\xi(t) = \theta a(t) + \xi_0(t)$  y sean continuas casi todas las trayectorias del proceso  $\xi_0(t)$ . Si la función  $a(t)$  tiene discontinuidad en el punto  $t_0 \in (a, b)$ , entonces valiéndose de la única realización de  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , se puede definir exactamente los valores del parámetro  $\theta$ , a saber, la estimación

$$\theta_h = \frac{1}{a(t_0+) - a(t_0-)} [x(t_0+h) - x(t_0-h)],$$

con la probabilidad 1, para  $h \rightarrow 0$  converge al valor exacto  $\theta$ . Para la función  $a(t)$  del ejemplo dado la ecuación (3.4) no tiene soluciones en  $L_2(F)$ .

**Teorema 2.** Para que la ecuación (3.4) tenga solución en  $L_2(F)$  es necesario y suficiente que

$$\inf \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 dF(\lambda) \neq 0$$

ó lo que es equivalente,

$$\inf_{j, l} \sum c_j c_l b(t_j - t_l) > 0,$$

donde  $\inf$  se toma según  $\Psi(\lambda)$  que son sumas finitas de la forma

$$\sum_j c_j e^{i\lambda t_j}, t_j \in T,$$

y tales, que  $\sum_j c_j a_k(t_j) = 1, k = \overline{1, r}$ . Si la solución de la ecuación (3.4) existe, es única en  $L_2(P)$ .

Si las soluciones de las ecuaciones (3.4) están obtenidas el problema de la estimación de los parámetros de la regresión se reduce a resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas.

**Teorema 3.** Si la función espectral  $F(\lambda)$  y las funciones básicas  $a_k(t), k = \overline{1, r}$ , de la regresión  $A(t) = \sum \theta_k a_k(t)$  satisfacen las condiciones del teorema 1 y  $\alpha_k(\lambda)$  son soluciones de las ecuaciones (3.4), entonces las estimaciones insesgadas lineales  $\hat{\theta}_k$  de los parámetros  $\theta_k$  que tienen varianza mínima se determinan por las fórmulas

$$\hat{\theta}_k = \sum_{j=1}^r c_{kj} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_j(\lambda)} d\zeta(\lambda), \quad (3.5)$$

donde  $\zeta(\lambda)$  es la representación espectral de la trayectoria  $x(t), t \in [a, b]$ ,  $c_{kj} = \text{cov}(\hat{\theta}_k, \hat{\theta}_j)$  es el  $(kj)$ -ésimo elemento de la matriz  $C$  inversa a la matriz  $D = (d_{kj}, k, j = \overline{1, r})$ , donde

$$d_{kj} = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\alpha_k(\lambda)} f(\lambda) \alpha_j(\lambda) d\lambda.$$

Si  $C_1$  es la matriz covariacional de las estimaciones insesgadas lineales distintas de  $\hat{\theta}_k, k = \overline{1, r}$ , determinadas por la igualdad (3.5), entonces  $C \leq C_1$  en el sentido de que la matriz  $C_1 - C$  está determinada no negativamente.

25.3.3. Solución de las ecuaciones del tipo de Wiener-Hopf para las densidades espectrales racionales fraccionales. En este caso, prácticamente más importante, cuando la densidad espectral  $f(\lambda)$  del proceso  $\xi_0(t)$  es racional fraccional, es decir,

$$f(\lambda) = \left| \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} \right|^2,$$

donde  $P(z) = \sum_{k=1}^q p_k z^k, Q(z) = \sum_{k=1}^q q_k z^k, p < q$ , la solución de las ecuaciones (3.4), así como la solución del problema de la estimación de los parámetros de la regresión, pueden ser halladas en forma explícita.

**Teorema 4.** Si los polinomios  $P(z)$  y  $Q(z)$  tienen ceros sólo en el semiplano izquierdo, ninguna de las raíces del polinomio  $P(z)$  no es pura-



mente imaginaria y las funciones  $a_k(t)$ ,  $k = \overline{1, r}$ , satisfacen las condiciones del teorema 1, entonces las soluciones  $\alpha_k(\lambda)$  de la ecuación

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i b \lambda} \alpha_k(\lambda) \left| \frac{P(i\lambda)}{Q(i\lambda)} \right|^2 d\lambda = a_k(t)$$

tiene el aspecto

$$\alpha_k(\lambda) = e^{i a \lambda} \sum_{j=0}^{n-m-1} c_{jh}^{(a)}(i\lambda)^j + e^{i b \lambda} \sum_{j=0}^{n-m-1} c_{jh}^{(b)}(i\lambda)^j + \int_a^b e^{i \lambda t} c_h(t) dt,$$

donde  $c_h(t) = \frac{1}{2\pi} Q\left(\frac{d}{dt}\right) Q\left(-\frac{d}{dt}\right) v_h(t)$ ,  $v_h(t)$  es la solución de la ecuación diferencial

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) P\left(-\frac{d}{dt}\right) v_h(t) = a_k(t), \quad t \in (a, b)$$

con las condiciones de frontera

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{d^l}{dt^l} Q\left(-\frac{d}{dt}\right) v_h(t) = \lim_{t \rightarrow b} \frac{d^l}{dt^l} Q\left(\frac{d}{dt}\right) v_h(t) = 0,$$

$$l = \overline{0, m-1};$$

$$c_{jh}^{(a)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=j+m+1}^n q_l Q\left(-\frac{d}{dt}\right) v_h(t);$$

$$c_{jh}^{(b)} = \lim_{t \rightarrow b} \frac{1}{2\pi} \sum_{l=j+m+1}^n (-1)^l q_l Q\left(\frac{d}{dt}\right) v_h(t).$$

## 25.4. Estimaciones de la densidad espectral y de la función espectral de las sucesiones estacionarias

**25.4.1. Periodograma.** Sea  $\{\xi_k(t), t \in T\}$  una sucesión a catoría estacionaria en amplio sentido (serie de tiempo) y sea  $x(t), t \in T_a$ , la trayectoria del proceso  $\xi(t)$ , donde  $T_a = \{t_k, k = \overline{1, n}\}$ ,  $t_k \in T$ .

La base de la mayoría de las estadísticas destinadas a estimar la función espectral y la densidad espectral del proceso  $\{\xi_k(t), t \in T\}$  es una estadística que se llama periodograma y que se define por la igualdad

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t \in T_a} x(t) e^{i t \lambda} \right|^2.$$

**Observación.** Para los procesos con tiempo continuo el periodograma se determina como

$$I_{(a, b)}(\lambda) = \frac{1}{2\pi(b-a)} \left| \int_a^b x(t) e^{i t \lambda} dt \right|^2, \quad (4.2)$$

donde  $x(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , es la trayectoria del proceso estacionario en estudio. Los resultados formulados más abajo tienen análogos continuos correspondientes.

Si  $f(\lambda)$  es la densidad espectral del proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M I_n(\lambda) = f(\lambda), \quad (4.3)$$

es decir, el periodograma es una estimación asintóticamente insesgada de la densidad espectral. Sin embargo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cov} \{I_n(\lambda_1), I_n(\lambda_2)\} = \begin{cases} 2f^2(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \\ f^2(\lambda), & \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \\ 0, & \lambda_1 \neq \lambda_2, \end{cases} \quad (4.4)$$

o sea, el periodograma no es una estimación conciliable para la densidad espectral.

El periodograma  $I_n(\lambda)$  considerada como un proceso aleatorio según  $\lambda$  tiene para  $n$  grandes trayectorias fluctuantes en virtud de (4.4).

25.4.2. Estimaciones de la función espectral. Sea

$$\hat{F}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} I_n(\mu) d\mu \quad (4.5)$$

y sea  $F(\lambda)$  una función espectral del proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ . La estadística  $\hat{F}_n(\lambda)$  es una estimación asintóticamente insesgada de la función espectral  $F(\lambda)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M \hat{F}_n(\lambda) = F(\lambda). \quad (4.6)$$

Si  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , es un proceso ergódico, la estadística  $\hat{F}_n(\lambda)$  es una estimación conciliable de la función espectral, lo que justifica la definición de  $\hat{F}_n(\lambda)$  como una función espectral empírica.

Si  $F(\lambda)$  es absolutamente continua,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\lambda} |\hat{F}_n(\lambda) - F(\lambda)| = 0. \quad (4.7)$$

Sea  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , una sucesión estacionaria regular y  $\xi(t) = \sum_{k \in T} c_k \zeta(t-k)$  su representación en forma de una sumación

móvil,  $M \zeta(t) = 0$ ,  $M \zeta^2(t) = 1$ . Pongamos  $\hat{F}_n^{(0)}(\lambda) = \int_0^{\lambda} I_n(\mu) d\mu$ ,

$F^{(0)}(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(\mu) d\mu$ , donde  $f(\lambda)$  es la densidad espectral del proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ .

**Teorema 1.** Si se cumplen las condiciones: a)  $\xi(t)$  tiene el cuarto momento finito  $\mu_4$ ; b)  $f(\lambda)$  es absolutamente continua; c)  $c_k = O(k^\beta)$ ,

$\beta < -\frac{3}{2}$ , entonces

$$\lim P \left\{ \max_{0 \leq \lambda \leq \pi} \sqrt{n} |\hat{F}_n^{(0)}(\lambda) - F^{(0)}(\lambda)| \leq z \right\} = P \left\{ \max_{0 \leq \lambda \leq \pi} |\eta(\lambda)| \leq z \right\}, \quad (4.8)$$

donde  $\eta(\lambda)$  es un proceso gaussiano con  $M\eta(\lambda) = 0$ ,  $M\eta(\lambda)\eta(\mu) = (\mu_n - 3)F^{(0)}(\lambda)F^{(0)}(\mu) + 2\pi \int_0^{\min(\lambda, \mu)} f^2(s) ds$ .

La igualdad (4.8) recuerda el resultado correspondiente para la estadística de Kolmogórov, no obstante a diferencia de la última, en el caso dado la distribución límite depende de la función en estimación.

**25.4.3. Estimaciones de la densidad espectral.** A título de estimación puntual de la densidad espectral  $f(\lambda)$  de la sucesión estacionaria  $\{\xi(t), t \in T\}$ , según la observación  $x(t)$ ,  $t \in T_n = \{t_k, k = \overline{1, n}\}$ , se eligen las estadísticas  $\hat{f}_n(\lambda)$  de la forma

$$\hat{f}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \mu) J_n(\mu) d\mu, \quad (4.9)$$

donde  $J_n(\lambda)$  es el periodograma, mientras que las funciones de espeso  $W_n(\lambda)$ , que se llaman *ventanas espectrales*, se eligen de modo que

1)  $W_n(\lambda)$  tenga máximo fuertemente expresado en cero;

2)  $\int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda) d\lambda = 1$ ;  $\sigma$

3)  $D\hat{f}_n(\lambda) \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ .

La condición 1) «corta» la estimación de la frecuencia exigida, que en virtud de 1) resulta asintóticamente insesgada, y en virtud de 3), conciliable.

Si se cumplen las condiciones:

1)  $\{\xi(t), t \in T\}$  es un proceso regular y  $\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \xi^*(t-k)$ , su

representación en forma de una sumación móvil;

2)  $M\xi^2(t) = 1$ ,  $M\xi^4(t) < \infty$ ;

3)  $c_k = O(|k|^{-(2+\delta)})$  para algún  $\delta > 0$ ;

4)  $\left| \frac{W_n^*(\mu)}{W_n^*(0)} - 1 \right| \rightarrow 0$  con  $n \rightarrow \infty$  para  $|\mu| \leq \frac{c}{n}$ ,

donde  $W_n^*(\mu) = W_n(\mu) * W_n(\mu)$  es la convolución  $W_n(\mu)$  con sí misma,  $c$  es cierta constante positiva, entonces la estadística  $\hat{f}_n(\lambda)$  es asintóticamente normal con la media

$$M\hat{f}_n(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_n(\lambda - \mu) f(\lambda) d\mu + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (4.10)$$

y la varianza

$$D\hat{f}_n(\lambda) \sim \frac{2\pi}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\lambda - \mu) f^2(\mu) d\mu \sim \frac{2\pi f^2(\lambda)}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\mu) d\mu. \quad (4.11)$$

La estadística  $\hat{f}_n(\lambda)$  es una estimación conciliable para  $f(\lambda)$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} W_n^2(\lambda) d\lambda = 0$ .

Entre el conjunto de las ventanas espectrales hay una clase que se usa con más frecuencia en la práctica estadística, o sea, la clase de ventanas espectrales que permiten la representación de la forma

$$W_n(\lambda) = 2 \sum_{-n+1}^{n-1} k_n(l) e^{-i\lambda l}, \quad (4.12)$$

donde  $k_n(l) = k\left(\frac{l}{m_n}\right)$ ,  $\{m_n\}$  es cierta sucesión ilimitadamente creciente de números positivos enteros, tal que  $\frac{m_n}{n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $k(x)$ , una función par acotada que satisface las condiciones:  $k(0) = 1$ ,  $|k(x)| < 1$  para  $x \neq 0$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} k^2(x) dx < \infty$ .

Supongamos que la sucesión estacionaria  $\xi(t)$  es regular,  $\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta(t-k)$  es su representación en forma de una sumación móvil,  $\sum_0^{\infty} |c_k| < \infty$ , las magnitudes aleatorias independientes  $\zeta(t)$  tienen medias nulas y el cuarto momento finito. Sea también  $B(t)$  una función de correlación  $\xi(t)$ .

La representación referente al carácter asintótico del desplazamiento  $f(\lambda) - Mf_n(\lambda)$  nos la ofrece el

**Teorema 2.** Si

1) para cierto  $q > 1$  existe y es finito el límite

$$k_q = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - k(x)}{|x|^q};$$

2)  $\frac{n}{m_n^q} \rightarrow \infty$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;

3)  $\sum_{t \in T} |t^q B(t)| < \infty$ ,

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^q [f(\lambda) - M\hat{f}_n(\lambda)] = \frac{k_q}{2\pi} \sum_{t \in T} |t|^q B(t) e^{it\lambda} < \infty. \quad (4.13)$$

Las propiedades covariacionales asintóticas de las estadísticas  $\hat{f}_n(\lambda)$  las describe el Teorema 3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{m_n} \text{cov} [\hat{f}_n(\lambda_1), \hat{f}_n(\lambda_2)] = \begin{cases} \lambda_1 \neq \pm \lambda_2; \\ f^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k^2(t) dt, \lambda_1 = \pm \lambda_2 = \lambda \neq 0; \\ 2f^2(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} k^2(t) dt, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \pm \pi. \end{cases}$$

En las condiciones del teorema 2 se consigue la más rápida convergencia de la varianza  $D\hat{f}_n(x)$  hacia cero si

$$m_n = O\left(n^{\frac{1}{1+2q}}\right).$$

25.4.4. Ejemplos de ventanas espectrales. Designemos con  $B_n(t) = \frac{1}{n-t} \sum_{j=1}^{n-t} x_{j+t} \bar{x}_j$  la estimación de la función de correlación  $B(t)$

(función de correlación empírica).

1. Transformación de Fourier finita (estimación de Daniels)

$$W_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{m_n}{2}, & |\lambda| \leq \frac{\pi}{m_n}; \\ 0, & |\lambda| > \frac{\pi}{m_n}, \end{cases}$$

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{m_n}{2\pi} \sum_{t=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) B_n(t) \frac{\text{sen} \frac{\pi t}{n}}{\pi t} e^{it\lambda};$$

$$k(x) = \frac{\text{sen} \pi x}{\pi x}.$$

2. Estimación cortada

$$W_n(\lambda) = 2 \frac{\text{sen} \frac{2m_n+1}{2} \lambda}{\text{sen} \frac{\lambda}{2}};$$

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-m_n}^{m_n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) B_n(t) e^{it\lambda};$$

$$k(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

### 3. Estimación de Bartlett

$$W_n(\lambda) = \frac{\text{sen}^2 \frac{m_n \lambda}{2}}{m_n \text{sen}^2 \frac{\lambda}{2}};$$

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-m_n}^{m_n} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \left(1 - \frac{|t|}{m_n}\right) B_n(t) e^{it\lambda},$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 0. \end{cases}$$

### 4. Estimación Tukey-Hanning

$$\hat{f}_n(\lambda) = \frac{1}{2} \hat{f}'_n(\lambda) + \frac{1}{2} \hat{f}_n\left(\lambda - \frac{\pi}{m_n}\right) + \frac{1}{n} \hat{f}_n\left(\lambda + \frac{\pi}{m_n}\right),$$

donde  $\hat{f}'_n(\lambda)$  es la estimación cortada del ejemplo 2;

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \cos \pi x), & |x| \leq 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

## 25.5. Estimaciones de los parámetros de la densidad espectral

Supongamos que se observa la trayectoria  $x(t)$ ,  $t \in T_0$ , del proceso estacionario  $\{\xi(t), t \in T\}$ .  $M\xi(t) = 0$ ,  $D\xi(t) = \sigma^2$ , cuya densidad espectral está determinada, salvo uno o varios parámetros pertenecientes a cierto conjunto paramétrico  $\Theta$ :

$$f(\lambda) = f(\lambda, \theta), \quad \theta \in \Theta.$$

Hay que estimar  $\sigma^2$  y  $\theta \in \Theta$ .

En supuesto de que el proceso  $\xi(t)$ ,  $t \in T$ , es regular para cualesquiera  $\theta \in \Theta$  y  $\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\theta) \zeta(t-k)$  es su representación en forma

de la sumación móvil, a título de las estimaciones  $\hat{\sigma}_n^2$  y  $\hat{\theta}_n$  de los desconocidos  $\sigma^2$  y  $\theta$  se puede elegir tales valores de  $\hat{\sigma}_n^2$  y  $\hat{\theta}_n$  para los cuales se alcanza el mínimo de la expresión

$$n \ln \sigma^2 + \frac{W_n(\hat{\theta}, x(t), t \in T_0)}{\sigma^2}, \quad (4.14)$$

donde  $W_n(\theta, x(t), t \in T_0) = n \sum_{-n+1}^{n-1} W(t, \theta) \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) B_n(t)$ ;  $B_n(t) =$

$= \frac{1}{n-t} \sum_{j=t}^{n-t} x(t_{j+t}) x(t_j)$  es función de correlación empírica,  $W(t, \theta)$

es coeficiente de  $z^t$  en el desarrollo de Laurent de la función

$$v(z, \theta) = \frac{1}{v(z, \theta) u\left(\frac{1}{z}, \theta\right)}, \quad u(z, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\theta) z^k \quad (\text{se supone que})$$

este desarrollo es posible en el anillo que contiene circunferencia unitaria).

**Teorema 1.** Si se cumplen las condiciones:

1) las magnitudes aleatorias  $\xi(t)$  en la representación del proceso  $\xi(t)$  en forma de la sumación móvil son independientes, están igualmente distribuidas y tienen los cuartos momentos finitos;

2) el conjunto paramétrico  $\Theta$  es compacto en el espacio euclídeo de dimensión finita  $R^k$ ,  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ;

3)  $|v(z, \theta^1)|^2 \neq |v(z, \theta^2)|^2$  para casi todos los  $|z| = 1$ ,  $\theta^1, \theta^2 \in \Theta$ ,  $\theta^1 \neq \theta^2$ ;

4)  $f(\lambda, \theta)$  y  $f^{-1}(\lambda, \theta)$  son continuas en  $[-\pi, \pi]$ , entonces las estimaciones  $\hat{\sigma}_n^2$  y  $\hat{\theta}_n$  son estimaciones conciliables  $\sigma^2$  y  $\theta$ .

Si, además, se cumple la condición:

5) la función  $\frac{1}{|v(z, \theta)|^2}$  tiene derivadas continuas según  $\theta_j$  hasta el tercer orden incluso en el entorno del valor real  $\theta_0$  del parámetro  $\theta$  y

$$\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k(\theta_0)| < \infty,$$

entonces la distribución del vector  $\frac{1}{\sqrt{n}}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$  converge para  $n \rightarrow \infty$  al vector normal con media cero y matriz covariacional  $G_0^{-1}$  donde  $G_0$  tiene elementos

$$r_{lm}^0 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \ln |u(c^{i\lambda}, \theta)|^2}{\partial \theta_l} \frac{\partial \ln |v(c^{i\lambda}, \theta)|^2}{\partial \theta_m} d\lambda$$

( $l, m = \overline{1, k}$ ) (en supuesto de que  $G_0$  es no degenerada).

### Alfabeto griego

Imprenta	Escritura	Nombre	Imprenta	Escritura	Nombre
A α	<i>Α α</i>	alfa	Ν ν	<i>Ν ν</i>	nu
B β	<i>Β β</i>	beta	Ξ ξ	<i>Ξ ξ</i>	xi
Γ γ	<i>Γ γ</i>	gamma	Ο ο	<i>Ο ο</i>	ómicron
Δ δ	<i>Δ δ</i>	delta	Π π	<i>Π π</i>	pi
Ε ε	<i>Ε ε</i>	epsilon	Ρ ρ	<i>Ρ ρ</i>	rho
Z ζ	<i>Ζ ζ</i>	zeta	Σ σ	<i>Σ σ</i>	sigma
H η	<i>Η η</i>	eta	ς	<i>ς</i>	
Θ θ	<i>Θ θ</i>	theta	Τ τ	<i>Τ τ</i>	tau
I ι	<i>Ι ι</i>	iota	Υ υ	<i>Υ υ</i>	upsilon
K κ	<i>Κ κ</i>	kappa	Φ φ	<i>Φ φ</i>	phi
Λ λ	<i>Λ λ</i>	lambda	Χ χ	<i>Χ χ</i>	ji o chi
M μ	<i>Μ μ</i>	mu	Ψ ψ	<i>Ψ ψ</i>	psi
			Ω ω	<i>Ω ω</i>	omega

### Alfabeto gótico

Imprenta	Escritura	Valor	Imprenta	Escritura	Valor
Na	<i>Ūa</i>	a	Ūn	<i>Ūn</i>	n
Bb	<i>Ūb</i>	b	Do	<i>Ūo</i>	o
Cc	<i>Ūc</i>	c	Ɔp	<i>Ɔp</i>	p
Dd	<i>Ūd</i>	d	Ɔq	<i>Ɔq</i>	q
Ee	<i>Ūe</i>	e	Rr	<i>Ūr</i>	r
Ff	<i>Ūf</i>	f	Ūß	<i>Ūß</i>	s
Gg	<i>Ūg</i>	g	Ɔt	<i>Ūt</i>	t
Hh	<i>Ūh</i>	h	Uu	<i>Ūu</i>	u
Ii	<i>Ūi</i>	i	Ɔo	<i>Ūo</i>	v
Jj	<i>Ūj</i>	j	Ɔw	<i>Ūw</i>	w
Kk	<i>Ūk</i>	k	Xx	<i>Ūx</i>	x
Ll	<i>Ūl</i>	l	Ɔy	<i>Ūy</i>	y
Mm	<i>Ūm</i>	m	Ɔz	<i>Ūz</i>	z



## BIBLIOGRAFÍA

1. *Anderson T. W.* The statistical analysis of time series. John Wiley, New York — London — Sydney — Toronto, 1971.
2. *Bartlett M. S.* An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge University Press, 1955.
3. *Бихялис А.* О центральной предельной теореме в  $R^k$ . I. — Литов. мат. сб., 1971, вып. 1, с. 27—58; II — Литов. мат. сб., 1972, вып. 2, с. 73—84; III — Литов. мат. сб., 1972, вып. 3, с. 19—35. (*Bikialis A.* Sobre el teorema del limite central en  $R^k$ .)
4. *Billingsley P.* Ergodic Theory and Information, John Wiley, New York, 1965.
5. *Blackwell D. and Girshick M. A.* Theory of Games and Statistical Decisions, John Wiley, New York, 1954.
6. *Большев Л. П., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М., «Наука», 1965, 464 с. (*Bolshev L. N., Smirnov N. V.* Tablas de la estadística matemática.)
7. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М., «Наука», 1972, 367 с. (*Borovkov A. A.* Procesos probabilísticos en la teoría de las colas.)
8. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. М., «Наука», 1972, 287 с. (*Borovkov A. A.* Curso de la teoría de probabilidades.)
9. *Bochner S.* Lectures on Fourier Integrals, Princeton University Press, Princeton, 1959.
10. *Wald A.* Sequential Analysis, John Wiley, New York, 1947.
11. *Van der Waerden B. L.* Mathematische Statistik, Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.
12. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М., «Наука», 1975, 319 с. (*Ventsel A. D.* Curso de la teoría de procesos aleatorios.)
13. *Гузман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965, 654 с. (*Guzman I. I., Skorohod A. V.* Introducción a la teoría de procesos aleatorios.)
14. *Гузман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. В 3-х т. Т. 1—3. М., «Наука», 1971—1975. (*Guzman I. I., Skorohod A. V.* Teoría de procesos aleatorios.)
15. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. Изд. 4-е. М., «Наука», 1965, 400 с. (*Gnedenko B. V.* Curso de la teoría de probabilidades.)
16. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. Л.—М., Гостехиздат, 1949, 264 с. (*Gnedenko B. V., Kolmogorov A. N.* Distribuciones límites para las sumas de magnitudes aleatorias independientes.)

17. Grenander U. Stochastic Processes and Statistical Inference, Almqvist and Wilsells Boltryckeri A. B., 1950.
18. Doetsch G. Anleitung zum practischen Gebrauch der Laplace — Transformation und der  $z$  — Transformation, Dritte Aufgabe, R. Oldenburg, München, Wien, 1967.
19. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. Изд. 2-е. М., «Высш. школа», 1975. 407 с. (Ditkin V. A., Prudnikov A. P. Cálculo operacional.)
20. Doob J. L. Stochastic Processes, John Wiley, New York, 1953.
21. Дынкин Е. В. Основания теории марковских процессов. М., Физматгиз, 1959. 227 с. (Dyunkin E. V. Fundamentos de la teoría de procesos de Márkov.)
22. Дынкин Е. В. Марковские процессы. М., Физматгиз, 1963. 859 с. (Dyunkin E. V., Procesos de Márkov.)
23. Дынкин Е. В., Юшкевич А. А. Теоремы и задачи о процессах Маркова. М., «Наука», 1967. 231 с. (Dyunkin E. V., Yushkevich A. A. Teoremas y problemas de los procesos de Márkov.)
24. Zaks Sh. The theory of Statistical Inference, John Wiley, New York, 1974.
25. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М., «Наука», 1965. 524 с. (Ibragimov I. A., Linnik Yu. V. Magnitudes independientes y magnitudes estacionarias relacionadas.)
26. Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А. Гауссовские случайные процессы. М., «Наука», 1970. 384 с. (Ibragimov I. A., Rozanov Yu. A. Procesos aleatorios de Gauss.)
27. Ито К. Вероятностные процессы. Б-ка сб. «Математика». Вып. 1—2. Пер. с японского. М., изд-во иностр. лит., 1960—1963. (Ito K. Procesos probabilísticos, original en japonés.)
28. Ито К., McKean H. P. Diffusion processes and their sample paths, Springer Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1965.
29. Karlin S. A First Course in Stochastic Processes. Academic Press, New York — London, 1968.
30. Kemeny J. G. and Snell L. J. Finite Markov Chains, The University Series in Undergraduate Mathematics, 1959.
31. Kendall M. and Stuart D. Distribution Theory (2<sup>nd</sup> ed.), Charles Griffin and Company Limited, London, 1962.
32. Kendall M. and Stuart D. Inference and Relationship (2<sup>nd</sup> ed.), Charles Griffin and Company Limited, London, 1967.
33. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. Изд. 2-е. М., «Наука», 1974. 119 с. (Kolmogorov A. M. Conceptos fundamentales de la teoría de probabilidades.)
34. Cramer H. Mathematical Methods of Statistics, Princeton University Press, 1946.
35. Cramer H., Leadbetter M. R. Stationary and Related Stochastic Processes, John Wiley, New York, 1967.
36. Lehman E. L. Testing Statistical Hypotheses, John Wiley, New York, 1959.
37. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1962. 349 с. (Linnik Yu. V. Método de cuadrados mínimos y fundamentos de la teoría matemática estadística de elaboración de las observaciones.)
38. Липцер Р. М., Ширков А. Н. Статистика случайных процессов.

- М., «Наука», 1974. 696 с. (*Lévy R. M., Shiriáev A. N.* Estadística de procesos aleatorios.)
39. *Loève M.* Probability Theory (2<sup>nd</sup> ed.), Van Nostrand, Princeton, 1960.
  40. *Meyer P. A.* Probability and Potentials, Blaisdel Publishing Society, Calcutta 1967.
  41. *Мокин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Ч. 1—2. М., «Наука», 1965—1967. (*Monin A. S., Yaglom A. M.* Hidromecánica estadística.)
  42. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М., «Наука», 1972. 414 с. (*Petrov V. V.* Sumas de magnitudes aleatorias independientes.)
  43. *Писаренко В. Ф., Розанов Ю. А.* О некоторых задачах для стационарных процессов, приводящих к интегральным уравнениям, родственному уравнению Винера — Ховфа. Проблемы передачи информации. 1963, вып. 14. (*Pisarenko V. F., Rozánov Yu. A.* Acerca de los problemas para procesos estacionarios que llevan a las ecuaciones integrales afines a la ecuación de Wiener — Hoph. Problemas de la transmisión de información.)
  44. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.— Теория вероятностей и ее применения. 1956, вып. 1, с. 177—238. (*Próhorov Yu. V.* Convergencia de los procesos aleatorios y teoremas del límite de la teoría de probabilidades.)
  45. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы.) М., «Наука», 1973. 494 с. (*Próhorov Yu. V., Rozánov Yu. A.* Teoría de probabilidades. Conceptos fundamentales. Teoremas del límite. Procesos aleatorios.— Teoría de probabilidades y sus aplicaciones.)
  46. *Ramachandran B.* Advanced theory of characteristic functions, Statistical Publishing Society, Calcutta, 1967.
  47. *Rao C. R.* Linear statistical inference and its applications, John Wiley, New York, 1965.
  48. *Розанов Ю. А.* Стационарные случайные процессы. М., Физматгиз, 1963. 284 с. (*Rozánov Yu. A.* Procesos aleatorios estacionarios.)
  49. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. М.—М., Гостехиздат, 1949. 436 с. (*Romanovski V. I.* Cadenas discretas de Márkov.)
  50. *Романовский В. И.* Математическая статистика. М., ГОНТИ, 1938. 527 с. (*Romanovski V. I.* Estadística matemática.)
  51. *Рытов С. М.* Введение в статистическую радиофизику. М., «Наука», 1966. 404 с. (*Rýtov S. M.* Introducción a la radiofísica estadística.)
  52. *Сазонов В. В.* О скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме.— Теория вероятностей и ее применение. 1968, вып. 1, с. 191—194. (*Sazónov V. V.* Acerca de la velocidad de convergencia en el teorema multidimensional del límite. Teoría de probabilidades y su aplicación.)
  53. *Сарымсаков Т. А.* Основы теории процессов Маркова. М., Гостехиздат, 1954. 208 с. (*Sarymsákov T. A.* Fundamentos de la teoría de procesos de Márkov.)
  54. *Свейников А. А.* Прикладные методы в теории случайных функ-

- кий. Изд. 2-е. М., «Наука», 1968. 463 с. (*Svéshnikov A. A. Métodos aplicados en la teoría de las funciones aleatorias.*)
55. *Севастьянов В. А. Ветвящиеся процессы.* М., «Наука», 1971. 436 с. (*Sevast'yanov V. A. Procesos ramificados.*)
  56. *Сираджинов С. Х. Предельные теоремы для однородных цепей Маркова.* Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1955. 81 с. (*Siradzhinov S. J. Teoremas del límite para las cadenas homogéneas de Márkov.*)
  57. *Скорюход А. В. Исследования по теории случайных процессов.* К., Изд-во Киевского ун-та, 1961. 216 с. (*Skorohod A. V. Investigaciones en la teoría de los procesos aleatorios.*)
  58. *Скорюход А. В. Случайные процессы с независимыми приращениями.* М., «Наука», 1964. 278 с. (*Skorohod A. V. Procesos aleatorios con incrementos independientes.*)
  59. *Скорюход А. В. Элементы теории вероятностей и случайных процессов.* К., «Высшая школа», 1975. 218 с. (*Skorohod A. V. Elementos de la teoría de probabilidades y de los procesos aleatorios.*)
  60. *Скорюход А. В., Слободенюк Ш. Ш. Предельные теоремы для случайных блужданий.* К., «Наук. думка», 1970. 302 с. (*Skorohod A. V. Slobodenyuk N. P. Teoremas del límite para las fluctuaciones aleatorias.*)
  61. *Spitzer F. Principles of Random Walk,* Princeton University Press, 1964.
  62. *Wilks S. S. Mathematical statistics,* John Wiley, New York, 1962.
  63. *Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications,* volume 1 (2<sup>nd</sup> ed.), John Wiley, New York, 1957.
  64. *Feller W. An Introduction to Probability Theory and its Applications,* volume 11, John Wiley, New York, 1966.
  65. *Hunt G. A. Markoff Processes and Potentials,* Illinois Journal of Mathematics, vol. I (1957), vol. II, № 3 (1957) vol. II, № 2 (1958).
  66. *Harris T. E. The theory of Branching Processes,* Springer Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1963.
  67. *Hannan E. J. Time series Analysis,* Methuen, London, 1960.
  68. *Hannan E. J. Multiple Time Series,* John Wiley, New York, 1970.
  69. *Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных случайных процессов.* — УМН, 1938, вып. 5, с. 42—51. (*Ginchin A. Ya. Teoría de correlación de los procesos aleatorios estacionarios.*)
  70. *Ченцов Н. Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы.* М., «Наука», 1972. 520 с. (*Chentsov N. N. Reglas estadísticas de resolución y deducciones óptimas.*)
  71. *Chung Kai Lat. Markov Chains with Stationary Transition Probabilities,* Springer — Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
  72. *Ширяев А. Н. Статистический последовательный анализ.* М., «Наука», 1969. 229 с. (*Shiriáyev A. N. Análisis sucesivo estadístico.*)
  73. *Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций.* УМН, VII, 1952, вып. 5, с. 3—168. (*Yaglom A. M. Introducción a la teoría de las funciones aleatorias estacionarias.*)
  74. *Яглом А. М. Некоторые классы случайных полей в n-мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам.* — Теория вероятностей и ее применения, 2, 1957, № 3, с. 293—333. (*Yaglom A. M. Algunas clases de campos aleatorios*

en el espacio  $n$ -dimensional afines a los procesos aleatorios estacionarios. Teoría de probabilidades y sus aplicaciones.)

75. Яглом А. М. Спектральное представление для различных классов случайных функций.— Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. Т. 1, 1963, с. 250—273. (Yaglom A. M. Representación espectral para diferentes clases de funciones aleatorias.)
76. Яглом А. М. Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Тр. Моск. мат. о-ва, 4, 1955, с. 333—374. (Yaglom A. M. Extrapolación, interpolación y filtración de los procesos estacionarios con la densidad espectral racional.)
77. Blumenthal R. M., Gettoor R. K. Markov Processes and Potential Theory. Academic Press, 1968. 313 p.
78. Doetsch G. Handbuch der Laplace — Transformation, Bd. 1—3. Basel. Birkhauser Verl, 1950—1956.
79. Elderton W. P. Frequency Curves and Correlation. Cambridge, University Press, 1938. 199 p.
80. Grenander U. On Empirical spectral analysis of stochastic processes.— Arkiv för Matematik. Bd. 1, H. 6, 1952, p. 503—531.
81. Grenander U., Rosenblatt M. Statistical analysis of stationary time series. N.—Y. 1957.
82. Hirschman I., Widder D. The Convolution transform. Princeton, 1955. 268 p.
83. Kemeny J. G., Snell J. L., Knapp A. W. Denumerable Markov chains. N.—Y.—L., Van Nostrand, 1966. 433 p.
84. Moysal I. E. Multiplicative population chains.— Pros. Roy. Soc., A266, 1962, p. 1327.
85. Sazonov V. V. On multidimensional central limit theorem.— Sankhya. Ser. A, 39, part 2, 1968, p. 181—209.
86. Wold H. A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Ed. 2. Stockholm, Almqvist — Wiksell, 1938. 236 p.

## INDICE ALFABETICO DE MATERIAS

- Acotación en probabilidad 56
- Algebra de conjuntos 15
- Alternativa:
  - compuesta 469
  - simple 469
- Análisis sucesivo 467
- Anticipo 149
- Ausencia del efecto posterior 113, 118
- Axioma:
  - de adición de probabilidades 19
  - de adición ampliado 19
  - de continuidad 19
- Axiomas de probabilidad 16
- $\sigma$ -álgebra 18
  - de Borel 20
  - numerablemente engendrada 38
  
- Cadena de Markov 164
  - aperiódica 191
  - ergódica 199
  - homogénea 173
  - irreducible 190
  - irreversible 191
  - periódica 181
  - positivamente reversible 196
  - reversible nula 196
- Campo aleatorio 280
  - con incrementos independientes 283
  - funciones de momento 281
  - funciones de momento centrales 281
  - funciones muestrales 280
  
- Campo aleatorio
  - gaussiano 283
  - homogéneo 287
    - en la esfera 298
    - isótropo 296, 298
  - medible 284
  - medida espectral 288, 292
    - densidad 288
  - separable 285
  - valor medio 281
- Cantidad de información 489
- Característica:
  - de la funcional  $W$  57
  - de una martingala integrable de modo cuadrático 310
- Características muestrales 483
- Carga invariante 180
- Clase:
  - aperiódica 186, 191
  - ergódica 186
  - periódica 191
- Clases de estados comunicantes 190
- Clases ergódicas 185
- Coefficiente:
  - de amplificación del filtro 250
  - de confianza 496
  - de correlación 32
  - de correlación recíproca 237
  - de difusión 362, 431
  - pe interrupción 362
  - de mezclado fuerte 278
  - de traslado 362, 431
- Componente de factorización 158
  - negativo 158
  - positivo 158
- Composición 59

- Condición:**  
 de equivalencia de las medidas 525, 538  
 de estimación insesgada 233  
 de compacidad débil 420  
 de Cramer 92  
 de Doblin 184  
 de Kolmogórov—Chentsov 286  
 de Liapunov 78  
 de Lindeberg 77, 82  
 de mezclado fuerte 278  
 de ortogonalidad (singularidad) de medidas 523, 532, 536  
 de pequeñez uniforme 75  
 de ramificación 394  
 de realización física del filtro 251
- Condiciones de convergencia:**  
 hacia una distribución aritmética 103  
 hacia una distribución degenerada 102, 105  
 hacia una distribución general de Poisson 103  
 hacia una distribución normal 103, 107
- Conjunto:**  
 boreliano 20  
 cilíndrico 204
- Continuidad:**  
 con la probabilidad 1 214, 321  
 en media cuadrática 224  
 estocástica 206  
 —uniforme 338
- Convergencia:**  
 casi por cierto 53  
 con la probabilidad 1 53  
 en media cuadrática 49, 223
- Convergencia**  
 en media del orden  $r$  49  
 en probabilidad 46
- Convolución** 59, 63, 94
- Correlación:**  
 de Mills 121  
 de verosimilitud 472
- Covariación** 32, 224
- Criterio:**  
 conciliable 471  
 de carácter totalmente monótono 63  
 de la hipótesis 469  
 de la relación de verosimilitud 472, 473
- de Kolmogórov—Smirnov 476  
 de Neumann—Pearson 471  
 de Pearson 473  
 de reversibilidad 151  
 de series de Wald—Wolfowitz 476  
 óptimo 470  
 para distinguir la cadena de Márkov 168  
 randomizado 470  
 sucesivo 476  
 uniformemente más potente 470
- Criterios:**  
 de aceptación 469  
 no paramétricos 475  
 no paramétricos de orden 476
- Cumulante** 376
- Densidad:**  
 de distribución 22  
 —condicional 36, 39  
 espectral 241, 288, 290  
 —racional fraccionaria 254
- Descomposición:**  
 de Doob 308  
 de Doob—Meyer 309  
 de Lebesgue 241  
 de Levi 371  
 de Hiesz 308  
 de Wold 263
- Desigualdad:**  
 de Berry—Esseen 85  
 de Cramer—Rao 488  
 de Chébishev 49  
 de Doob 302  
 de Esseen 85  
 de Kolmogórov 52
- Desviación:**  
 estándar 32  
 media 120
- Distinción infalible de las hipótesis** 532
- Distribución:**  
 absolutamente continua 22  
 aritmética (véase distribución reticular)  
 beta 122  
 binomial 23, 44, 59, 110  
 binomial generalizada 115  
 binomial negativa 112  
 conjunta 24

continua 22  
 de arco seno 124  
 —generalizada 124  
 de Bernoulli 110  
 de Borel—Tanner 117  
 de Cauchy 124  
 de dimensiones finitas 203  
 de Dirichlet 141  
 de Erlang 122  
 de Kapteyn 130  
 de Laplace (véase distribución  
 exponencial doble)  
 de magnitud del anticipo 383  
 de máximo 160  
 —del proceso de Wiener 391  
 de Maxwell 127  
 de Pareto 130  
 de Pascal 112  
 de Poisson 23, 59, 66, 114  
 —generalizada 99  
 —compleja 60  
 de Polya 114  
 de producto de dos magnitudes  
 aleatorias independientes 29  
 de razón de dos magnitudes  
 aleatorias independientes 29  
**Distribución:**  
 de razón de la varianza de  
 Fisher 132  
 de Rayleigh 127  
 de Simpson 118  
 de Snedekor 128  
 de Student 127  
 —multidimensional 141  
 de suma de dos magnitudes  
 aleatorias independientes 28,  
 59  
 de Sherman 131  
 de Weibull—Gnedenko 132  
 de Wishart 142  
 divisible infinitamente 96  
 degenerada 110  
 discreta 25  
 estable 100, 142  
 exponencial 64, 118  
 exponencial doble 124  
 exponencial potencial 122  
 gamma 64, 66, 121  
 geométrica 23, 113  
 hiperexponencial 119  
 hipergeométrica 45, 113  
 inicial 314  
 logarítmica normal 129

logarítmica 116  
 logística 130  
 marginada 37  
 marginal 25  
 multinomial (véase distribu-  
 ción polinomial)  
 no central 126  
 normal 66, 120  
 —bidimensional 71  
**Distribución:**  
 —estándar 121  
 —multidimensional 71, 136  
 — — degenerada 136  
 — — no degenerada 136, 137  
 reticular 23  
 polinomial 25, 45, 136  
 potencial 131  
 semicontinua inferiormente 157  
 simétrica 52  
 uniforme 66  
 $\chi$  126  
 $\chi^2$  124  
 $\chi$  no central 126  
 $F$  (véase distribución de Sne-  
 dekor)  
 $t$  (véase distribución de Stu-  
 dent)  
 $z$  (véase distribución de la  
 razón de varianza de Fisher)  
**Distribuciones:**  
 de Burr 133  $\frac{1}{2}$   
 de Pearson 134  
**Dominio:**  
 confidencial 495  
 crítico 469  
 de aceptación de la hipótesis  
 469  
**Ecuación:**  
 de Fokker—Planck 432  
 de Kolmogórov—Chapman 169,  
 313  
 de Kolmogórov inversa 431  
 —normal 432  
 de regeneración 147  
 de verosimilitud 494  
 de Wiener—Hopf 551  
 diferencial estocástica  
 Elección aleatoria 478  
 Elipses de iguales probabilidades  
 139



- Endomorfismo 274  
 Equivalencia estocástica 204, 210  
 Error:  
 de filtración 258  
 de interpolación 258  
 de primer género 469  
 de pronosticación 258  
 de segundo género 469  
 Espacio:  
 de magnitudes aleatorias de Hilbert 223  
 de valores de un proceso estacionario en amplio sentido 238  
 físico 203  
 medible 19  
 muestral 465  
 probabilístico 19  
 Esperanza matemática 29, 30  
 condicional 36, 39  
 Esquema de series 80  
 Estadística 466  
 de Kolmogórov 476  
 de orden 478  
 de rango 478  
 de Smirnov 482  
 de Smirnov—Pearson 125  
 suficiente 490  
 Estado:  
 absorbente 343  
 de paso 343  
 de retención 343  
 irreversible 191  
 no real 190  
 real 190  
 reversible 191  
 —nulo 195  
 —positivo 195  
 Estados comunicantes 190  
 Estimación:  
 cortada 563  
 de Bartlett 564  
 de Daniels 563  
 de densidad espectral 561  
 de función espectral 560  
 de parámetros de distribución de Bernoulli 502  
 —de distribución exponencial 506  
 —de distribución de Poisson 503  
 de los parámetros de distribución gamma 504  
 —de distribución normal 99  
 —de regresión 555  
 —distribución uniforme 504  
 de los procesos estacionarios 548  
 Estimación  
 de Tykey—Hanning 564  
 insesgada 467  
 Estimaciones:  
 conciliables 543  
 del método de cuadrados mínimos 508  
 de la varianza 500  
 de la verosimilitud máxima 493  
 eficientes conjuntas 502  
 insesgadas 467  
 insesgadas asintóticas 549  
 —eficientes 490, 549  
 suficientes 490  
 Experimento determinista 13  
 Experimento aleatorio 13  
 Exponente característico 143  
 Extrapolación 265  
 Extrapolación de un proceso aleatorio 233  
 Filtro:  
 característica de frecuencia 249  
 coeficiente de amplificación 250  
 de alta frecuencia 251  
 de baja frecuencia 251  
 de banda 250  
 fase 250  
 físicamente realizable 251  
 de frecuencia media 251  
 función impulsora de transición 250  
 Filtración 257  
 lineal 270  
 Fluctuación aleatoria 164  
 con absorción 167  
 con las fronteras 165  
 con reflexión 165  
 en el esquema de Bernoulli 154  
 exponencial 161  
 irreversible 151  
 oscilante 152  
 que se aleja a  $\pm \infty$  152  
 reversible 151  
 semicontinua 157  
 Flujo de  $\sigma$ -álgebras 300

- Fórmula:**  
 de Bayes 35  
 de esperanza matemática total 36  
 de esperanzas matemáticas reiteradas 39  
 de inversión 67  
 —con suavización 67  
 de Ito 438, 444  
 —generalizada 460
- Fórmula:**  
 de Kotélnikov—Shannon 270  
 de Levi—Ginčin 373  
 de multiplicación de las probabilidades 35  
 de probabilidad total 35
- Frecuencia** 15  
 empírica 478
- Frontera:**  
 accesible 367  
 atractiva 368  
 cautivadora 367  
 de escape 367  
 de reflexión 367  
 inaccesible 367  
 natural 367  
 regular 367  
 repelente 368
- Función:**  
 armónica 180  
 característica 65  
 —del proceso homogéneo con incrementos independientes 375  
 centradora 371  
 coespectral 240  
 —coespectral matricial 240  
 continua en media cuadrática 224  
 de autocorrelación 237  
 de correlación 205, 235, 281  
 —recíproca 236  
 de covariación 235  
 de distribución 22  
 —absolutamente continua 22  
 —condicional 39
- Función**  
 —conjunta 39  
 —marginal 25  
 —multidimensional 20  
 —unidimensional 20  
 de la potencia de un criterio 470
- de momento 205, 281  
 de regeneración 147, 151  
 de variación correcta 133  
 de variación lenta 60, 108  
 de variación regular  
 empírica 481  
 espectral 240  
 —empírica 500  
 —matricial 240  
 — — cuadrática 240  
 — — — matricial 240  
 estimadora 511  
 estructural 227  
 excesiva 180, 355  
 generadora 57  
 —conjunta 57  
 —del proceso de regeneración 146  
 —del proceso ramificado 396, 400, 406, 411  
 marginal 25  
 muestral 204  
 positivamente definida 224  
 resolutive 467  
 subarmónica 180  
 superarmónica 180  
 totalmente monótona
- Función**  
 de verosimilitud 494
- Funciones aleatorias de Márkov** 312
- Funcional:**  
 aditiva 352  
 característica 205  
 multiplicativa 326  
 superior 154
- Hipótesis:**  
 alternativa 469  
 estadística 466  
 compuesta 466  
 simple 468
- Identidad:**  
 de factorización 157  
 de Pollaczek—Spitzer 160  
 de Wald 154, 162, 305
- Igualdad de Parseval**  
 Independencia 40

en conjunto 41  
de los grupos de magnitudes  
aleatorias 41  
Integral estocástica 227, 231,  
434, 441, 456  
Interpolación 257  
Intervalo confidencial 497  
Intervalo de regularidad 366

Juego probabilístico 305

Ley:

de arco seno 302  
de arco seno, —local 155  
de cero y de unidad 43, 306  
de entrada 315  
de logaritmo reiterado 380, 380  
de los grandes números 46,  
50-52  
para un campo aleatorio 289,  
291  
reforzada 53, 54, 307

Ley local:

de arco seno 155  
de logaritmo reiterado (véase  
ley de l. reiterado)

Límite:

en media cadrática 49  
inferior 43  
superior 43

Magnitud aleatoria 21

de Hilbert 223  
de valores enteros 23

Magnitud aleatoria marginada 37,  
73

Magnitudes aleatorias independi-  
entes 41

Magnitudes en escalera 158

Magnitud independiente del fu-  
turo 324

Martingala:

integrable de modo cuadrático  
310  
local 309

Matriz:

de correlación 33, 236

de covariación 33, 236  
de difusión 363, 431  
de precisión 140  
de información 492  
estocástica 189, 344  
inversa generalizada 511  
semiestocástica 344

Media:

de tiempo 549  
probabilística 30

Medias temporales 247

Mediciones directas:

equiexactas 510  
no equiexactas 510

Medida:

aleatoria (véase medida estocás-  
tica)  
espectral 240, 243, 288, 290  
estacionaria 180  
estocástica 227  
estocástica ortogonal 227  
de saltos de un proceso con  
incrementos independientes  
374  
invariante 180  
normada 19  
vectorial 236

Medidas:

absolutamente continuas  
equivalentes 218  
estocásticas 307  
— elementales 227  
ortogonales 520  
singulares 218

Método

de Bayes 547  
de cuadrados mínimos 508  
de ecuaciones diferenciales 389  
de los momentos 493  
de minimización de la funcional  
cuadrática 546  
del mínimo 495  
de proyección 544  
de verosimilitud máxima 546  
de Wiener 260

Momento:

absoluto 31  
central 31  
de arruinamiento 156  
de interrupción 316, 325  
de la primera llegada 178  
de Márkov 177, 304, 321, 339  
de regeneración 146

- de salto 343
- espectral 241
- factorial 58
- mixto 32
- muestral 484
- Momento riguroso en escalera 158
- Movimiento browniano (véase Proceso de Wiener)
- Muestra:
  - aleatoria
  - distribución 484
  - homogeneidad 476
  - recorrido 479
  - volumen 465, 471
- Nivel de significación del criterio 470
- Núcleo:
  - del potencial
  - de  $L$  resolvente 336
- Operador:
  - característico 342
  - de Blaschke—Privalov 361
  - de desplazamiento del tiempo 333
  - de difusión 529
  - infinitesimal 335
- Parámetro de estabilidad 143
- Período de la clase de estados comunicantes 191
- Periodograma 559
- Polinomios:
  - de Chébishev 516
  - de Chébishev—Hermite 87
- Potencial 157, 181
- Principio:
  - de minimax 488
  - de cuadrados mínimos 508
- Probabilidad:
  - condicional 37
  - de degeneración de un proceso ramificado 397
  - definición clásica 17
  - geométrica 18
  - de paso 170, 313, 332
    - conservativa 338
    - con prohibición 196
    - de Feller 337
    - estocástica continua 336
    - normal 325
- Problema
  - de arruinamiento 156
  - de Dirichlet 182
- Proceso:
  - aleatorio 203
    - con incrementos independientes 371
    - con incrementos ortogonales 230 230
    - de autorregresión 256
    - de difusión 361, 430
    - de espera 156
  - de Márkov
    - casi continuo a la izquierda 323
    - de Feller 337
    - en amplio sentido 241
    - estándar 323
    - homogéneo 331
    - interrumpido 315, 324
    - irregular 343
    - normal 325
    - de pérdida 396
    - de Poisson 208
    - de regeneración 146, 153
      - con retardo 148
      - general 149
      - reglado 149
    - de reproducción y pérdida 351
    - de ruido blanco 252
    - de sumación deslizante 239, 256
    - de Wiener 209
    - espectral 242
    - estacionario:
      - con densidad espectral racional fraccionaria 254
      - determinista 263
      - en amplio sentido 236
      - en estrecho sentido 272
      - ergódico 276
      - regular 263
      - singular 263
      - totalmente indeterminista 263
    - estacionario gaussiano 237

- Proceso:
- estándar con incrementos ortogonales 239
  - homogéneo según el espacio 530
  - medible 210
  - progresivo medible 322
  - ramificado 399
    - aperiódico 408
    - con el número finito de tipos de partículas 410
    - co un mismo tipo de partículas 399
    - crítico 403
    - degenerativo 397
    - general de Márkov 414
    - indecomponible 413
    - periódico 408
    - regular 413
  - separable 213
  - singular 263
    - subcrítico 403
    - supercrítico 403
  - sin discontinuidad de segunda especie 215
- Propiedad de Márkov 312
- rigurosa de Márkov 177, 321, 339
- Puntos on escalera superiores rigurosos 153
- Rango del proceso estacionario 242
- máximo 242
- Regla de tres sigmas 121
- Regresión:
- exponencial 515
  - línea 514
  - polinomial 515
  - superficie 513
  - trigonométrica polinomial 556
- Relación de verosimilitud 472
- Representación espectral 291
- Resolvente:
- de fluctuación aleatoria 157
  - del semigrupo de operadores 336
- Resultados equiposibles 17
- Retraso 149
- Semigrupo:
- contrayente 335
  - de Márkov 334
  - de operadores 335
- Semiinvariante 69
- Semimartingala 300
- Serie de Cramer 92
- Serie variacional 478
- Señal útil 233, 258
- Sistema:
- de ecuaciones de Kolmogórov 346
    - primero 345
    - segundo 346
  - de ecuaciones normales 509
    - sin efecto residual 164
    - sin memoria 164
- Solución mínima 347
- de Yaglom 261
- Subclase cíclica 186
- Submartingala 300
- Subproceso de proceso de Márkov 329
- Sucesión:
- estacionaria 180
  - estándar de magnitudes aleatorias incorrelacionadas 239
  - de magnitudes aleatorias independientes 44, 48
  - de magnitudes aleatorias uniformemente integrables 50
  - de sucesos independientes 43
  - de  $\sigma$ -álgebras independientes 44
- Suceso:
- cierto 14
  - elemental 14
  - imposible 14
- Sucesos:
- álgebra 14
  - diferencia 14
  - grupo completo 14
  - intersección 14
  - producto 14
  - suma 14
  - union 14
- Sucesos independientes 43
- Supermartingala 300
- Superposición 57
- Suma normada 73
- Sustitución aleatoria del tiempo 357
- Tabú-probabilidad 196
- Teorema:
- acerca de las tres series 55
  - de Birkhoff—Ginčin 275
  - de Bochner—Ginčin 239

- de Borel—Cantelli 43
- de Chentsov 286
- de continuidad 60, 63, 68
- de Gauss—Márkov 512
- de Glivenko 481
- de Gnedenko 85
- de Kolmogórov, 204, 482
- de Kolmogórov—Rózanov 279
- de Levi—Lindeberg 74, 81
- de Liapunov 76
- de Lindeberg—Feller 77, 81
- de Moivre—Laplace 46, 85
- de Poisson 47
- de Radon—Nikodym 219
- de regeneración 147
  - nodal 148
- de Smirnov 482
- de Tauber 60, 64
- de Yaglom 262, 553
- del límite central 73, 120
  - multidimensional 80, 81, 82
  - para procesos estacionarios en amplio sentido 248
  - para procesos estacionarios en estrecho sentido 279
- del límite local 83
  - de Gnedenko 85
  - de Moivre—Laplace 85
- ergódico 199
  - para las cadenas de Márkov 198
  - para procesos estacionarios en amplio sentido 247
  - para procesos estacionarios en estrecho sentido 275
- Teorema integral de Moivre—Laplace 46, 74, 80
- Tiempo de vida 316
- Tiempo local 376
- Transformaciones:
  - de Laplace 61
  - del espacio fásico 354
  - que conserva la medida 265
- Valor real del parámetro en estimación 487
- Varianza 31
- Varianza muestral 486
- Ventana espectral 561
- Zona:
  - estrecha 92
  - de convergencia normal 91
  - monomial 92

*A nuestros lectores:*

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, 1—410, GSP, URSS.

## TÍTULOS DE NUESTRO SELLO EDITORIAL:

Irodov I.

### LEYES FUNDAMENTALES DE LA MECÁNICA

La finalidad de este libro es la de concentrar la atención sobre las principales leyes de la mecánica (de movimiento y de conservación de la energía, del impulso y del momento de impulso), así como mostrar el modo de aplicar estas leyes en la resolución de distintos problemas concretos. El libro contiene dos partes: 1) mecánica clásica y 2) mecánica relativa. En la primera parte, las leyes de la mecánica se analizan con aproximación newtoniana, o sea, con velocidades de movimiento considerablemente menores que la de la luz; en la segunda, con velocidades comparables a la de la luz.

El libro está dedicado a los estudiantes de los primeros cursos de institutos superiores y universidades con programa ampliado de física. Asimismo, puede ser útil a los estudiantes de cursos superiores y docentes.



Krasnov M., Kiseliov A., Makárenko G.

### ANÁLISIS VECTORIAL

La buena preparación matemática del ingeniero moderno, indudablemente contribuye a nuevos logros de la técnica en sus distintas especialidades. Una de las disciplinas matemáticas de gran significado en la formación de un ingeniero, es el análisis vectorial, incluido hoy en los programas de los cursos de matemática superior de institutos y universidades.

La colección de problemas de análisis vectorial propuesta, contiene el mínimo necesario de problemas y ejercicios del curso de análisis vectorial correspondiente al programa de los institutos técnicos de enseñanza superior.

El libro puede ser considerado como un curso breve de análisis vectorial, en el que se comunican sin demostración los hechos básicos, ilustrándolos en ejemplos concretos. Por eso, esta obra puede ser utilizada, por una parte, para repetir los fundamentos del análisis vectorial, y, por otra, como libro de texto para quienes, sin entrar en la demostración de algunas proposiciones y teoremas, desean dominar la técnica de operación del análisis vectorial.

Efimov N.

### GEOMETRÍA SUPERIOR

En este libro se examina un gran número de problemas. Se da la argumentación matemática de: la geometría euclídea, las geometrías no euclídeas de Lobachevski y Riemann, la geometría proyectiva, la geometría de Minkovski y las cuestiones geométricas de la teoría especial de la relatividad y una noción general de las formas topológicas de la geometría de curvatura constante. La obra se divide en las tres partes. El material principal se expone en las primeras dos partes. El material de la tercera parte—nociones principales de la geometría de curvatura constante—puede ser aprovechado en el trabajo de los círculos matemáticos.

El libro se caracteriza por la claridad de su exposición y es comprensible para amplios círculos de lectores, aunque las cuestiones que trata, por así decirlo, no siempre son sencillas. Esta monografía ha sido reeditada varias veces en la Unión Soviética y en otros países. Está destinada a los estudiantes de centros docentes superiores así como a todas aquellas personas que se interesan por las matemáticas.